vwo 5 wiskunde C deel 1

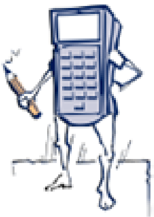
de Wageningse Methode

Copyright © 2021 Stichting de Wageningse Methode
Auteurs Leon van den Broek †, Ton Geurtz, Maris van Haandel, Erik van Haren, Dolf van den Hombergh, Peter Kop, Henk Reuling, Daan van Smaalen
Homepage www.wageningse-methode.nl
ISBN 978-90-5225-046-5
Illustraties Wilson Design Uden
Distributie Iddink Voortgezet Onderwijs BV, Postbus 14, 6710 BA Ede

Inhoudsopgave

Voorwoord

Dit boek bevat het derde deel van de leerstof voor het vak wiskunde C van het vwo.



In de bovenbouw maak je gebruik van een grafische rekenmachine. Als je een nieuwe optie van je grafische rekenmachine kunt gebruiken, is dit gemarkeerd door nevenstaand mannetje. Aangezien er verschillende merken en modellen grafische rekenmachines zijn, vind je in dit boek geen "knoppencursus". Op de website van de Wageningse Methode staan verwijzingen naar bronnen met informatie over het gebruik en de belangrijkste opties van de grafische rekenmachine. Maar je mag natuurlijk ook je docent om hulp vragen.

In dit boek worden iconen gebruikt. De blauwe iconen geven de structuur van een paragraaf aan. Hierdoor zie je direct waar bijvoorbeeld een stuk theorie wordt behandeld of waar een historische wetenswaardigheid de revue passeert. De groene iconen vertellen je iets over een specifieke opgave, bijvoorbeeld dat de opgave lastig is of dat er een werkblad bij de opgave hoort. Een overzicht van de gebruikte iconen vind je op de volgende pagina.

Met dank aan . . .

Voor het schrijven van dit boek is gebruikt gemaakt van hoofdstukken uit eerdere versies van de Wageningse Methode en het lesmateriaal dat door schrijvers van de Wageningse Methode voor de commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO) is ontwikkeld. Onze dank gaat uit naar Simon Biesheuvel, Carel van de Giessen, Sieb Kemme, Peter Kop, Bert Nijdam, Piet Versnel en Peter van Wijk voor hun inbreng — al dan niet als pilotdocent — bij het ontwikkelen van het lesmateriaal voor het vwo.

Tot slot . . .

Tijdens het ontwikkelen van dit boek is op 8 december 2013 geheel onverwacht onze zeer gewaardeerde vriend Leon van den Broek overleden. Leon zette zich op ongekende wijze in voor motiverend en activerend wiskundeonderwijs. Hij was wars van het aanleren van onbegrepen routines. Leon wilde dat leerlingen de schoonheid van wiskunde gingen zien en beleven — wiskunde als een onuitputtelijke bron van interessante onderwerpen en prachtige problemen. Actief met wiskunde bezig zijn — zelf ontdekken en inzichtelijk leren — stond daarbij voor Leon centraal. Het was zijn overtuiging dat wiskunde op die manier een goed te begrijpen vak wordt en dat het leerproces dat de leerlingen doormaken hen blijvend vormt.

Het wegvallen van Leon betekent een zeer groot gemis voor de Wageningse Methode: hij was de geestelijk vader en drijvende kracht. We zijn Leon zeer dankbaar voor zijn uitzonderlijke inzet voor de Wageningse Methode en het wiskundeonderwijs. We zullen zijn creativiteit, gedrevenheid, idealisme en inspiratie enorm missen.

De auteurs van de Wageningse Methode

Overzicht iconen . . .

Theorie
Hier wordt iets benadrukt, samengevat of nader toegelicht. Lees de theorie goed door en stel vragen als je iets niet begrijpt. Theorie die je moet kennen, staat in rode letters. Belangrijke woorden zijn vetgedrukt. Je vindt deze woorden terug in de index achterin het boek.

Voorbeeld
In een voorbeeld zie je hoe de theorie gebruikt wordt om een vraag op te lossen. Zorg dat je het voorbeeld kunt volgen en stel vragen als je het voorbeeld niet begrijpt.

Opmerking
Let op, er wordt iets opmerkelijks behandeld of je wordt ergens op geattendeerd. Een opmerking bestudeer je aandachtig, maar hoef je niet te leren.

Historie
Hier vind je historische feiten en wetenswaardigheden.

Werkblad
Bij deze opgaven hoort een werkblad. Je vindt het werkblad op de site www.wageningse-methode.nl.

Computer
Bij deze opgaven of uitleg maak je gebruik van de computer en/of de digitale versie van de Wageningse Methode.

Echt, moet kunnen
Deze opgaven zijn standaardopgaven die je zonder veel moeite op moet kunnen lossen.

Puzzelen
Bij deze opgaven moet je even puzzelen. Geef niet te snel op.

Pittig
Deze opgaven zijn wat moeilijker.

Hint
Er wordt een hint gegeven die je kan helpen bij het oplossen van de opgave. Je vindt de hints achterin het boek.

Facultatief
Deze opgaven/paragraaf kun je overslaan zonder de draad kwijt te raken.

1 De hoogte van een boom hangt af van zijn leeftijd. In de tabel staat hoe hoog een fijnspar (alias de kerstboom) gemiddeld is op verschillende leeftijden.

leeftijd (jaar)	10	20	30	40	50	60
hoogte (meter)	5	10,5	16	20,5	24,5	28

In een bos zijn de meeste bomen langer dan 20 meter.

a Hoe lang is het minstens geleden dat ze werden geplant?

b Hoe hoog is een fijnspar van 45 jaar ongeveer? En van 22 jaar?

In een ander bos is er een aantal jaren na de eerste aanplant een tweede gevolgd. Het hoogteverschil tussen de bomen in de eerste en in de tweede aanplant is nu ongeveer 9 meter.

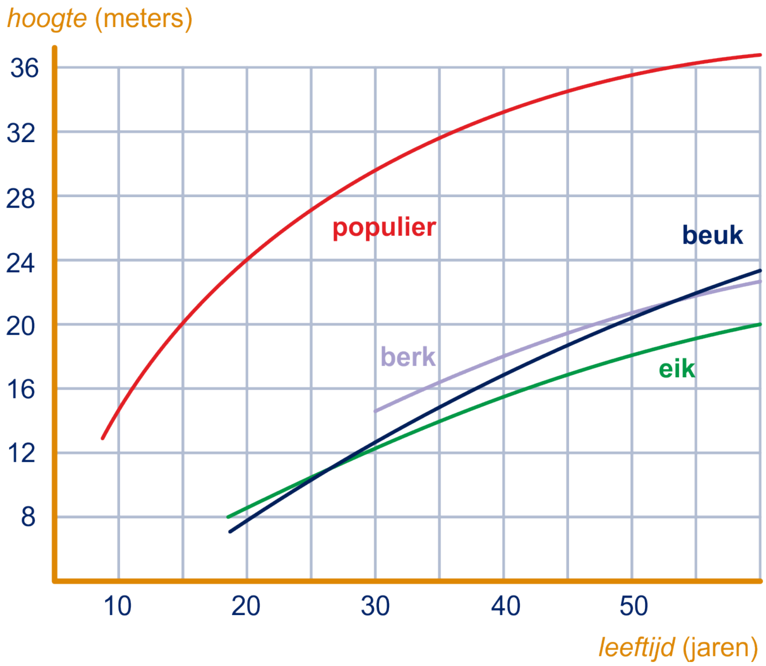
c Kun je hieruit de leeftijd van de bomen afleiden? Hoe groot is het leeftijdsverschil ongeveer?

Omdat de groei van de fijnspar geleidelijk verloopt, kun je van de groei een doorlopende grafiek schetsen.

d Doe dat; zet de leeftijd af op de horizontale as en de hoogte op de verticale as.

e Bedenk een vuistregel om de hoogte ongeveer te bepalen als je de leeftijd van een fijnspar kent.

2 Hieronder zie je de groei van de eik, berk, beuk en populier in één figuur.



a Wat is het opvallende verschil in groei tussen de populier en de beuk?

b Hoort de eik wat type groei betreft bij de populier of bij de beuk?

We kijken verder naar de populier. Uit de grafiek kun je voor elke leeftijd aflezen hoe hoog een populier (gemiddeld) is.
Maar stel nu eens dat je alleen een tabel hebt met de hoogte bij drie leeftijden (gegevens uit de grafiek):
L = leeftijd, H = hoogte.

L (jaar)	10	15	20	25	30
H (meter)	14,5		24		29,5

Op grond van deze tabel schat Anneke de hoogte van een populier van 15 jaar op 19,25 meter en van 25 jaar op 26,75 meter.

c Ga met een berekening na hoe Anneke deze hoogtes heeft gevonden.

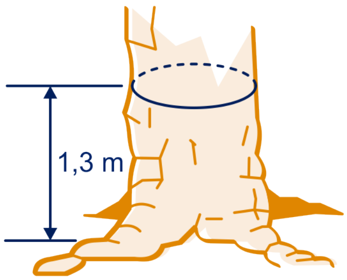
d Ga in de grafiek na of deze hoogtes ongeveer kloppen.

Het is niet goed mogelijk om de hoogte van een populier van 80 jaar te schatten. Dat wordt meer gokwerk.

e Bereken toch een zo goed mogelijke schatting van deze hoogte.

3

Ook de dikte van een boom hangt af van de leeftijd. In de bosbouw bepaalt men de dikte (dat is de diameter) van een boomstam op een hoogte van 1,3 meter. Dat gaat het eenvoudigst door de omtrek te bepalen en die te delen door π (≈ 3,14159...); voor het gemak gebruikt men meestal 3,14.
diameter $= \frac{\text{omtrek}}{\pi} \approx \frac{\text{omtrek}}{3{,}14}$.



Voor een populier is het verband tussen leeftijd en dikte in onderstaande tabel gegeven.

leeftijd (jaar)	10	20	30	40	50	60
diameter (cm)	16	30	43	55	66	76

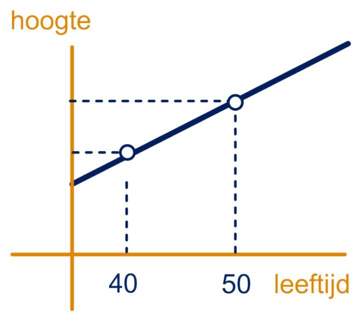
a Hoe groot is de omtrek op 1,3 meter hoogte van een 50-jarige populier?

Iemand is geïnteresseerd in de hoogte van de populier, maar heeft geen zin de boom in te klimmen. Dat hoeft ook niet, want het antwoord kan op de hoogte van 1,3 m gevonden worden. Op die hoogte blijkt de omtrek 160 cm te zijn.

b Hoe hoog is de boom ongeveer? (Gebruik ook de gegevens uit de vorige opgaven.)

4 Nogmaals de tabel van het verband tussen leeftijd en hoogte van de fijnspar.

leeftijd (jaar)	10	20	30	40	50	60
hoogte (meter)	5	10,5	16	20,5	24,5	28



Omdat de groei van de fijnspar vrij gelijkmatig verloopt, is de bijbehorende grafiek nagenoeg een rechte lijn. In deze opgave gaan we ervan uit dat de grafiek tussen de meetpunten uit de tabel rechtlijnig is.

a Hoeveel meter groeit een fijnspar per jaar tussen zijn 40$^{\text{ste}}$ en 50$^{\text{ste}}$ jaar?
Hoeveel meter groeit hij in die periode in 3 jaar tijd?

b Hoe hoog is een fijnspar van 43 jaar? Controleer je antwoord in de grafiek bij opgave 1.

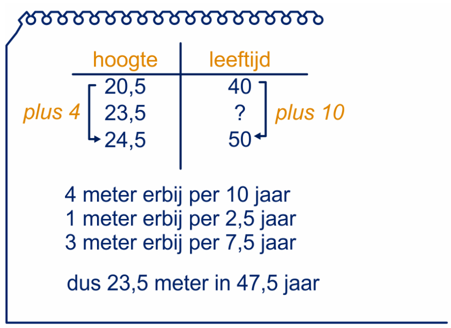
c Dezelfde vraag voor een fijnspar van 58 jaar.

5 Met behulp van de tabel kun je ook bij een gegeven hoogte de leeftijd van de fijnspar bepalen. Een fijnspar is tussen de 20,5 en 24,5 meter hoog.

a Hoe lang doet de boom erover om 1 meter te groeien?
Hoe oud is de fijnspar als hij 23,5 meter hoog is?

b Dezelfde vraag als hij 26,5 meter hoog is.

De berekening bij opgave 5**a** ziet er schematisch zó uit:



Bij *gelijkmatige groei* is er een *lineair* verband tussen de hoeveelheid en de tijd: de grafiek is een rechte lijn. Als je bij zo'n groei de hoeveelheden op twee tijdstippen kent, kun je de hoeveelheid op een derde tijdstip uitrekenen.

Als het derde tijdstip tussen de twee bekende tijdstippen in ligt, spreken we van **interpolatie** (tussenplaatsing).
Als het derde tijdstip buiten de twee bekende tijdstippen in ligt, spreken we van **extrapolatie** (buitenplaatsing).

6 Een goedje groeit gelijkmatig. Om 12 uur is er 10 kg, om 20 uur is er 34 kg.

a Bereken met interpolatie de hoeveelheid om 16 uur. Schrijf zo nodig je berekening overzichtelijk op zoals na opgave 5.

b Bereken met extrapolatie de hoeveelheid om 23 en om 10 uur.

7 Een goedje groeit gelijkmatig. Na 17 uur is er 50 kg, na 22 uur is er 10 kg. Omdat de hoeveelheid afneemt, spreken we wel van negatieve groei.

a Bereken met interpolatie de hoeveelheid na 19 uur.

b Bereken met interpolatie na hoeveel uur de hoeveelheid 22 kg is.

8 Een goedje groeit gelijkmatig. Na 24 uur is er 112 kg, na 50 uur is er 250 kg.

a Bereken met interpolatie de hoeveelheid na 30 uur.

b Bereken met extrapolatie de hoeveelheid na 61 uur.

9 Een goedje groeit gelijkmatig. Na 30 uur is er 60 kg, na 100 uur is er 80 kg.

a Bereken met interpolatie na hoeveel uur de hoeveelheid 75 kg is.

b Bereken met extrapolatie na hoeveel uur de hoeveelheid 85 kg is.

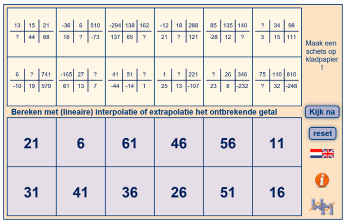
10 De populier groeit niet gelijkmatig (opgave 2).

a Hoe zie je dat aan de grafiek?

Een populier van 10 jaar is 14,5 meter. Als hij 30 jaar oud is, is hij 29,5 meter.

b Hoe hoog is volgens de methode van interpolatie een populier van 20 jaar oud?
Hoeveel scheelt dat met zijn werkelijke lengte?

Bij het interpoleren hebben we in de voorgaande opgaven steeds aangenomen dat de grafiek door de twee gegeven meetpunten rechtlijnig is. We spreken dan van **lineaire interpolatie***. We zullen ook nog andere manieren van interpoleren tegenkomen. Tenzij anders vermeld, zullen we met interpoleren altijd lineair interpoleren bedoelen. Evenzo voor extrapoleren.*



Je kunt nog meer oefenen met (lineaire) interpolatie en extrapolatie met de applet ‘mini-loco: inter- en extrapolatie’.

11 Rond het begin van onze jaartelling leefden er ongeveer 1 miljoen mensen op aarde. In het jaar 2000 waren dat er ongeveer 6 miljard.

a Schat op grond van deze gegevens de wereldbevolking in het jaar 1000. Denk je dat dit een goede schatting is?
Zo nee, is deze schatting te hoog of te laag? Toelichten!

b Maak ook een schatting voor de grootte van de wereldbevolking in het jaar 2100. Denk je dat dit een goede schatting is?
Zo nee, is deze schatting te hoog of te laag?

12 Het aantal studenten aan universiteiten en hogescholen is de laatste jaren fors gestegen. De gegeven in de tabel hieronder zijn afkomstig van het CBS, onderwijsstatistieken.

studiejaar	2000/ 2001	2005/ 2006	2007 /2008	2008/ 2009	2009/ 2010
aantal studenten universiteiten (×1000)	166	201	213	223	233
aantal studenten hbo (×1000)	313	357	375	384	403

a Hoe groot schat je op grond van deze gegevens het aantal studenten aan universiteiten in 2002/2003?

b Vind jij dat hier sprake is van gelijkmatige groei?

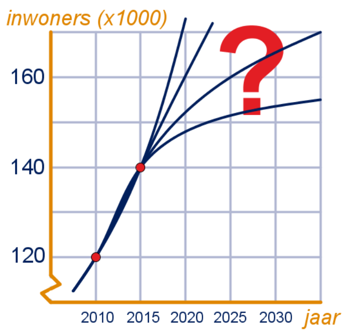
c Kun je op grond van deze gegevens het aantal studenten aan universiteiten in 2020 redelijk voorspellen?

d Wanneer nam het aantal studenten aan het hbo het sterkst toe?

e Hoeveel nam het totaal aantal studenten aan universiteiten en hbo tussen 2000/2001 en 2009/2010 gemiddeld per jaar toe?

Opmerking

Extrapolatie is (nog) riskanter dan interpolatie.



Stel bijvoorbeeld dat een stad in 2010 120.000 inwoners had en in 2015 140.000 inwoners. Kun je nu op grond hiervan het aantal inwoners in het jaar 2020 of zelfs in 2025 voorspellen?

Hoe verder in de toekomst, hoe onzekerder het aantal inwoners wordt. Toch kan het gemeentebestuur niet afwachten, maar moet het nu al maatregelen treffen voor straks. De bestuurders nemen aan dat ze allerlei factoren die bij de groei van de stad meespelen redelijk kennen. Zodoende kunnen ze toch voorspellingen doen voor de toekomst. Maar het is dus geen wonder dat die vaak moeten worden bijgesteld.

13

Wind-chill

Als het waait, dan voelt het kouder aan dan het werkelijk is: hoe harder het waait, des te kouder voelt een zelfde temperatuur aan.

In de tabel is bij sommige waarden van de thermometertemperatuur en sommige waarden van de windsnelheid de ervaringstemperatuur gegeven: dat is de temperatuur zoals je die "voelt". Als het windstil is, is de ervaringstemperatuur gelijk aan de thermometertemperatuur. Als de windsnelheid 5 m/s is en het is in werkelijkheid -10°C, dan is de ervaringstemperatuur -18°C.

	thermometertemperatuur (°C)						
windsnelheid (m/s)	5	0	-5	-10	-15	-20	-25
0	5	0	-5	-10	-15	-20	-25
5	3	-4	-11	-18	-25		
10	0	-9	-18	-27			
15	-5	-14	-23				

Er heerst een krachtige wind: 10 m/s. De thermometer geeft -10°C aan.

a Wat is dan de ervaringstemperatuur?

b Welke regelmaat kun je in de (horizontale) rijen van de tabel vinden?

Neem aan dat de regelmaat zich voorzet.

c Bepaal de ontbrekende negen getallen in de tabel.

d Bereken met behulp van interpolatie de ervaringstemperatuur bij windsnelheid 7 m/s en thermometertemperatuur -13°C.

Hint 1.

14

Een goedje groeit exponentieel. Om 12 uur is er 10 kg, om 20 uur is er 34 kg.

a Bereken de groeifactor per uur, afgerond op 3 decimalen.

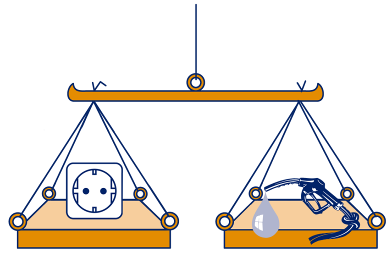
Er is nu geen sprake van lineaire groei, dus gaan we de berekende groeifactor gebruiken om de hoeveelheid op andere tijdstippen te berekenen: we gaan dus **exponentieel interpoleren**.

b Bereken met exponentiële interpolatie de hoeveelheid van het goedje om 16 uur. Rond je antwoord af op 1 decimaal.

c Bereken met **exponentiële extrapolatie** de hoeveelheid om 23 en om 10 uur.

15

In 2016 reden er nog weinig elektrische auto's. Maar veel mensen overwegen uit milieuoverwegingen (CO_2-uitstoot, fijnstof) om een elektrische auto aan te schaffen. Ook de overheid probeert dit te stimuleren.
In de tabel hieronder staan de tarieven van dat jaar voor de kosten van een elektrische auto vergeleken met de kosten van een benzine-auto. De kosten zijn omgerekend naar wat het per gereden kilometer kost. Het zijn natuurlijk gemiddeldes en er kunnen grote verschillen zijn tussen de verschillende types en merken auto's.



kosten in euro (per km)	elektrische auto	benzine auto
afschrijving	0,14	0,05
brandstofkosten	0,04	0,12
onderhoudskosten	0,01	0,03
belasting/verzekering	0,07	0,11
TOTAAL	**0,26**	**0,31**

De goedkoopste auto op benzine op dat moment kostte € 7.695. De goedkoopste elektrische auto kostte € 26.490. We gaan deze twee auto's met elkaar vergelijken.

a Bereken voor beide auto's wat de totale kosten in 5 jaar zijn, inclusief aanschaf, voor iemand die gemiddeld 10.000 km per jaar rijdt.

Het *totaal* aantal gereden kilometers noemen we k.
De kosten (in euro) voor de benzine-auto noemen we B en voor de elektrische auto E.
Voor de benzine-auto geldt: $B = 0{,}31k + 7695$.

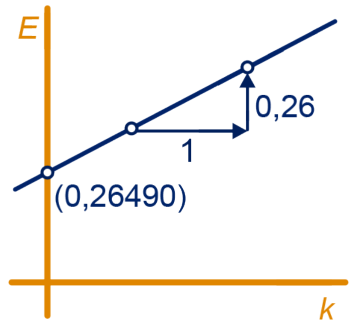
b Leg dat uit en geef een soortgelijke formule voor E.

c Bereken met de beide formules vanaf welk aantal kilometers de kosten voor de elektrische auto goedkoper zijn dan voor de benzine-auto.
Na hoeveel jaar is dat voor iemand die 10.000 km per jaar rijdt? En voor iemand die 25.000 km per jaar rijdt?

Omdat het (dus) financieel niet aantrekkelijk was om een elektrische auto aan te schaffen, worden er plannen bedacht om door middel van subsidies het elektrisch rijden aantrekkelijker te maken, of het rijden op benzine onaantrekkelijker te maken door extra belastingen te heffen.

d Onderzoek wat het meeste effect heeft: door subsidie de kosten per km voor de elektrische auto met 20% te verlagen, of door extra belastingen de kosten per km voor de benzine-auto met 20% te verhogen.

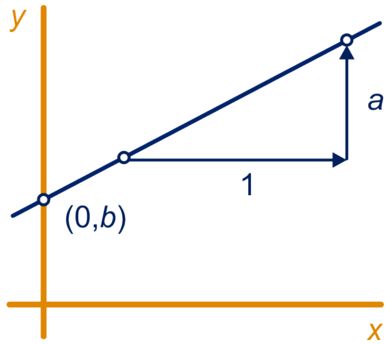
In de vorige opgave nemen de kosten bij de elektrische auto *per gereden kilometer* met $0{,}26$ euro toe. Dus als je de grafiek van de kosten E als functie van het aantal gereden kilometers k tekent, dan gaat de grafiek $0{,}26$ omhoog als je 1 naar rechts gaat. Dus is de grafiek een rechte lijn.
En ook als je helemaal niet met de auto rijdt, moet je toch de aanschafkosten betalen. Dus begint de grafiek in het punt $(0{,}26490)$ op de verticale as.



Herhaling uit klas 3

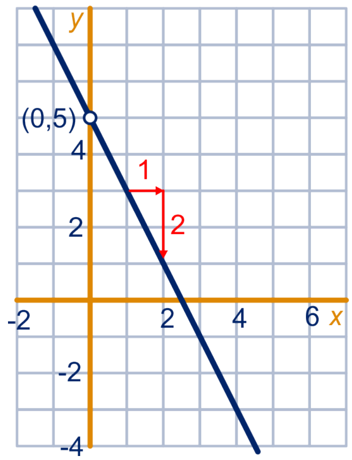
Als de grafiek van het verband tussen twee grootheden een rechte lijn is, spreken we van een **lineair verband**.
De formule (vergelijking) van een lineair verband is van de vorm: $y = ax + b$.

- Het getal a is de **richtingscoëfficiënt**;
  Het getal a wordt ook wel helling, hellingsgetal of hellingscoëfficiënt genoemd.
- Het getal b is de hoogte waarop de y-as wordt gesneden en is de uitkomst van de formule voor $x = 0$.
  Het getal b wordt vaak het **startgetal** of **begingetal** genoemd.



- De grafiek is een stijgende lijn als $a > 0$ en dalend als $a < 0$;
- Als $a > 0$: de grafiek gaat telkens a omhoog als de x met 1 toeneemt;
- Als $a < 0$: de grafiek gaat telkens a omlaag als de x met 1 toeneemt;
- De rechte lijn gaat door het punt $(0,b)$ op de y-as.

Hiernaast is bijvoorbeeld de rechte lijn $y = \text{-}2x + 5$ getekend.



twee lineaire verbanden

16
a Teken op de GR in één window de grafieken van:
$y = 1\frac{1}{2}x - 5$ en $y = -\frac{2}{3}x + 8$.
b Bepaal met de GR het snijpunt van de grafieken.

Als je de grafieken getekend hebt en het snijpunt heeft "mooie" coördinaten, dan kun je het snijpunt gewoon aflezen uit de figuur. Ter controle kun je de afgelezen waarden in de formules invullen.

Voor rechte lijnen kun je het snijpunt ook *met de hand* uitrekenen, zonder gebruik te maken van grafieken en je GR. In de derde klas heb je geleerd hoe. We herhalen de methode nog even aan de hand van de lijnen uit opgave 16.

Voorbeeld

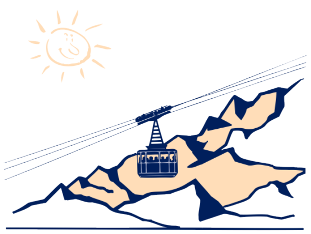
$$
\begin{aligned}
1\tfrac{1}{2}x - 5 &= -\tfrac{2}{3}x + 8 && \text{MAAL 6}\\
9x - 30 &= -4x + 48 && \text{PLUS 30}\\
9x &= -4x + 78 && \text{PLUS } 4x\\
13x &= 78 && \text{DELEN DOOR 13}\\
x &= 6
\end{aligned}
$$

Door deze waarde van x in $y = 1\frac{1}{2}x - 5$ of in $y = -\frac{2}{3}x + 8$ in te vullen, kun je de tweede coördinaat van het snijpunt vinden: $y = 4$. De twee formules moeten natuurlijk dezelfde waarde voor y opleveren; daarmee kun je je antwoord controleren.

17
Bereken de coördinaten van het snijpunt van de volgende tweetallen lijnen.
Controleer steeds je antwoord.
a $y = 4x - 5$ en $y = -2x - 1$
b $y = \frac{1}{4}x + 7$ en $y = \frac{1}{2}x + 9$
c $y = 1{,}3x$ en $y = -0{,}9x - 5$
d $x + y = 10$ en $y = \frac{5}{8}x$

formules opstellen

18
Anneke is op vakantie in Oostenrijk. Vanuit het dorpje Scheffau gaat er een kabelbaan naar de top van de Hohe Salve. Anneke gaat met de kabelbaan naar boven. Als ze 6 minuten in de kabelbaan zit, is ze op 750 meter hoogte. Na 14 minuten is de kabelbaan op 990 meter hoogte.
De hoogte noemen we h (in m.), de reistijd t (in min.).



We nemen aan dat de kabelbaan steeds even snel stijgt, zodat hier sprake is van een lineair verband tussen h en t.

a Hoeveel meter stijgt Anneke per minuut? Wat is dus de richtingscoëfficiënt van de lineaire formule?

Anneke is op het grondstation ingestapt.

b Bereken op welke hoogte zich het grondstation bevindt.

c Geef een formule voor h, uitgedrukt in t.

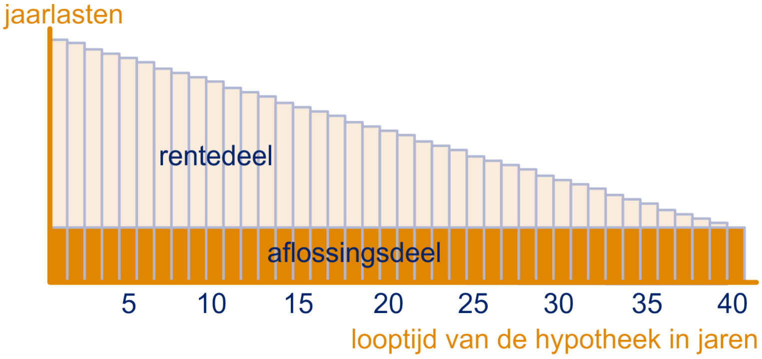
Het bergstation van de kabelbaan, boven op de Hohe Salve, bevindt zich op 1800 meter hoogte.

d Bereken hoe lang Anneke in de kabelbaan zit.

19

Stel dat je bij een bank een bedrag leent. Je gaat dat in 40 jaar aflossen. Elk jaar betaal je een zelfde bedrag aan aflossing.
De resterende schuld wordt dus elk jaar evenveel kleiner.
Over de resterende schuld moet je rente betalen.
De hoeveelheid rente wordt dus ook elk jaar kleiner. Dus wordt ook het totale te betalen bedrag elk jaar kleiner. Hier is sprake van een lineaire hypotheek.
Duitenberg leent €100.000,– volgens het systeem van lineaire hypotheek. De lening heeft een looptijd van 40 jaar (daarna is het hele bedrag afgelost).

Onderstaand plaatje is afkomstig uit een folder van de bank.
Je kunt daarin goed zien hoe het totale bedrag afneemt dat op het eind van elk jaar aan de bank betaald moet worden.



a Leg uit dat Duitenberg na het zesde jaar nog een schuld heeft van 85.000 euro.

b Hoe groot is zijn schuld na het 27^{ste} jaar?

c Hoe groot is zijn schuld na het x-ste jaar?

20 Een productie P groeit in de tijd t; P in kg en t in weken, vanaf 1 januari. Stel dat de productie op 1 januari 11 kg is en dat je weet dat de productie met 1,5 kg per week toeneemt.

a Stel een formule op voor P, uitgedrukt in t.

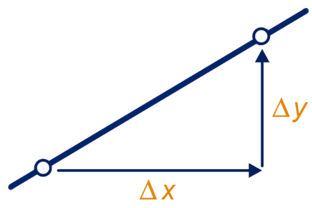
Stel dat je de productie 4 weken en 9 weken na 1 januari kent: respectievelijk 37 kg en 52 kg.

b Stel een formule op voor P, uitgedrukt in t.

rc $= \dfrac{\text{toename van } y}{\text{toename van } x}$

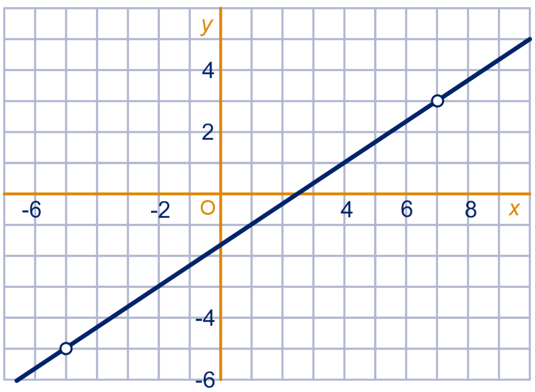
Voor toename wordt de Griekse hoofdletter Δ (delta) gebruikt, vergelijkbaar met onze hoofdletter D en komt van het Latijnse woord ‘differentia’, wat *verschil* betekent.

Dus: rc $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$



De Griekse letter Δ voor ’toename’ werd voor het eerst gebruikt in 1706 door de beroemde Zwitserse wiskundige Johann Bernouilli. Daarvoor gebruikte hij de Latijnse letter D om verschillen mee aan te geven. Waarschijnlijk was hij bekend met het Griekse woord διαφορα, dat ’verschil’ betekent.

21 Hieronder is een rechte lijn getekend. Op de lijn zijn twee (rooster)punten aangegeven.



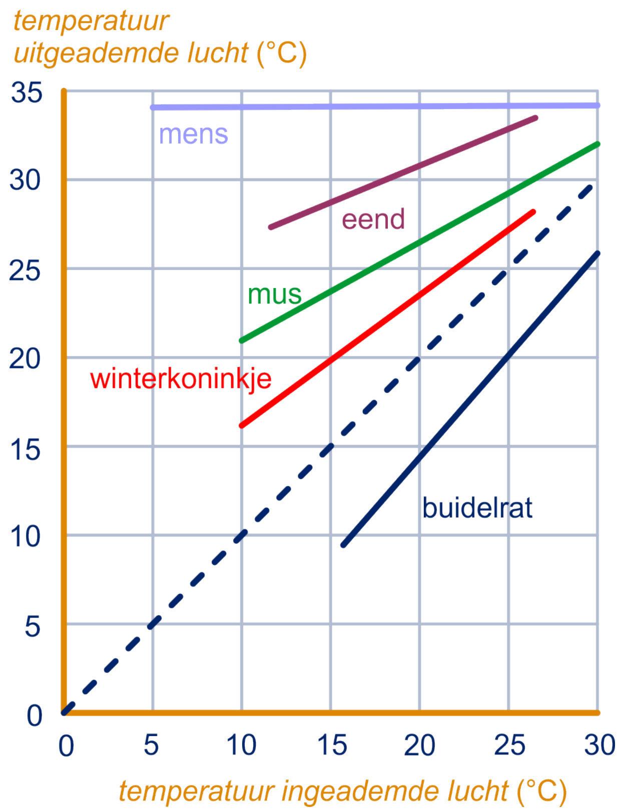
a Bereken met de twee gegeven roosterpunten exact de richtingscoëfficiënt.

Je weet nu dat een formule van de lijn is: $y = \frac{2}{3}x + b$.
Het getal b kun je berekenen door een handig punt (x, y) van de lijn in te vullen.

b Kies een handig punt en bereken daarmee b. Laat breuken in je antwoord staan.

c Hoe kun je jouw berekende waarde van b in de grafiek controleren?

22 Koude ingeademde lucht wordt verwarmd in de longen; de lucht die je uitademt is warmer dan de lucht die je inademt. We vergelijken de temperatuur van de ingeademde en uitgeademde lucht bij de mens, de eend, de huismus, het winterkoninkje en de buidelrat.



De grafiek voor de mens is anders dan alle andere grafieken.

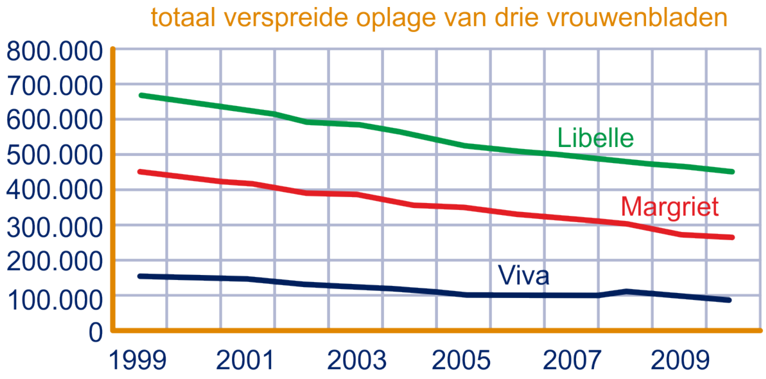
a Zeg in woorden wat het verschil is.

De stippellijn geeft aan dat de uitgeademde lucht dezelfde temperatuur heeft als de ingeademde lucht. De grafiek van de buidelrat ligt daaronder.

b Zeg in woorden wat dat betekent.

c Stel een formule op voor ten minste drie van de lijnen. Gebruik de letters I en U voor de temperatuur van de in- en uitgeademde lucht.

23 Het gaat niet goed met de traditionele vrouwenbladen Libelle, Margriet en Viva. Hun oplage daalt gestaag, zoals blijkt uit de onderstaande grafiek. De data zijn afkomstig van NRC-Handelsblad, 12 augustus 2011. Noem hun oplagen in duizenden achtereenvolgens L, M en V. De tijd t rekenen we in jaren sinds 2000; dus $t = -1$ in 1999.



De drie grafieken zijn goed te benaderen door rechte lijnen.

a Stel formules op voor L, M en V.

Stel dat de trend in de grafiek zich doorzet en dat Libelle tot het bittere eind doorknokt.

b Wanneer zal de oplage van Libelle geheel zijn opgedroogd?

Libelle en Margriet hebben ongeveer evenveel lezers verloren, Viva minder.

c Hoe blijkt dat uit de formules?

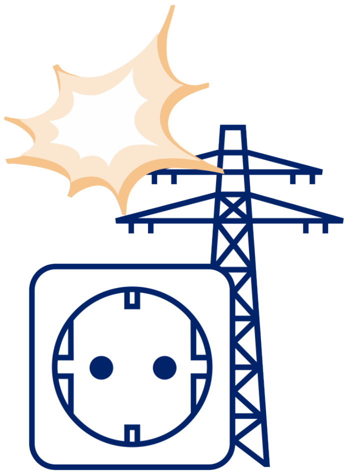
De *verhouding* van de oplagen van Margriet en Viva is ongeveer hetzelfde gebleven.

d Ga dat na. Hoe zit dat met Libelle en Viva?

e Stel een formule op voor de totale oplage van de drie bladen.

24

We bekijken de jaarafrekening voor stroom. Je kunt het bedrag dat je moet betalen splitsen in een vaste vergoeding en het verbruiksbedrag voor de hoeveelheid stroom. (Onderstaande bedragen zijn fictief.)



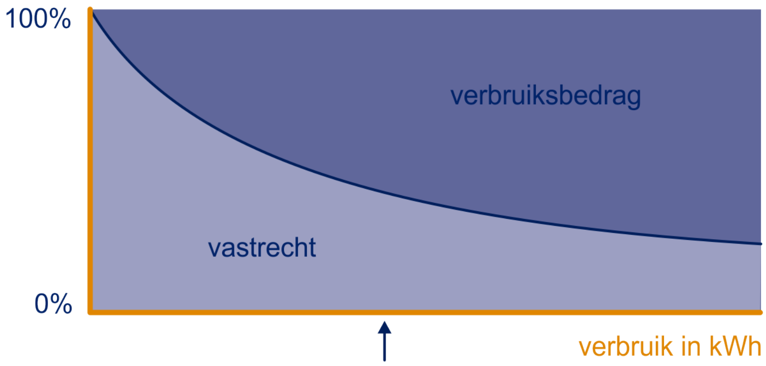
De vaste kosten (vastrecht transport, vastrecht aansluiting en meetdienst tezamen) voor een periode van 365 dagen bedraagt €52,–. De prijs per gebruikte Kwh elektriciteit verschilt erg per aanbieder en voor de wijze waarop de stroom is gemaakt. We nemen in deze opgave aan dat de prijs per gebruikte kWh elektriciteit $3{,}4$ eurocent bedraagt. We letten niet op de btw.
Het totale bedrag B (in euro) bij elektriciteitsverbruik v (in kWh) is in dit geval:
$B = 0{,}034v + 52$.
Verbruik je niets, dan moet je toch de vaste vergoeding betalen. Het vastrecht is dan 100% van het bedrag. Verbruik je 365 kWh dan betaal je weliswaar een even grote vaste vergoeding, maar dat is minder dan 100% van het totale bedrag.

a Hoe groot is dat percentage afgerond op één decimaal?

b Wat gebeurt er met dat percentage als het verbruik toeneemt? Kun je dat met de formule uitleggen?

c Bij welk verbruik bestaat de helft van de kosten uit de vaste vergoeding?

De verhouding tussen de twee delen van het totale bedrag is grafisch mooi voor te stellen:

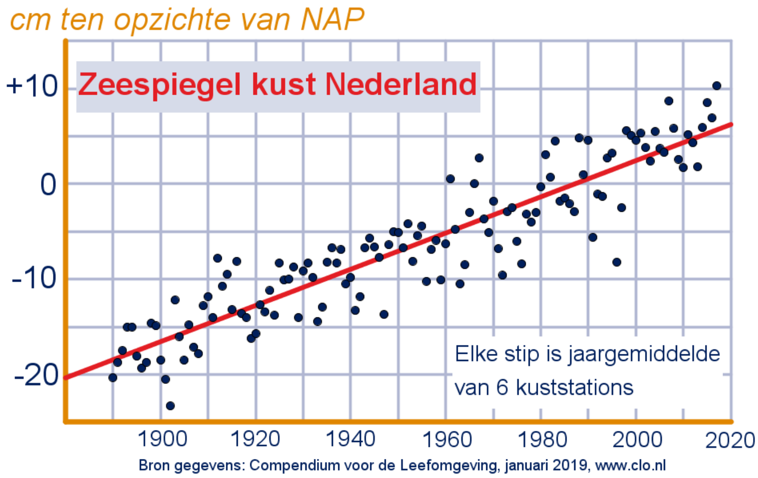


Op de horizontale as is met een pijltje een zeker verbruik aangegeven.

d Zoek uit hoe groot dat verbruik ongeveer is.

Trendlijnen

25 Klimaatverandering is een actueel onderwerp. Hierbij is o.a. van belang het niveau van de zeespiegel te blijven volgen. Door de stijging van de temperatuur op aarde is de zeespiegel voor de Nederlandse kust de afgelopen eeuw flink gestegen. Zie de figuur hieronder.



a Lees uit de figuur af met hoevel cm de zeespiegel aan de Nederlandse kust in de twintigste eeuw is gestegen.

8.2 Lineaire verbanden

In de figuur zien we een groot aantal losse meetpunten getekend. Zo'n verzameling van losse punten wordt ook wel een **puntenwolk** genoemd. Bij elk punt hoort een meting van de zeespiegelstand. In de puntenwolk wordt met een rechte lijn de stijgende tendens aangegeven: deze lijn noemen we de (lineaire) **trendlijn**. Dit is de 'best passende' lijn door de puntenwolk.

b Lees uit de figuur af in welk jaar de meting het meest afwijkt van de lineaire trend(lijn).

De getekende trendlijn geeft de richting aan waar de verandering van de zeespiegel naar toe gaat. Voor de veiligheid van Nederland, denk aan de kans op overstromingen, is het van belang om voorspellingen voor de toekomst te doen. Zodat vroeg genoeg de nodige voorbereidingen en aanpassingen gedaan kunnen worden.
Vaak wordt het jaar 2050 als richtlijn genomen.
Met behulp van een formule van de trendlijn kun je een voorspelling doen voor de hoogte van de zeespiegel in 2050.
Noem de hoogte van de zeespiegel Z (in cm, t.o.v. NAP) en de tijd in jaren t, met $t = 0$ het jaar 1900.

c Stel de formule op van deze trendlijn en geef een voorspelling van de hoogte van de zeespiegel voor 2050.
Kun je ook een marge aangeven?

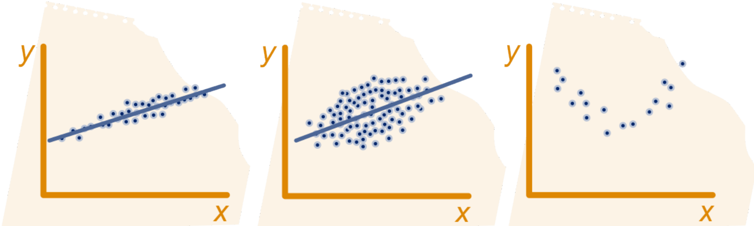
d Geef ook een formule voor de trendlijn voor Z als functie van het jaartal j.

Opmerking
Wiskundigen hebben een methode ontwikkeld om door een puntenwolk de formule van de *best passende* rechte lijn te berekenen: m.b.v. *lineaire regressie*. Wat het criterium is om de best passende lijn te vinden en hoe die dan berekend wordt, is voor ons niet van belang. Voor ons is het vaak voldoende om *op het oog* de best passende lijn door een puntenwolk te tekenen.

Een grafiek van losse (meet)punten kan een stijgend of dalend verloop laten zien. Bij zo'n verloop kijk je niet naar kleine schommelingen, maar naar het (globale) verloop van de grafiek over langere tijd. Wat we dan waarnemen noemen we een **trend**.

Een **lineaire trendlijn** is *de best passende* rechte lijn bij een puntenwolk. Een lineaire tredlijn wordt meestal gebruikt om een regelmatige stijging of daling, als die aanwezig is, weer te geven.
De formule van een lineaire trendlijn is van de vorm $y = at + b$.
De variabele t geeft meestal de tijd aan.
Met deze trendlijn kan men dan voorspellingen doen voor de

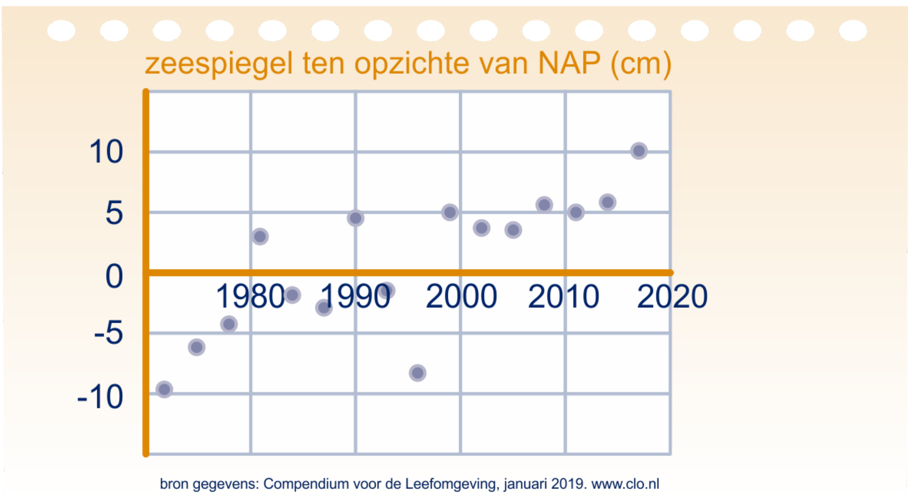
toekomst. Als de puntenwolk dicht op de trendlijn ligt, dan is de nauwkeurigheid van de voorspelling beter dan wanneer de puntenwolk erg 'breed' is. Zie de eerste twee figuren hieronder.



Soms is het ook duidelijk dat er niet sprake is van een lineaire trend, maar heeft de puntenwolk duidelijk een andere vorm en is een lineaire trendlijn niet geschikt om te gebruiken om uitspraken over de toekomst te doen. Zie hierboven de meest rechter figuur: duidelijk is dat daar geen lineaire trendlijn gebruikt kan worden.

26

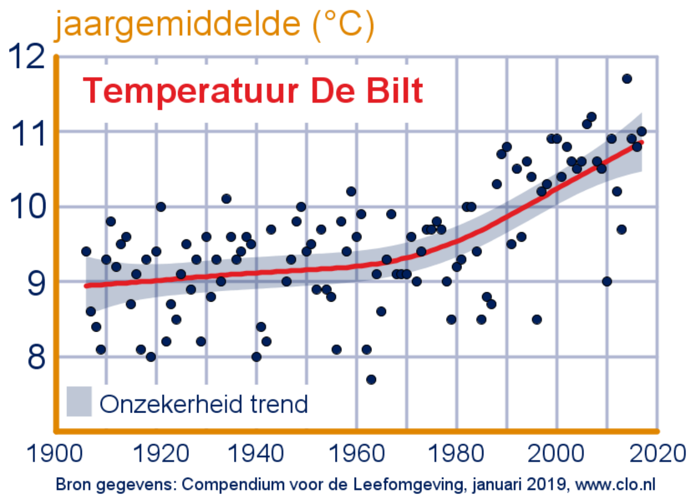
In de figuur hieronder zie je een puntenwolk van gegevens van de zeespiegel van de Nederlandse kust (in cm t.o.v. NAP) vanaf het jaar 1972, om de 3 jaar gemeten.



a Teken in de figuur op het werkblad zo goed mogelijk de lineaire trendlijn door deze puntenwolk.
b Stel een vergelijking op van jouw trendlijn. Neem de tijd t in jaren vanaf 1970.
c Vergelijk jouw trendlijn met die van een klasgenoot en bespreek met elkaar de mogelijke verschillen. Controleer de formules van elkaar.
d Geef met jouw trendlijn opnieuw een voorspelling voor het jaar 2050 en vergelijk je voorspelling met de voorspelling die je eerder gedaan hebt.

27

Verandering van de temperatuur in Nederland
In de figuur hieronder zie je de stijging van de gemiddelde jaartemperatuur in de loop van de tijd. De punten geven metingen weer. Op basis van metingen heeft men in de figuur een trendlijn getekend. Hier zien we dus een trendlijn die niet lineair is.



a Waarom geeft de kromme rode lijn de trend beter aan dan wanneer er een lineaire trendlijn was gebruikt?

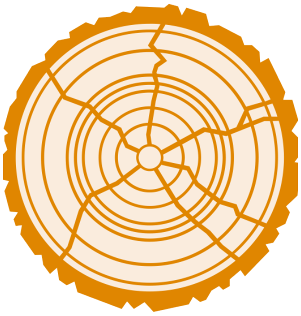
Je kunt het tweede deel van de trendkromme wel zien als een rechte lijn die begint bij het jaar 1980. Je kunt bij dit deel een lineaire formule maken in de vorm $T = a(j - 1980) + b$, met j het jaartal.

b Geef met behulp van de trendkromme de waarden van a en b en bereken met de formule een voorspelling van de gemiddelde jaartemperatuur in De Bilt in het jaar 2050.

In de laatste 40 jaar is de gemiddelde temperatuurstijging per jaar vele malen groter dan de gemiddelde temperatuurstijging in de eerste helft van de vorige eeuw.

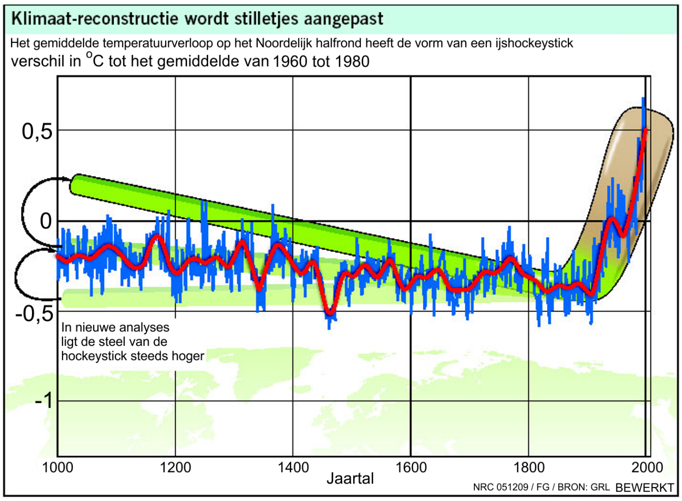
c Hoeveel keer zo groot?

Een trendbreuk is een fundamentele wijziging van een bestaande trend.



Trendbreuk en hockeystick

Wetenschappers hebben gekeken naar het verloop van de temperatuur op het noordelijk halfrond tijdens het laatste millennium (1000 - 2000). Omdat gestandaardiseerde metingen met een thermometer pas omstreeks 1850 begonnen, werden de temperatuur in voorgaande jaren en eeuwen geschat aan de hand van indirecte gegevens. Bijvoorbeeld aan de hand van boomringen, koralen, ijskernen en andere historische bronnen met een grote geografische spreiding.
Bij de grafiek die daarbij werd gemaakt door de onderzoekers (*Mann et al., 1999*), werd vanwege de vorm gesproken van de (ijs)hockeystick. Deze reconstructie van de gemiddelde temperatuur op het noordelijk halfrond wordt op dit moment als het meest representatief beschouwd.

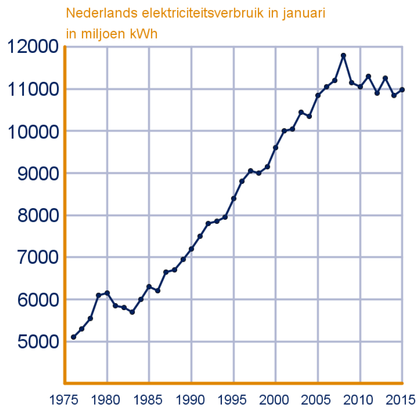


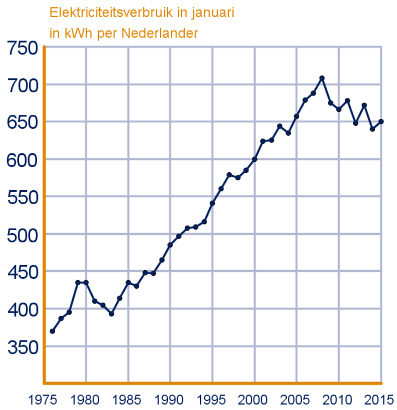
Hoe verder terug in de geschiedenis, hoe groter de onzekerheid over de juistheid van de schattingen. Daarom zijn er collega wetenschappers die kritiek hebben op de interpretatie van de meetresultaten van dit onderzoek. In de figuur zie je daarom dezelfde metingen, maar met een ijshockeystick waarvan de steel drie verschillende standen heeft.

28

Elektriciteitsverbruik

Uit de cijfers van het CBS blijkt duidelijk dat de Nederlandse bevolking de laatste jaren steeds zuiniger wordt met elektriciteit. Hieronder is het totale Nederlandse elektriciteitsverbruik in de maand januari weergegeven en in de tweede grafiek het elektriciteitsverbruik per Nederlander in dezelfde maand.





a Bereken de gemiddelde toename per jaar van het totale Nederlandse elektriciteitsverbruik in januari in de periode 1976-2015.

In 1976 was het verbruik per Nederlander 370 kWh. De stijgende trend sindsdien bereikte de grootste waarde van 708 kWh per Nederlander in 2008, waarna er een trendbreuk optrad. In januari 2015 was het verbruik per Nederlander weer gedaald tot 650 kWh.

b Bereken met hoeveel procent het aantal inwoners in Nederland in de periode 1976-2015 is toegenomen.

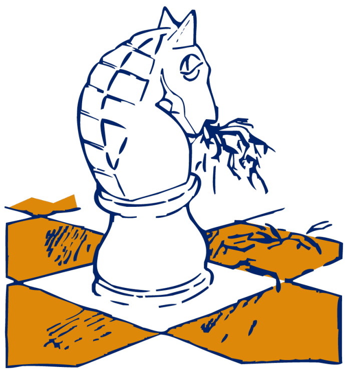
Men hoopte in die tijd dat de ingezette trend vanaf 2008 zich zo ook de jaren ernaa in dezelfde mate zal voortzetten.

c Bereken in welk jaar het verbruik in januari per Nederlander dan weer gedaald is tot het niveau van 1976.

Lineaire verbanden van de vorm ax + by = c

29 In de stal van Jan Pol worden de pony's precies zo gevoerd als het hoort. 's Winters wordt er hoofdzakelijk hooi en biks aan de dieren gegeven. De belangrijkste bestanddelen van dit voer zijn:

- koolhydraten (zetmeel en suiker), ruwvezel en vetten. Zij zorgen voor de energievoorziening.
- eiwitten. Die zijn van groot belang voor de vorming van spieren, hoeven, bloed, enzovoort.



Jasper is een pony, die bij Jan op stal staat. Volgens het boekje heeft die pony, als hij niet te intensief gebruikt wordt, per dag 2100 gram zetmeel en 360 gram eiwit nodig.
In 1 *kg hooi zit* 300 *gram zetmeel en* 60 *gram eiwit.*
In 1 *kg biks zit* 600 *gram zetmeel en* 80 *gram eiwit.*
Noem de hoeveelheid hooi x en de hoeveelheid biks y (beide in kg).

a Hoeveel gram zetmeel krijgt Jasper als hij per dag x kg hooi en y kg biks eet?
En hoeveel gram eiwit krijgt hij dan?

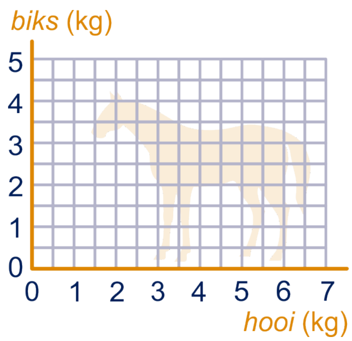
Jasper wordt zó gevoerd dat hij per dag precies 2100 gram zetmeel en 360 gram eiwit krijgt.
Hiermee kun je twee vergelijkingen met x en y opstellen.

b Stel deze twee vergelijkingen op en laat zien dat je ze kunt vereenvoudigen tot:
$x + 2y = 7$ en $3x + 4y = 18$.

c Teken in een rooster de grafiek van beide verbanden. Neem daarvoor de tabel en het assenstelsel over.

zetmeel	$x + 2y = 7$			
x	0		3	
y		0		3

eiwit	$3x + 4y = 18$			
x	0		3	
y		0		3



Om het juiste voederschema te bepalen, moeten we het snijpunt van de twee lijnen uitrekenen. Je kunt daarvoor beide formules omschrijven in de vorm $y = \ldots$ en ze dan aan elkaar gelijkstellen.

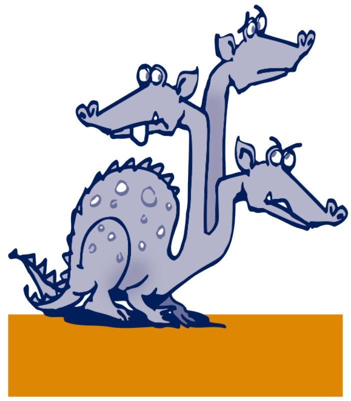
d Bereken op deze wijze het snijpunt. Gebruik breuken en rond niet tussendoor af.
Hoeveel hooi en biks moet Jasper dus krijgen?

Er is ook een handigere manier om het snijpunt uit te rekenen, namelijk zonder gebruik van breuken tussendoor.
De formule $x + 2y = 7$ kun je herschrijven tot $x = 7 - 2y$;
En dan kan je deze in de tweede formule op de plaats van de x invullen:
$3(7 - 2y) + 4y = 18$.

e Ga dat na en bereken op deze wijze y en daarna x.

30 Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen met vergelijking:

a $y = 3x - 2$ en $2y + x = 10$
b $2x + 4y = 11$ en $-4 + 5y = 4x$
c $-5x + 2y = 20$ en $\frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}y$
d $2x + 3y = 2$ en $6x - y = 1$
e $2x - 5y = 7$ en $-2x + 13y = 1$
f $3x - 2y = 16$ en $2x + y = 6$



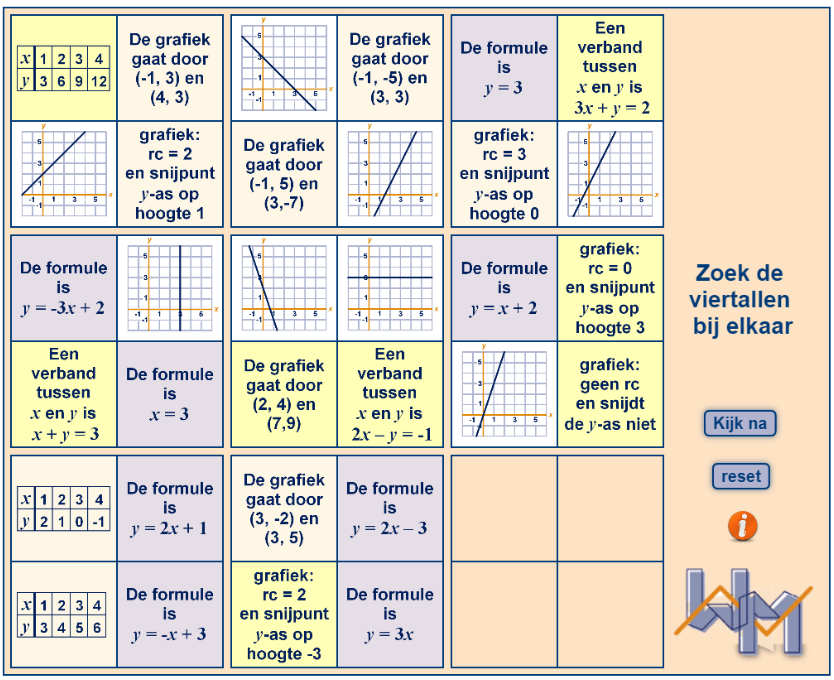
31 Er zijn in een reservaat twee soorten draken: rode en groene. Iedere rode draak heeft drie koppen en twee staarten. Iedere groene draak heeft vier koppen en drie staarten.
Alle draken samen hebben 111 koppen en 79 staarten.
Noem het aantal rode draken r en het aantal groene draken g.
Stel twee vergelijkingen op en bereken het aantal rode en groene draken in het reservaat.

Hint 2.

32 Vijf flessen cola en acht flessen sinas kosten samen 16,50 euro.
Vier flessen cola en twee flessen sinas kosten samen 7,70 euro.
Noem de prijs van een fles cola x en de prijs van een fles sinas y, beide in euro.
Stel een stelsel vergelijkingen op met x en y en bereken hoeveel tien flessen cola en zeven flessen sinas samen kosten.

Hint 3.

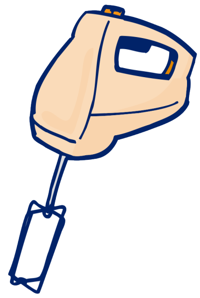
Opmerking
Je kunt nog meer oefenen met de formules, tabellen en grafieken van rechte lijnen met de applet 'kwartetten_rechte_lijnen'.



Evenredigheden

Over (recht) evenredige en omgekeerd evenredige verbanden heb je al wat geleerd in vwo-4. Dat gaan we eerst herhalen.

33 Om een pannenkoek van 100 gram te maken moet je bloem en melk gebruiken in de gewichtsverhouding $3 : 5$.
Anne gaat zes van deze pannenkoeken maken.



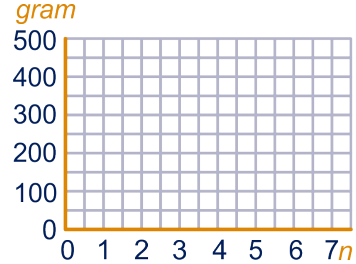
a Hoeveel bloem en hoeveel melk heeft ze daarvoor nodig?

Bekijk het nu algemener en noem het aantal pannenkoeken dat Anne gaat maken n.

b Druk de hoeveelheid bloem en de hoeveelheid melk die Anne voor n pannenkoeken nodig heeft uit in n.

c Maak een tabel en teken de grafiek.

n	1	2	3	4	6	*n*
hoeveelheid bloem (gr.)						
hoeveelheid melk (gr.)						



We noemen de hoeveelheid bloem b en de hoeveelheid melk m.

d Bereken m als $b = 360$.
Bereken ook b als $m = 360$.

e Geef een formule voor m als functie van b.

34 Hiernaast zie je alle euromunten.
De munten verschillen onderling, bijvoorbeeld de grootte van de munt. Alle munten zijn cirkelvormig. Hoe groter de munt, hoe groter de diameter, hoe groter de omtrek en hoe groter de oppervlakte.
Zie de tabel hieronder.

muntsoort in eurocenten	1	2	5	10	20	50	100	200
diameter in mm	16,25	18,75	21,25	19,75	22,25	24,25	23,25	25,75
omtrek in mm								

Je hebt in de onderbouw al geleerd: Omtrek cirkel $= 2 \cdot \pi \cdot r$, waarbij r de straal is (in mm) en π de constante pi, $\pi \approx 3{,}14159\ldots$.

Je kunt ook een formule maken voor de omtrek P, naar het Engelse *perimeter*, als functie van de diameter d (in diameter).

a Wat is die formule?

b Neem de tabel over en vul de lege plekken in. Rond de waarden af op 2 decimalen.

c Hoeveel keer zo groot is de diameter van de twee euromunt ten opzichte van de munt van 2 eurocent?
En hoeveel keer zo groot is de omtrek?
En hoe zit het met de diameters en de omtrekken van de één euromunt ten opzichte van de munt van 5 eurocent?

We vergelijken twee munten. Omdat de omtrek van beide munten π keer de diameter is, moet de verhouding tussen de omtrekken gelijk zijn aan de verhouding tussen de diameters:
$P_1 = \pi \cdot d_1$ en $P_2 = \pi \cdot d_2$, dan $\frac{P_1}{P_2} = \frac{\pi \cdot d_1}{\pi \cdot d_2} = \frac{d_1}{d_2}$

Toch heb je zojuist (zeer waarschijnlijk) niet precies dezelfde verhouding gevonden.

d Leg uit hoe dat kan.

De variabele y is **evenredig** met de variabele x betekent:

- Als x k keer zo groot wordt, dan wordt y ook k keer zo groot, voor elk getal k
- De grafiek is een rechte lijn door de oorsprong $O(0,0)$
- De bijbehorende formule is van de vorm $y = c \cdot x$;
  De constante c heet de **evenredigheidsconstante**.
  (Maar eigenlijk is het gewoon de *richtingscoëfficiënt* van de lijn.)

y is evenredig met x noteren we met: $y \sim x$.
In plaats van evenredig wordt ook de term **recht evenredig** gebruikt.

De status van een vrouw in een mannengezelschap neemt recht evenredig toe met haar kennis van en interesse in voetbal.
stelling proefschrift
N. Tellegen, Amsterdam

35 Een oud probleem over het getal π vind je terug op de website van de wiskundemeisjes (www.wiskundemeisjes.nl).

a *Er zit een touw strak om de aarde, zoals een ring om een vinger. Het is een heel lang touw van meer dan 40.000 kilometer. Nu knip je het touw door en doe je er één meter extra touw tussen. Dan til je het touw overal een beetje op, zodat het op elke plek even ver van het aardoppervlak is.*
Hoeveel ruimte is er nu tussen het touw en de aarde? Ongeveer zoveel als een elektron? Een bacterie? Een krant? Een kat? Een olifant?

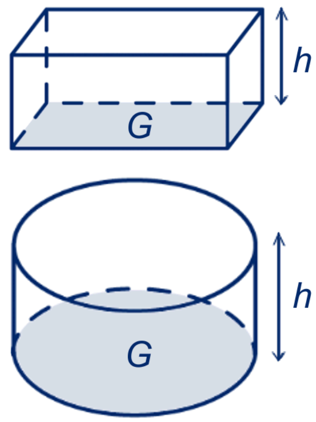
Hint 4.

Een eurocent met een diameter van 16,25 mm is de kleinste euromunt. In plaats van de aarde bij het touwprobleem nemen we deze kleinste euromunt: we nemen een passend touwtje om de euromunt maken we een meter groter en leggen die dan - met overal even grote afstand - om de euromunt heen.

b Hoeveel ruimte is er nu overal tussen het touwtje en de munt?

36

We kijken nu naar het volume (of inhoud) van de euromunten. Een munt heeft de vorm van een *cilinder* van zeer kleine hoogte. De inhoud van een cilinder bereken je, net als bij een balk, door de oppervlakte G van het grondvlak te vermenigvuldigen met de hoogte h.



De eerste drie euromunten zijn van hetzelfde materiaal gemaakt en hebben allemaal een dikte van $1{,}67$ mm.
Noem het volume van een euromunt V.

a Geef voor de eerste drie euromunten een formule voor het evenredige verband tussen V en G. Wat is de evenredigheidsconstante?

De oppervlakte van een cirkel kun je op de volgende manieren berekenen:

- *De oppervlakte van een cirkel is pi maal de straal in het kwadraat;*
- *De oppervlakte van een cirkel is pi maal de halve diameter in het kwadraat.*

De straal noemen we r en de diameter d.

b Schrijf bovenstaande zinnen op in formulevorm. Laat π in de formules staan en schrijf de formules zo eenvoudig mogelijk (zonder haakjes).

c Bereken de getallen op de plaats van de lege plekken in onderstaande tabel. Rond de getallen af op 2 decimalen.

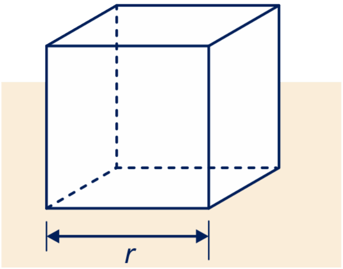
muntsoort in eurocenten	1	2	5	10	20	50
diameter in mm	16,25	18,75	21,25	19,75	22,25	24,25
gewicht in grammen	2,30	3,06	3,92	4,10	5,74	7,80
volume in mm³				591,26	832,08	1099,23

d Laat zien dat er bij de eerste drie euromunten een evenredig verband is tussen het gewicht en het volume. Bereken de evenredigheidsconstante afgerond op 4 decimalen.

De munten van 10, 20 en 50 cent zijn van hetzelfde materiaal gemaakt, maar van ander materiaal dan de eerste drie euromunten. In de tabel hierboven is het volume en het gewicht van deze munten weergegeven.

e Onderzoek of er bij deze drie munten ook sprake is van een evenredig verband tussen gewicht en volume. Zo ja: bereken de evenredigheidsconstante afgerond op 4 decimalen. Zo nee, geef een verklaring.

37 De ribbe van een kubus noemen we r.
De totale oppervlakte (van de zes grensvlakken) van de kubus noemen we O en de inhoud V.



a Druk V en O uit in r.
b Laat zien dat $O^3 = 216 \cdot V^2$

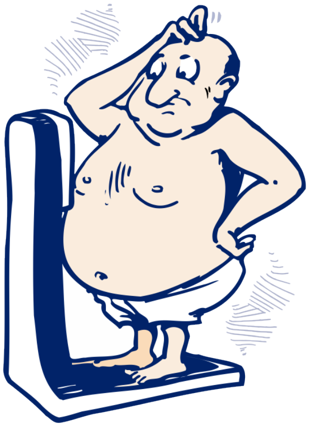
Hint 5.

Neem aan: $V = 5$.
c Bereken O in drie decimalen nauwkeurig.
d Laat zien dat $O = 6 \cdot V^{\frac{2}{3}}$ $(= 6\sqrt[3]{V^2})$.

Er zijn ook evenredigheden zonder dat er sprake is van een lineair verband tussen de grootheden.

- In opgave 37 zagen we dat $O^3 = 216 \cdot V^2$.
  We zeggen dan:
  O^3 is **evenredig** met V^2, met evenredigheidsconstante 216.
  Ofwel: $O^3 \sim V^2$.
- Maar ook zagen we: $O = 6 \cdot V^{\frac{2}{3}}$.
  We zeggen dan:
  O is **evenredig** met $V^{\frac{2}{3}}$, met evenredigheidsconstante 6.
  Ofwel: $O \sim V^{\frac{2}{3}}$.

38 Bij dieren bestaat er een soortgelijk verband (zie opgave 37) tussen de oppervlakte en het volume: We kijken dan naar de huidoppervlakte H (in dm^2) en het lichaamsgewicht G (in kg).
Er geldt: $H = c \cdot \sqrt[3]{G^2}$.
Hierbij hangt de evenredigheidsconstante c af van de diersoort. De constante c is naar de Duitse bioloog Meeh, de Meeh-coëfficiënt genoemd, omdat hij hierover voor het eerst publiceerde in de jaren 1879 en 1894. Omdat men in die tijd nog niet over geavanceerde meetmethoden beschikte, verrichtte Meeh bij 16 mensen huidoppervlakte-metingen door de huid stukje voor stukje met millimeterpapier te bedekken. Zo vond hij voor de mens: $c = 11{,}2$.



a Bereken jouw huidoppervlakte met de formule van Meeh.
b Laat zien dat uit $H = 11{,}2 \cdot \sqrt[3]{G^2}$ volgt:
$G^2 = 0{,}0007H^3$.
c Druk G uit in H. Schrijf het resultaat in de vorm:
$G = c \cdot \sqrt{H^3}$, met c in drie decimalen nauwkeurig.

39 Er draaien negen planeten om de zon (Pluto tellen wij als 'dwergplaneet' gewoon mee). Onze aarde doet 1 jaar over één omloop. Mercurius en Venus doen korter over een rondje, de andere planeten doen er langer over. Algemeen: hoe verder een planeet van de zon staat, des te langer is zijn omlooptijd. Aan de astronoom Johannes Kepler (1571-1630) danken we de volgende formule:

$T = 0{,}2 \cdot R^{1\frac{1}{2}}$. Hierin is R de afstand tot de zon in miljoenen km en is T de omlooptijd in dagen.

De aarde is (gemiddeld) 149,5 miljoen km van de zon verwijderd.

a Bereken hiermee de omlooptijd. Klopt het redelijk?

Saturnus is veel verder van de zon verwijderd dan de aarde: 1427 miljoen km.

b Bereken de omlooptijd van Saturnus in jaren.

T^2 is evenredig met R^3.

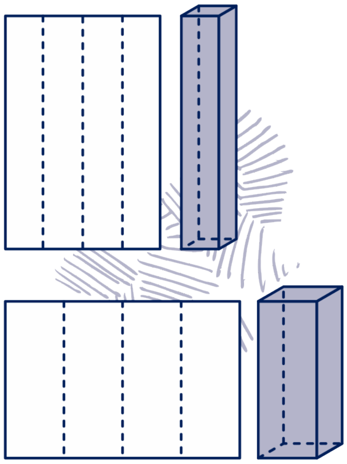
c Hoe groot is de evenredigheidsconstante?

Omgekeerd evenredig

40 Uit het boek "rekenen is leuker dan (als) je denkt" van Marjolein Kool en Ed de Moor:

Neem twee velletjes van 20 bij 30 centimeter, vouw elk velletje in vieren en vorm daarvan een vierkante koker. Maar let op: de ene koker maakt u door het blaadje in de lengte te vouwen, de ander door het blad in de breedte te nemen. Plak de koker vast met wat plakband. U heeft nu twee kokertjes, allebei gevormd uit hetzelfde hoeveelheid verpakkingsmateriaal.

Zie de figuur.



a Welk kokertje heeft de grootste inhoud? Maak een keuze zonder nog te gaan rekenen.

b Bereken van beide koker de inhouden. Was je gevoel juist?

Voor beide kokers is evenveel verpakkingsmateriaal gebruikt. De inhouden verschillen echter vrij veel.

c Hoe groot is het verschil tussen de inhouden?
Hoeveel keer zo groot is de inhoud van de grootste ten opzichte van de kleinste? Had je dat verwacht als je naar de figuur kijkt?

Als we de kokers dicht maken, met een bodem en een deksel, dan is de hoeveelheid verpakkingsmateriaal *niet* helemaal gelijk.

d Hoe verhouden zich dan de hoeveelheid gebruikt materiaal?

De vorm van een verpakking maakt dus wel degelijk uit: met dezelfde hoeveelheid verpakkingsmateriaal kun je verpakkingen maken met verschillende inhouden. Om hierover na te denken, is niet geheel onbelangrijk in het kader van duurzaamheid.
In de volgende opgaven draaien we het om: bij een vaste inhoud, willen we de afmetingen van de verpakking berekenen waarbij er zo weinig mogelijk verpakkingsmateriaal gebruikt wordt.

41 We gaan uit van een (balkvormig) doosje met een inhoud van 400 cm^3.
Omdat de inhoud gelijk is aan hoogte maal oppervlakte geldt: $400 = h \cdot G$.

a Wat gebeurt er met de vorm van het doosje als de hoogte afneemt? Wat gebeurt er met de vorm als de grootte van het grondvlak afneemt?

b Neem de tabel over en vul de tweede rij van de tabel in.

hoogte h in cm	2	4	6	8	10
oppervlakte bodem G in cm²					

c Wat gebeurt er met de oppervlakte van de bodem als de hoogte wordt gehalveerd?

De formule $400 = h \cdot G$ schijven we in de vorm $h = \frac{400}{G}$.

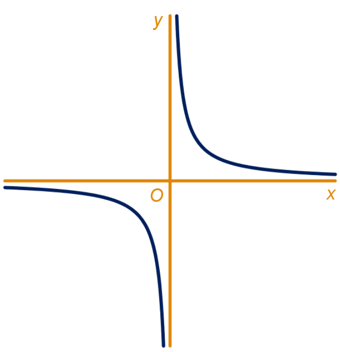
d Teken (met behulp van je GR) de grafiek van h als functie van G (dus h verticaal en G horizontaal).
Welke naam heeft deze grafiek?

e Als je de oppervlakte van de bodem onbeperkt laat toenemen, snijdt de grafiek dan de horizontale as?

f Als je de hoogte van het doosje onbeperkt laat toenemen, snijdt de grafiek dan de verticale as?

De variabele y is **omgekeerd evenredig** met de variabele x betekent:

- Als x k keer zo groot wordt, dan wordt y k keer zo klein, voor elk getal k (en andersom)
- De grafiek is een hyperbool, of een deel van een hyperbool
- De bijbehorende formule is van de vorm $y = \frac{c}{x}$
  De constante c heet de **evenredigheidsconstante**.
- De formule kun je herschrijven tot $x \cdot y = c$
- $y \sim \frac{1}{x}$, want je kunt schrijven $y = c \cdot \frac{1}{x}$
  (in woorden: y is evenredig met 'het omgekeerde van x')



42

We bekijken nu balkvormige verpakkingen waarvan de bodem een vierkant is en de inhoud nog steeds 400 cm^3.
Er geldt $h = \frac{400}{G}$.
Dus: de hoogte en de oppervlakte van de bodem van het doosje zijn **omgekeerd evenredig**.

a Neem de tabel over en vul het verder in.

breedte vierkante bodem in cm	3	4	6	7	8	10
oppervlakte vierkante bodem G in cm²						
hoogte h						
oppervlakte opstaande rechthoek						
totale oppervlakte verpakkingsmateriaal						

b Zie je in de tabel meer omgekeerde evenredigheden? Zo ja, geef ook een formule.

We noemen de breedte van de vierkante bodem van het doosje x. Dan geldt voor de hoogte van het doosje:
$h = \frac{400}{x^2}$.

c Leg dat uit.

De vier opstaande rechthoekige grensvlakken van het doosje zijn alle vier even groot. Voor de oppervlakte A van een opstaande rechthoek van het doosje geldt:
$A = x \cdot \frac{400}{x^2}$.

d Laat zien dat de oppervlakte A omgekeerd evenredig is met de breedte van de bodem x.

De *totale* oppervlakte T van het doosje kun je berekenen met de formule:
$T = 2x^2 + \frac{1600}{x}$.

e Leg dat uit.

Uit de tabel blijkt dat de totale oppervlakte het kleinst is voor x in de buurt van 7.

f Zoek met je GR uit voor welke waarde van x dit het geval is.
Rond je antwoord af op 2 decimalen.
Hoe hoog is het doosje dan? En wat valt je op?

Hint 6.

8.3 Evenredigheden

Evenredigheden herkennen in een tabel

Bij een evenredig verband geldt $y = c \cdot x$ voor een of andere constante c, dus $\frac{y}{x} = c$.
Dit kun je goed gebruiken om in een tabel te zien of er sprake is van een evenredig verband: je voegt een rij toe waarbij je telkens de waarde van y deelt door de bijbehorende waarde van x en kijkt of er telkens (ongeveer) hetzelfde uitkomt.

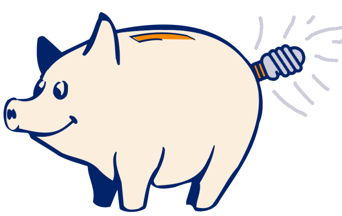
Voorbeeld
Een bedrijf produceert magnetische stickers, die gebruikt worden bij planborden. De prijs hangt af van de oppervlakte.

Oppervlakte (A) cm^2	25	40	60	75	80
Prijs per stuk (p) €	0,15	0,24	0,36	0,45	0,48
p/A	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006

Je ziet nu direct dat de prijs evenredig is met de oppervlakte, want de quotiënten $\frac{p}{A}$ zijn telkens gelijk.
Je hebt ook meteen de formule en de evenredigheidsconstante gevonden: $\frac{p}{A} = 0{,}006$, ofwel $p = 0{,}006A$.

Bij een omgekeerd evenredig verband geldt iets soortgelijks:
$y = \frac{c}{x}$ voor een of andere constante c, dus $x \cdot y = c$.
Om te onderzoeken of er in een tabel sprake is van een omgekeerd evenredig verband, voeg je een rij toe waarbij je telkens het product neemt van x en y en kijkt of er telkens (ongeveer) hetzelfde uitkomt.

Voorbeeld
Lampen verbruiken energie, die afgerekend wordt per killowattuur (kWh). Bij spaarlampen met verschillende vermogen (wattage) is onderzocht hoe lang ze kunnen branden op één kWh.



Vermogen (P) Watt	1,5	5	7	11	15
Branduren (t) uur	665	202	143	90	67
$P \cdot t$	997,5	1010	1001	990	1005

Je ziet nu direct dat de tijdsduur bij benadering omgekeerd evenredig is met het vermogen, want de producten $P \cdot t$ zijn telkens ongeveer gelijk aan 1000.
Je hebt ook meteen de formule en de evenredigheidsconstante gevonden: $P \cdot t = 1000$, ofwel $t = \frac{1000}{P}$.

Voorbeeld
Maar soms is in de tabel niet het verband tussen x en y weergegeven, zoals in de tabel hieronder.

x	1	2	4	5	8
y^2	16	8	4	3,2	2
$x \cdot y^2$	16	16	16	16	16

Je ziet dat y^2 omgekeerd evenredig is met x.
Er geldt $y^2 = \frac{16}{x}$ dus $y = \sqrt{\frac{16}{x}} = \frac{4}{\sqrt{x}}$ of $y = 4 \cdot x^{-0,5}$.

43

Hieronder staan een aantal tabellen.
Onderzoek telkens of er sprake is van een evenredig verband, omgekeerd evenredig verband, lineair verband of exponentieel verband tussen de twee rijen in de tabel.
Geef telkens een formule voor y als functie van x.

A

x	0	1	2	3
y	1,6	4	10	25

B

x	2	3	4	6
y	7,50	5,00	3,75	2,50

C

x	1	3	6	10
y	23	19	13	5

D

x	5	10	15	20
y	4	8	12	16

E

x	1	2	3	6
y	9	4,5	3	1,5

F

x	1	4	6	10
y	8,5	13	16	22

G

x	0	1	2	3
y	24	36	54	81

H

x	2	3	4	6
$\sqrt{y}$	6	4	3	2

I

x^2	2	4	6	8
$1/y$	3	6	9	12

J

x	2	3	4	5
y^2	36	72	144	288

K

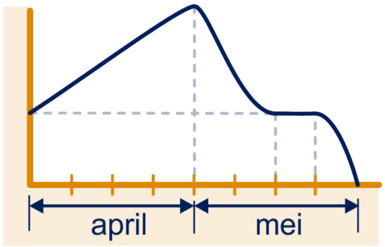
x	0	1	2	3
$1/y$	20	10	5	2,5

L

x^2	2	10	15	20
y^3	1,2	6	9	12

Globale grafieken

Jan overlegt telefonisch met zijn vriendin Saskia over het huiswerk economie.
Jan: “Het aandeel "Fried Air" is in april constant gestegen, maar het verloor in de eerste week van mei vrijwel de hele winst van april. In de tweede en derde week van mei bleef het aandeel stabiel. In de laatste week van mei daalde het aandeel steeds sterker en eind mei was het bijna niets meer waard.”



Om het verhaal van Jan te kunnen volgen, schetst Saskia snel een **globale grafiek**: dat is een grafiek waarin je in een oogopslag het verloop kunt zien, zonder dat je de precieze waarden kent. Op de verticale as (en vaak ook op de horizontale as) staan meestal geen getallen. Het gaat niet om de details, maar alleen over het *globale verloop* van de grafiek.
Zie figuur.

44 Teken een globale grafiek bij elk van de volgende situaties.

- De werkgelegenheid klimt langzaam uit het dal.
- De groei van de Duitse economie neemt af.
- De ijskappen van Groenland en Antarctica smelten in steeds hoger tempo.
- De snelste stijging van het Rijnwater is voorbij.

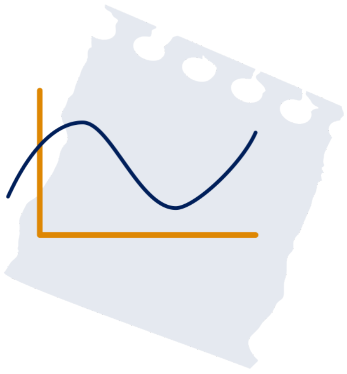
45 We onderscheiden zes manieren waarop een grafiek zich kan ontwikkelen:

- Constante stijging
- Constante daling
- Afnemende stijging
- Afnemende daling
- Toenemende stijging
- Toenemende daling

a Schets bij elk van deze vormen van verandering een globale grafiek.

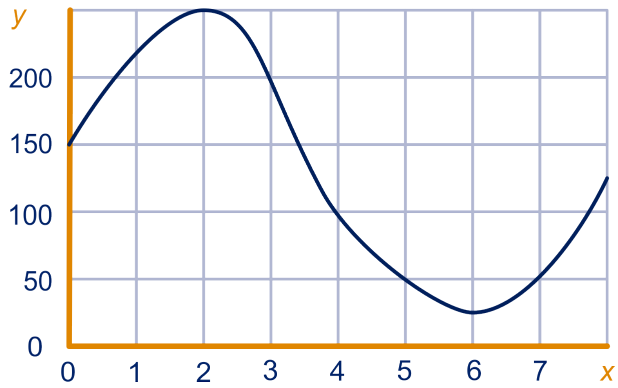
De grafiek hiernaast staat ook op het werkblad.

b Geef nauwkeurig de stukken aan met:
constante stijging, afnemende stijging, toenemende stijging, constante daling, afnemende daling en toenemende daling.



46

Hieronder staat een grafiek.

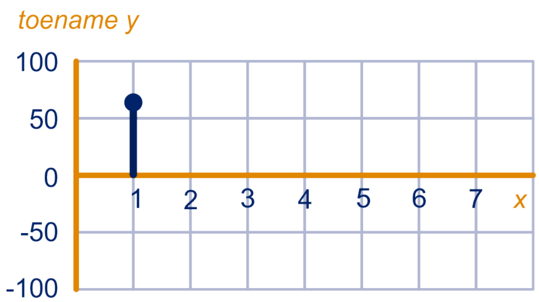


Je kunt uit de grafiek de toename van de kosten aflezen als x toeneemt van 0 tot 1, van 1 tot 2, van 2 tot 3, enzovoort.
Let op: een afname is ook een toename, maar een *negatieve* toename.

a Lees de opeenvolgende toenames zo goed mogelijk af en zet ze in een tabel.

van ... tot ...	0 - 1	1 - 2	2 - 3	3 - 4	4 - 5	5 - 6	6 - 7	7 - 8
toename								

Om toenames duidelijk in beeld te krijgen, kun je een **toenamediagram** maken. Als x toeneemt van 0 tot 1, neemt y toe met 65. Die toename geef je aan met een verticale streep (of *knopspeld*) bij $x = 1$. Hieronder is een begin gemaakt met het maken van het toenamediagram. Deze figuur staat ook op het werkblad.



b Maak het toenamediagram op het werkblad af.

c Leg uit hoe je in dit (of elk ander) toenamediagram afnemende stijging kunt herkennen.

d Leg uit hoe je in dit toenamediagram afnemende daling kunt herkennen.

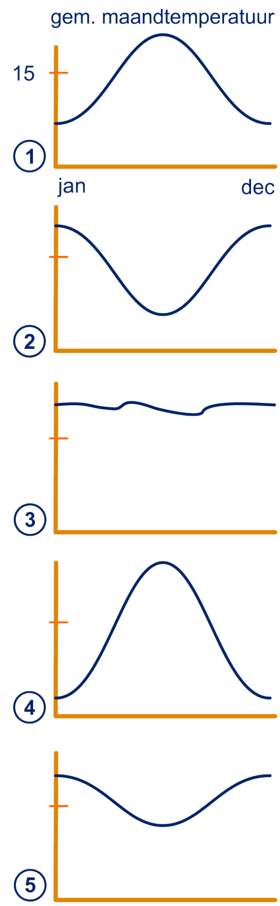
e Dezelfde vraag voor toenemende daling en toenemende stijging.

47

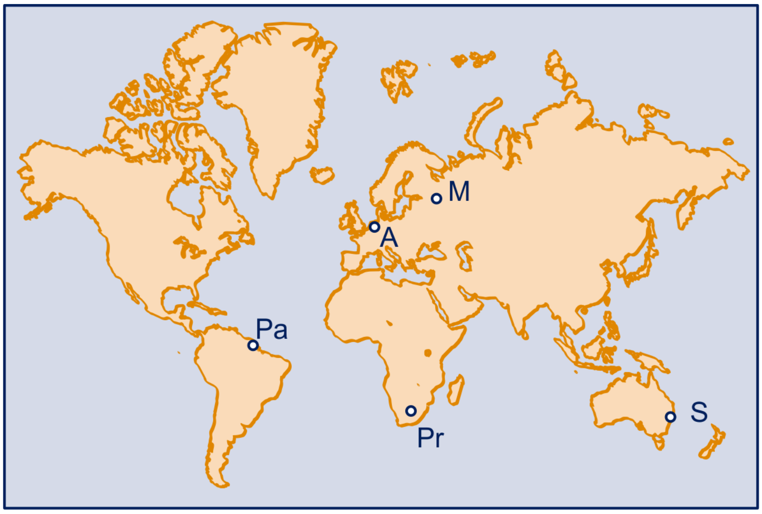
Hiernaast staan de globale grafieken van het temperatuurverloop in vijf steden gedurende een jaar. Horizontaal is het kalenderjaar uitgezet, verticaal de gemiddelde maandtemperatuur.

a Van welke van de vijf grafieken weet je zeker dat ze bij een stad horen die op het noordelijk halfrond ligt?

b Welke grafiek hoort bij de stad die het dichtst bij de evenaar ligt?



De vijf steden zijn: Amsterdam, Sydney, Paramaribo, Pretoria en Moskou.

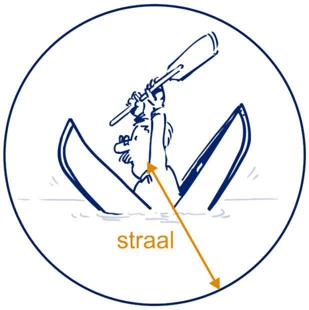


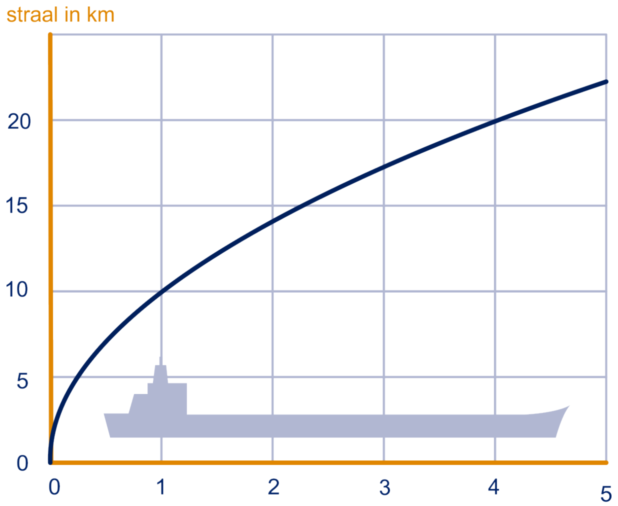
c Welke grafiek hoort bij welke stad?

Toenamediagrammen

48

Na een aanvaring zinkt een grote olietanker op 20 km van de kust. Er dreigt een grote milieuramp want het schip verliest een enorme hoeveelheid olie. Het lukt niet om het gat in het schip te dichten, dus vormt de olie een steeds groter wordende (ronde) vlek. De grootte van de olievlek wordt door deskundigen nauwlettend in de gaten gehouden. De resultaten daarvan zie je in de grafiek.





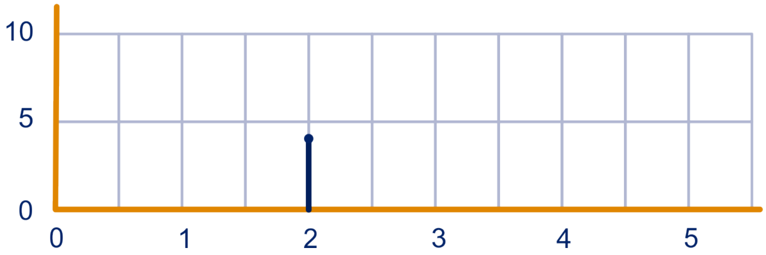
a Hoe noem je het type groei van de straal van de olievlek? Zie opgave 44 voor de zes typen.

Het is moeilijk aan de hand van deze grafiek te voorspellen hoe groot de olievlek is na 10 dagen.
Om enig inzicht te krijgen in de omvang van de olievlek, gaan we kijken naar de groei van de straal van de vlek per dag.

b Maak een tabel van de toename van de straal per dag, zoals hieronder:

dag	eerste	tweede	derde	vierde	vijfde
toename straal (in km)		4			

De groei van de straal van de vlek kunnen we aangeven in een **toenamediagram** zoals hieronder.



Bij “2” op de horizontale as zetten we hoeveel km de straal is toegenomen gedurende de tweede dag. Dat is door de stip aangegeven.

c Maak het toenamediagram op het werkblad af.

Het toenamediagram helpt ons ook niet veel bij het voorspellen van de grootte van de olievlek na 10 dagen. Misschien worden we wat wijzer als we in plaats van naar de straal van de olievlek naar de oppervlakte van de olievlek gaan kijken. We gaan er vanuit dat de vlek cirkelvormig is.

Hint 7.

d Neem de tabel over en vul de derde en vierde rij in.

dag	eerste	tweede	derde	vierde	vijfde
straal (in km)	10,00	14,14	17,32	20,00	22,36
opp. (in km^2)					
toename opp. (in km^2)					

e Hoe ziet het toenamediagram van de oppervlakte van de olievlek eruit?

f Wat zal de oppervlakte van de olievlek zijn na 10 dagen?

g Hoe groot zal de straal van de olievlek dus zijn na 10 dagen?

h Vind je het logisch dat de oppervlakte van de olievlek (min of meer) constant toeneemt?

49 Gegeven is de formule $y = x^2$.

a Vul de volgende tabel verder in:

x	0	1	2	3	4	5
y	0	1	4			
toename y		1				

b Teken het bijbehorende toenamediagram.

c Wat valt je op aan dit toenamediagram?

50 Gegeven is de formule $y = 3x - 7$.

a Vul de volgende tabel verder in:

x	0	1	2	3	4	5
y	-7	-4				
toename y		3				

b Teken het bijbehorende toenamediagram.

c Wat valt je op aan dit toenamediagram?

51

Gegeven is de formule $y = 4 - x^2$.

a Vul de volgende tabel verder in:

x	-2	-1	0	1	2	3
y						
toename y						

b Teken het bijbehorende toenamediagram.

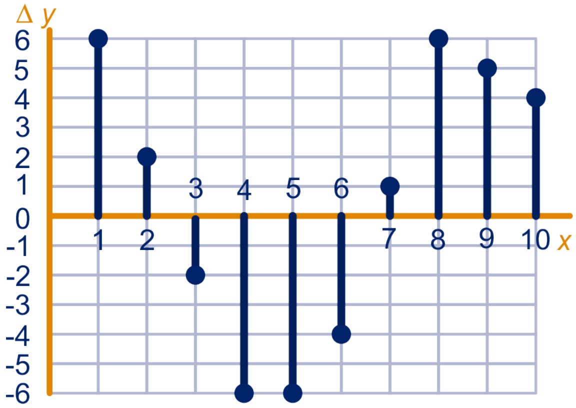
c Wat valt je op aan dit toenamediagram?

Opmerking

In plaats van telkens 'toename van y' te schrijven, wordt ook hier vaak de notatie Δy gebruikt. Evenzo wordt met Δx bedoeld 'toename van x'.

52

Hieronder staat het toenamediagram van een of andere grafiek. De grafiek begint in het punt $(0,2)$.



a Maak een schets van de bijbehorende grafiek.

Als je het goed hebt gedaan, dan heeft jouw grafiek een hoogste punt en een laagste punt. Zo'n hoogste punt noemen we een **maximum** en zo'n laagste punt heet een **minimum**.

b Bij welke waarde van x heeft de grafiek een maximum?

c En bij welke waarde van x heeft de grafiek een minimum?

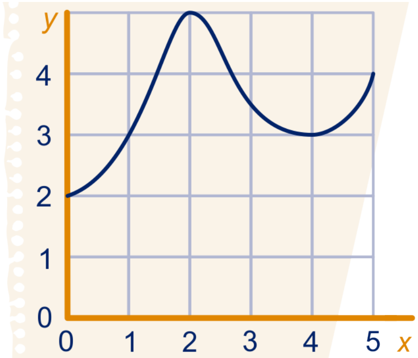
53

a Maak bij de onderstaande grafiek een toenamediagram met $\Delta x = \frac{1}{2}$.

In de grafiek zie je dat de functie maximaal is als $x = 2$. Dit kun je ook aflezen uit het toenamediagram.

b Hoe kun je in het algemeen uit een toenamediagram aflezen bij welke x de functie ongeveer maximaal is?

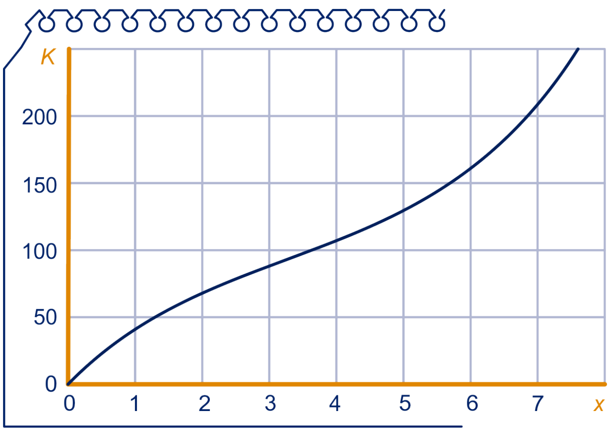
c Waarom kun je niet precies uit een toenamediagram aflezen bij welke x het maximum van de functie ligt?



d De grafiek heeft ook een minimum. Hoe kun je dit terugzien in het toenamediagram?

54

De formule $K = x^3 - 10x^2 + 50x$ geeft de kosten K (in euro's) als er x stuks van een product gemaakt worden. Het verloop van de grafiek zie je hieronder.



a Bekijk de grafiek goed en kies telkens het juiste van de twee cursieve woorden.
Er is eerst sprake van *toenemende/afnemende stijging* en vervolgens van *toenemende/afnemende stijging*.

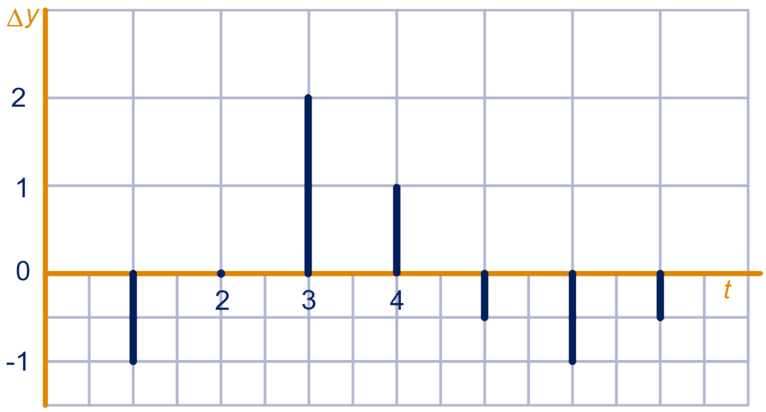
b Bereken met de formule hoeveel de kosten toenemen, als de productie toeneemt van 0 naar 1 stuks, en van 1 naar 2 stuks. Controleer je antwoorden in de grafiek.

c Bereken ook de overige toenames. Schrijf je antwoorden in een tabel:

van ... tot ...	0 - 1	1 - 2	2 - 3	3 - 4	4 - 5	5 - 6	6 - 7	7 - 8
toename	41							

Maak ook een toenamediagram bij deze grafiek.

55 Getekend is het toenamediagram van een variabele y.



Verder is op tijdstip $t = 4$ gegeven dat $y = 5$.

a Hoe groot is y als $t = 7$?

b Bepaal ook hoe groot y is als $t = 0$.

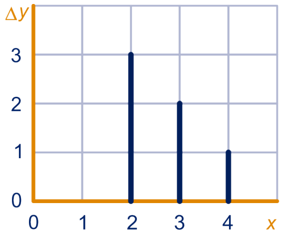
c Schets een grafiek die past bij het toenamediagram.

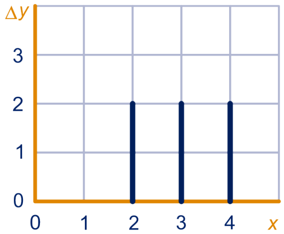
56 In een assenstelsel is een grafiek getekend (met x op de horizontale as en y op de verticale as). Van de grafiek zijn twee punten gegeven: $(1,1)$ en $(4,7)$.

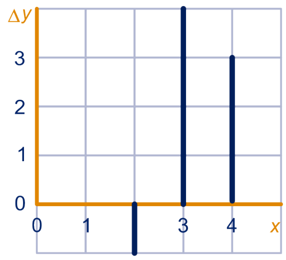
a Bereken $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ op het x-interval $1 \leq x \leq 4$, dat wil zeggen dat het beginpunt bij $x = 1$ en het eindpunt bij $x = 4$ ligt.

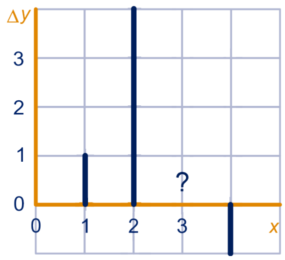
Op grond hiervan zijn er nog allerlei grafieken mogelijk.

b Leg uit dat van onderstaande toenamediagrammen de linker drie mogelijk zijn bij de situatie die hierboven beschreven is.









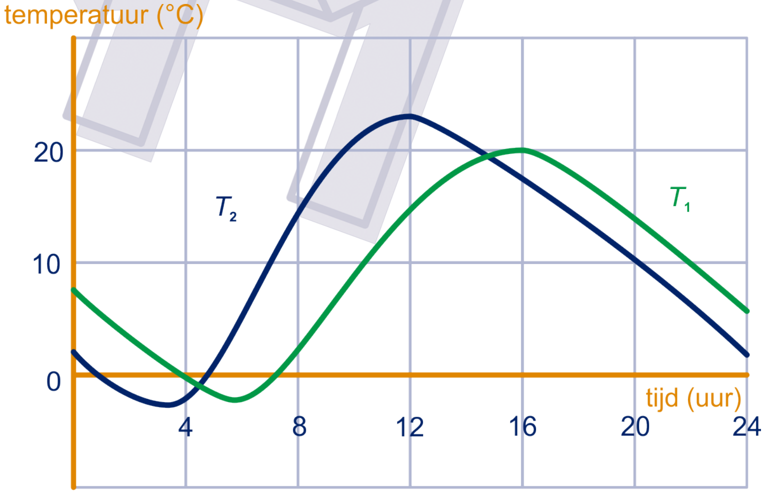
c Schets bij elk van de drie linker toenamediagrammen een mogelijke grafiek.

Bij het vierde toenamediagram ontbreekt het staafje bij $x = 3$.

d Bereken de lengte van dit ontbrekende staafje.

Gemiddelde toename

57 Hieronder zijn twee temperatuurverlopen in beeld gebracht: T_1 en T_2.



a Welk van de twee varieert het meest, T_1 of T_2?

De temperatuur T_2 stijgt tussen 5 en 10 uur vrijwel gelijkmatig.

b Met hoeveel graden Celsius per uur?

De temperatuur T_2 daalt tussen 14 en 24 uur vrijwel gelijkmatig. De stijging per uur is nu negatief.

c Hoeveel graden Celsius bedraagt de stijging per uur?

T_2 stijgt tussen 8 en 12 uur niet gelijkmatig. Op het eind van die periode is de stijging veel minder dan in het begin.

d Hoeveel graden Celsius bedraagt dan de *gemiddelde* stijging van T_2 per uur?

Over de periode van 0 tot 16 uur bekeken, daalde T_2 aanvankelijk, om vervolgens flink te stijgen en dan weer te dalen. In totaal is de temperatuur toegenomen.

e Met hoeveel graden Celsius gemiddeld per uur?

T_1 en T_2 zijn de temperaturen van de lucht en van de grond op een zelfde dag in mei.

f Leg uit: wat is de luchttemperatuur, T_1 of T_2?

58

Hieronder staat de grafiek van de goudprijs tussen 9 augustus 2010 en 8 augustus 2011. Met name in de laatste dagen is de goudprijs snel gestegen; dat kwam door de onrust op de financiële markten. Voorbeeld: op 14 februari 2011 bedroeg de goudprijs 1365 dollar per ounce.

De goudprijs wordt elke werkdag aangepast (op zaterdag en zondag ligt de handel stil).

De grafiek verloopt erg schokkerig.

a Hoeveel “schokjes” zijn er ongeveer in de grafiek?

Stel je had voor 100 dollar goud gekocht op 9 augustus 2010 en je verkoopt het weer op 8 augustus 2011.

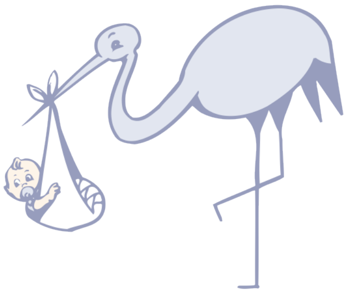
b Hoeveel winst zou je dan hebben gemaakt?

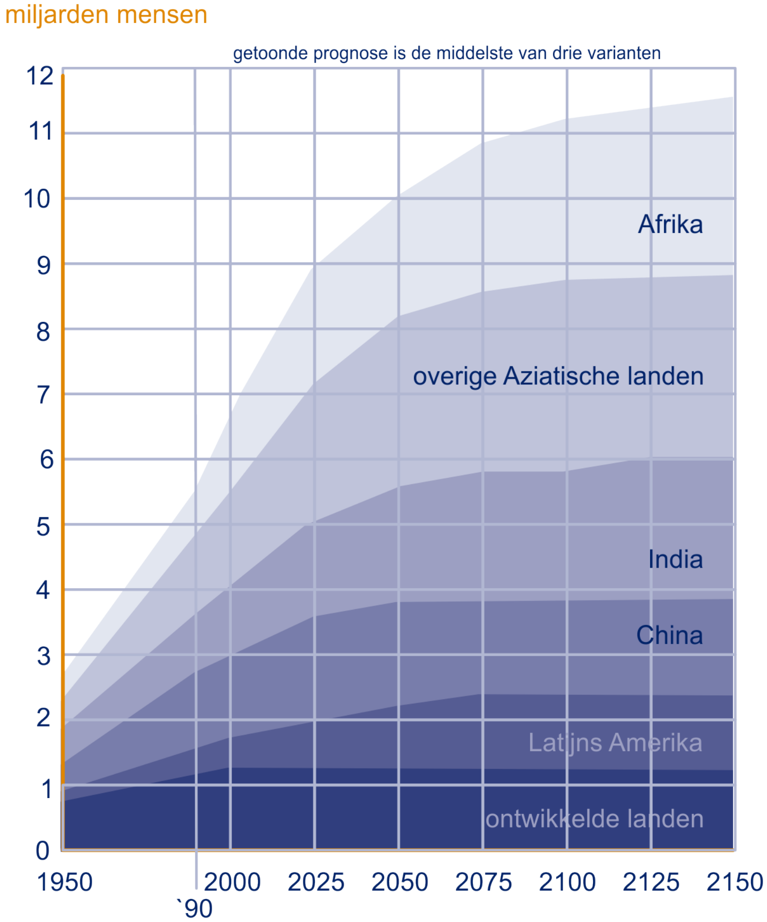
c Hoeveel steeg de goudprijs in deze periode gemiddeld per maand?

d En per dag?

59

Elk jaar brengt de VN het Wereld Bevolkingsrapport uit. Hieronder is de prognose van de VN van de wereldbevolking in grafiek gebracht. De wereld is daarin verdeeld in zes delen.





Chris zegt: "Afrika groeit in de periode $2000 - 2025$ het hardst, want de lijn van Afrika loopt daar het steilst."

a Bepaal zo nauwkeurig mogelijk met de grafiek voor de regio's *Afrika* en *overige Aziatische landen* met hoeveel de bevolking toeneemt in deze periode.
Heeft Chris gelijk?

In het jaar 1990 woonden ongeveer 20% van de wereldbevolking in China.

b Hoe zal dat in 2150 zijn?

De wereld werd in 2000 bewoond door $6{,}7$ miljard mensen en zal in 2150 door $11{,}6$ miljard mensen worden bewoond.

c Met hoeveel mensen neemt de wereldbevolking gemiddeld per jaar toe in die periode? Met hoeveel mensen is dat per dag? En met hoeveel per seconde?

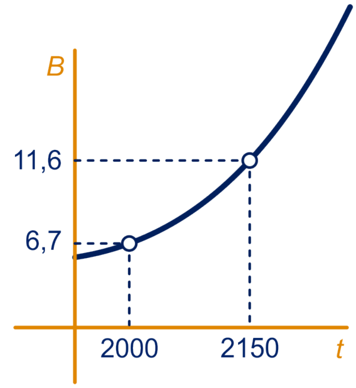
8.5 Rekenen met veranderingen

We kijken nog even terug naar opgave 59. De wereldbevolking in miljarden noemen we B, de tijd in jaren noemen we t.
We lezen het volgende af:
Als $t = 2000$, dan $B = 6{,}7$; als $t = 2150$, dan $B = 11{,}7$.
De toename van t is 150; de toename van B is $4{,}9$.
Dit is de gemiddelde toename per jaar $\frac{4{,}9}{150} \approx 0{,}033$ (miljard).

Het voorgaande kun je schematisch zó opschrijven met het zogenaamde **rekenschema**:

$t = 2150 \quad \rightarrow \quad B = 11{,}6$
$\underline{t = 2000} \quad \rightarrow \quad \underline{B = 6{,}7}$
$\Delta t = 150 \quad \rightarrow \quad \Delta B = 4{,}9$

De gemiddelde toename is: $\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{4{,}9}{150} \approx 0{,}033$.



60 Terug naar opgave 58.
P is de goudprijs (in dollar/ounce).
We rekenen de tijd t in dagen vanaf 9 augustus 2010.

a Vul het rekenschema in en bereken daarmee de gemiddelde prijsstijging per dag over de periode 090810 - 080811.

$t = \ldots\ldots \quad \rightarrow \quad P = \ldots\ldots$
$\underline{t = \ldots\ldots} \quad \rightarrow \quad \underline{P = \ldots\ldots}$
$\Delta t = \ldots\ldots \quad \rightarrow \quad \Delta P = \ldots\ldots$

De gemiddelde toename is: $\frac{\Delta P}{\Delta t} = \ldots\ldots \approx \ldots\ldots.$

Terug naar opgave 57.
T_2 is de luchttemperatuur in graden Celsius, t is de tijd in uren.

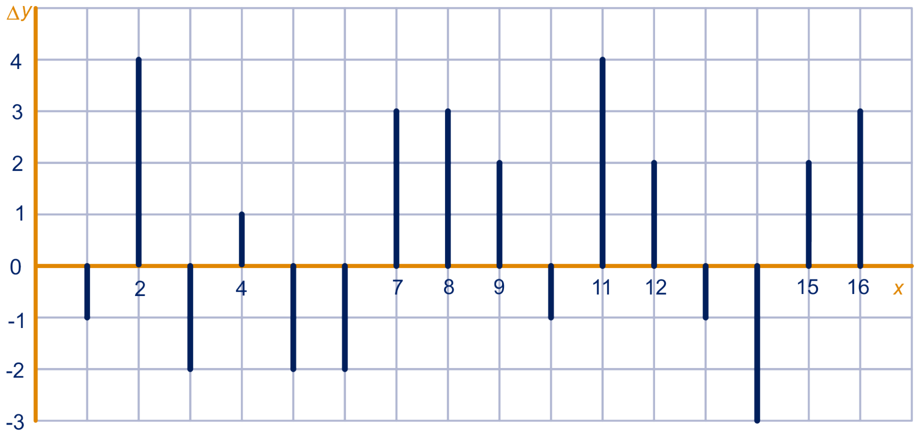
b Maak een rekenschema en bereken daarmee de gemiddelde temperatuurstijging $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ per uur tussen 8 en 20 uur.

61 Een auto rijdt over een drukke snelweg. Af en toe is het zo druk dat de auto stapvoets moet rijden; op andere stukken kan hij wel aardig opschieten. Om 12.00 uur passeert de auto kilometerbordje 45, om 15.00 uur bordje 168. De afgelegde afstand in km noemen we A, de tijd in uren noemen we t.

a Maak een rekenschema en bereken daarmee de $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ tussen 12.00 en 15.00 uur.

b Wat stelt $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ voor?

62 Van een grafiek (met x op de horizontale as en y op de verticale as) staat hieronder een toenamediagram.



a Wat is de gemiddelde toename van y op het x-interval $3 \leq x \leq 11$?

b Bereken $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ op het x-interval $0 \leq x \leq 16$.

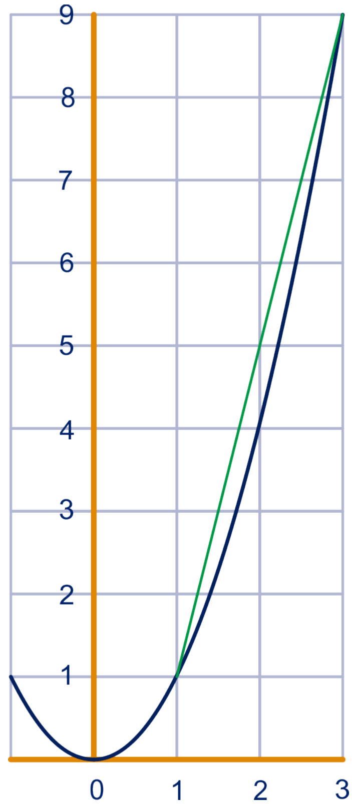
c Zoek een x-interval waarop $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ gelijk aan 0 is.

63 Anneke heeft van een zekere grafiek $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ berekend voor een paar x-intervallen: er kwam steeds dezelfde gemiddelde toename uit, namelijk $1\frac{1}{2}$.
Wat kun je van de grafiek vertellen, als je weet dat voor ieder interval $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ de waarde $1\frac{1}{2}$ heeft?

Opmerking
Het woord **interval** komt uit het Latijn en betekent letterlijk *tussenruimte*.
Voor intervallen wordt vaak de volgende notatie gebruikt.
Het interval $[3{,}5]$ is de verzameling getallen tussen 3 en 5, inclusief 3 en 5 zelf. De vierkante haken geven aan dat de getallen 3 en 5 zelf ook mee doen. Bij eenhoekige haken doen de randen *niet* mee. Bijvoorbeeld:
Interval $[3{,}5]$ betekent alle waarden van x waarvoor $3 \leq x \leq 5$.
Interval $\langle 3{,}5 \rangle$ betekent alle waarden van x waarvoor $3 < x < 5$.

64

Hiernaast staat de grafiek van $y = x^2$.
Als x toeneemt van 1 tot 3, dan neemt y toe van 1 tot 9.
De gemiddelde groei van y is op het x-interval $[1,3]$ dus gelijk aan $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9-1}{3-1} = \frac{8}{2} = 4$.



a Bereken (met het rekenschema) de gemiddelde groei van y op de volgende x-intervallen: $[3,6]$, $[0,10]$, $[-2,2]$ en $[-3,2]$.

b Bereken de gemiddelde groei van y op het x-interval $[a,3]$. Je krijgt een formule met a erin. Vereenvoudig deze zover mogelijk.

Er is een getal a (kleiner dan 3) zo, dat de gemiddelde groei van y op het x-interval $[a,3]$ gelijk is aan 2.

c Bereken dat getal a met het resultaat van onderdeel **b**.

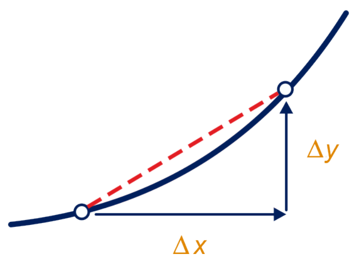
d Hoe had je deze waarde van a in de grafiek kunnen vinden?

e Zoek met de grafiek op het werkblad de waarde van b zodat op het interval $[-1,b]$ de gemiddelde groei gelijk is aan $1{,}5$.

Je kunt ook een formule maken (met b erin) voor $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ op het interval $[-1,b]$.

f Bepaal deze formule en bereken hiermee de waarde van b.

Van een functie wordt de **gemiddelde groei** op het x-interval $[a,b]$ berekend door het **differentiequotiënt** $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ op dat interval uit te rekenen.
(Differentiequotiënt betekent letterlijk "uitkomst van deling van verschillen".)
Ofwel: de gemiddelde groei is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van het verbindingslijnstuk tussen de twee punten op de grafiek bij $x = a$ en $x = b$.



Opmerking
Het differentiequotiënt (en dus de gemiddelde groei) kun je op een overzichtelijke manier berekenen via het eerder gebruikte **rekenschema**.

65

We bekijken nogmaals de functie $y = x^2$.

a Wat is de toename Δy op het x-interval $[a,b]$?

b Wat is de toename Δx op het x-interval $[a,b]$?

De gemiddelde toename op het x-interval $[a,b]$ is dus $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b^2 - a^2}{b - a}$. Deze uitdrukking kun je vereenvoudigen.

c Wat is die vereenvoudiging?

Hint 8.

8.5 Rekenen met veranderingen

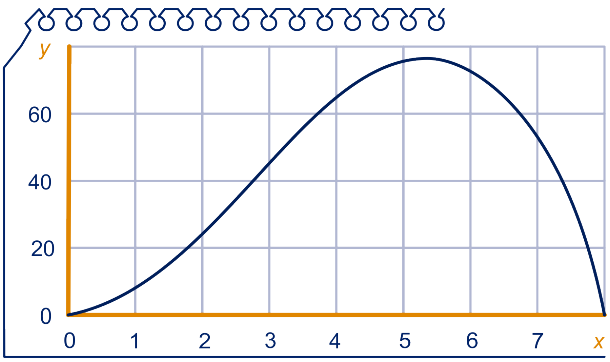
Voor $y = x^2$ hebben wij het mooie resultaat dat de gemiddelde groei op het x-interval $[a, b]$ gelijk is aan $a + b$.
Bij andere functies zit er niets anders op dan de waarde van het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ uit te rekenen.

66
- **a** Bereken de gemiddelde groei van $y = x^2 + 5$ op de volgende x-intervallen: $[1,3]$, $[a,3]$ en $[a, 2a]$.
- **b** Bereken de gemiddelde groei van $y = 3x^2$ op dezelfde drie x-intervallen.
- **c** Bereken de gemiddelde groei van $y = (x - 1)^2$ op dezelfde drie x-intervallen.

67
In deze opgave bekijken wij de functie $y = x^2 + x$.
- **a** Bereken het differentiequotiënt van de functie $y = x^2 + x$ op het x-interval $[1,3]$. Vereenvoudig je antwoord zoveel mogelijk:
  Doe hetzelfde voor het x-interval $[2,5]$.
- **b** Laat met een berekening zien dat het differentiequotiënt van de functie $y = x^2 + x$ op het x-interval $[a,3]$ gelijk is aan $a + 4$.
  Hint 9.
- **c** Laat met een berekening zien dat op het x-interval $[a, a + 1]$ geldt $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2a + 2$.

Helling en raaklijn

68
Bekijk de volgende grafiek.



- **a** Lees zo goed mogelijk af wat de gemiddelde helling $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is op het x-interval $[1,3]$.
- **b** Doe dit ook op de x-intervallen $[1,2]$ en $[1; 1,5]$.

We willen graag de helling weten op een klein interval, d.w.z. met Δx heel klein. Maar voor kleine waarden van Δx is nauwkeurig aflezen niet meer goed mogelijk. Als je echter een formule van de grafiek kent, dan kun je de gemiddelde helling wel nauwkeurig berekenen.
De formule die bij de grafiek hoort is $y = 8x^2 - x^3$.
Zo is de gemiddelde helling op het x-interval $[1; 1{,}2]$ als volgt te berekenen (met het rekenschema):

$$\begin{array}{lcl} x = 1 & \rightarrow & y = 7 \\ \underline{x = 1{,}2} & \rightarrow & \underline{y = 9{,}792} \\ \Delta x = 0{,}2 & \rightarrow & \Delta y = 2{,}792 \end{array}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2{,}792}{0{,}2} = 13{,}96$$

c Bereken op dezelfde manier met behulp van de formule de gemiddelde helling $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in elk van de volgende x-intervallen:
- $[1; 1{,}1]$,
- $[1; 1{,}01]$,
- $[1; 1{,}001]$.

De laatste drie waarden zijn afgerond op een geheel getal hetzelfde.

d Wat is die afgeronde waarde?

Opmerking
Door Δx steeds kleiner te nemen, bekijken we de grafiek steeds gedetailleerder in het punt $(1{,}7)$: we zoomen in op de grafiek.
Zie de applet "helling_zoomen". Welke richtingscoëfficiënt vind je met de applet?

Dat kan ook op de GR.
Teken op de GR de grafiek van $\mathrm{Y}_1 = 8\mathrm{X}^2 - \mathrm{X}^3$. Ga met de cursor naar het punt $(1{,}7)$. Zoom vervolgens in. Je kunt dit vaker herhalen. De grafiek op het scherm van de GR gaat bij dit inzoomen steeds meer op een rechte lijn lijken. De richtingscoëfficiënt van die lijn is het getal 13 dat je in opgave 68**d** hebt berekend. We noemen dat getal de **helling** van de grafiek in het punt $(1{,}7)$. Dit getal geeft aan hoe steil de grafiek in het punt $(1{,}7)$ loopt.

Op de GR zit ook een optie waarmee je de helling van de grafiek in een bepaald punt kunt berekenen. Vaak heet zo'n optie dy/dx of je moet 'derivative' aanzetten. Check eens of je hem kunt vinden. Vraag anders of je docent je wil helpen.

69 Bekijk nog eens de grafiek van $y = 8x^2 - x^3$.

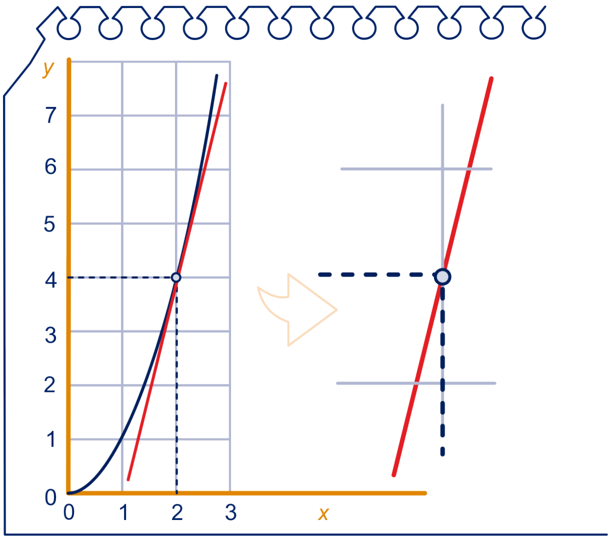
a Bepaal met een klein interval, met $\Delta x = 0{,}01$, de helling van de grafiek van in het punt $(2{,}24)$. Doe dat ook in het punt $(4{,}64)$ en in het punt $(6{,}72)$.

b Bepaal ook de helling van de grafiek in de bij **a** genoemde punten met behulp van de optie dy/dx op de GR.

70 We gaan de helling van de grafiek van $y = x^2$ bepalen in het punt $(2{,}4)$.

a Ga na dat de gemiddelde stijging $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ als x toeneemt van 2 tot $2{,}01$ ongeveer 4 is.

Hieronder zie je de grafiek van $y = x^2$ en daarnaast een uitvergroot gedeelte in de buurt van $x = 2$.



De uitvergrote grafiek is praktisch een rechte lijn met richtingscoëfficiënt 4; die helling had je al in **a** gevonden.
Ook in de niet-uitvergrote grafiek is de lijn door het punt $(2{,}4)$ getekend met richtingscoëfficiënt 4. Deze lijn geeft goed aan hoe steil de grafiek loopt in het punt $(2{,}4)$. We noemen hem **de raaklijn aan de grafiek** in $(2{,}4)$.

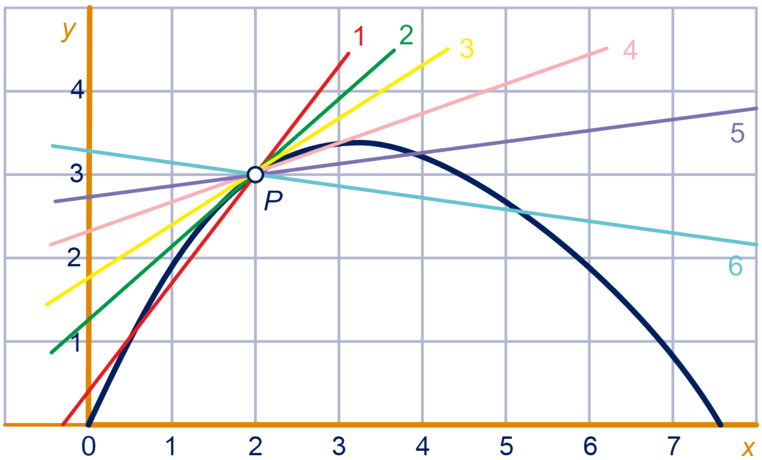
b Bepaal de richtingscoëfficiënt van de raaklijnen in de punten $(0{,}0)$, $(1{,}1)$ en $(3{,}9)$ op vier verschillende manieren:

- door berekening van de gemiddelde stijging $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ als x toeneemt met $0{,}01$.
- door de optie dy/dx op de GR te gebruiken.
- door een raaklijn te tekenen op het werkblad.
- met de applet "helling_parabool".

c Vind je bij vraag **b** steeds ongeveer dezelfde getallen?

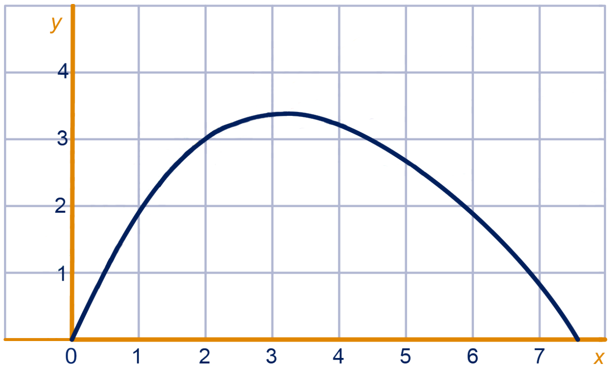
De helling in een punt van een kromme grafiek kun je vinden door zo goed mogelijk een raaklijn te tekenen in dat punt en de richtingscoëfficiënt van die raaklijn nauwkeurig te bepalen.
De richtingscoëfficiënt van de raaklijn bepaal je door de coördinaten van twee punten op de lijn af te lezen die ver genoeg uit elkaar liggen. Met deze twee punten bereken je dan de waarde van $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

71 Op de grafiek hieronder is het punt P aangegeven. Er zijn zes lijnen getekend door P, genummerd 1 t/m 6.
De grafiek staat ook op het werkblad.



a Welk van de lijnen is de raaklijn?
b Wat is de richtingscoëfficiënt van deze raaklijn? Wat is dus de helling van de grafiek in punt P?

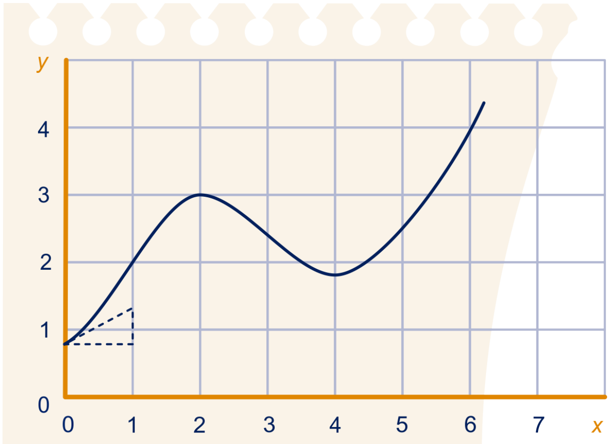
Hieronder is nogmaals de grafiek getekend. De figuur staat ook op het werkblad.



c Bepaal in de figuur op het werkblad de punten op de grafiek met respectievelijk de helling 0, $1\frac{1}{2}$ en -1. Licht je werkwijze toe.

72

Bekijk de volgende grafiek. We kennen geen formule van deze grafiek. We kunnen de hellingen dus niet berekenen. Maar we kunnen de hellingen wel aflezen uit de grafiek.



Teken op het werkblad zo goed mogelijk de raaklijnen in de punten met x-waarden 0, 1, 2, 3, 4 en 5. Lees daarmee zo nauwkeurig mogelijk af wat de hellingen zijn in deze punten. Noteer deze vervolgens in een tabel zoals hieronder:

x	0	1	2	3	4	5	6
helling							

Opmerking

Je kunt direct zien wat de helling is bij $x = 2$ en bij $x = 4$. Dat komt omdat de grafiek daar een maximum heeft of een minimum, want daar is de helling altijd gelijk aan nul. Tenminste als de grafiek 'glad' is, d.w.z. dat hij geen knikken heeft.

73

Een grafiek die niet overal glad is, is de grafiek van $y = \sqrt{x^2}$.

a Teken deze grafiek op je GR. Neem -$5 \leq x \leq 5$ en -$5 \leq y \leq 5$.

b Leg uit dat deze grafiek een minimum heeft. In welk punt?

De helling in dat punt is echter niet gelijk aan nul.

c Leg zo goed mogelijk uit wat er volgens jou hier aan de hand is. Is er eigenlijk wel een helling in dat minimum?

74

Een andere grafiek waarmee iets bijzonders aan de hand is, is de grafiek van $y = x^3$.

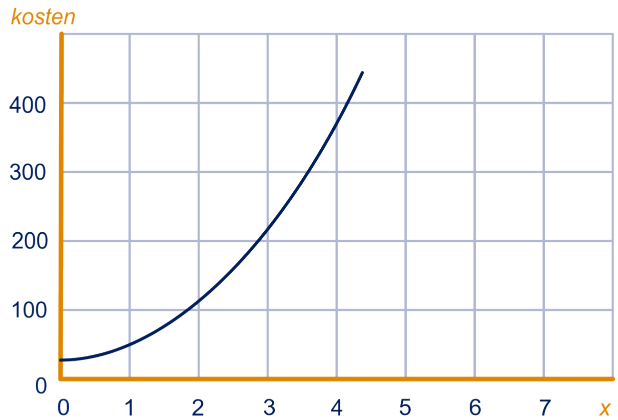
a Teken de grafiek op je GR voor -$2 \leq x \leq 2$ en -$10 \leq y \leq 10$.

b Bereken heel nauwkeurig de helling van de grafiek in het punt $(0{,}0)$. Hoe groot is deze helling volgens jou?

c Leg uit dat de helling van deze grafiek in het punt $(0{,}0)$ gelijk is aan nul, maar dat de grafiek in dit punt geen maximum of minimum heeft.

75

Hieronder staat de grafiek van een kostenfunctie. Hierbij is de variabele x het dagelijks aantal geproduceerde eenheden in honderden stuks. Verticaal staan de kosten in euro's. De grafiek staat ook op het werkblad.



De helling van de grafiek geeft aan hoe snel de kosten stijgen.

a Teken in de grafiek op het werkblad de raaklijnen bij $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ en $x = 4$.

b Lees zo nauwkeurig mogelijk af wat de helling is bij $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ en $x = 4$. Kies daarvoor telkens twee punten op de raaklijn niet te dicht bij elkaar.

Als er 300 eenheden geproduceerd worden, zijn de kosten 220 euro. De helling van de grafiek bij $x = 3$ heb je bij **b** bepaald. Deze helling is (ongeveer) 120.

c Leg uit dat de kosten bij een productie van 310 eenheden dan ongeveer 232 euro zijn.

Als er 200 eenheden geproduceerd worden, dan zijn de kosten 116 euro.

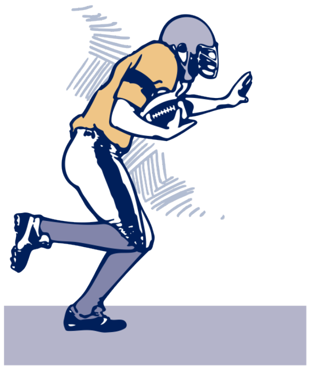
d Benader hiermee, en met de helling die je bij **b** hebt gevonden, de kosten als er 225 eenheden geproduceerd worden.

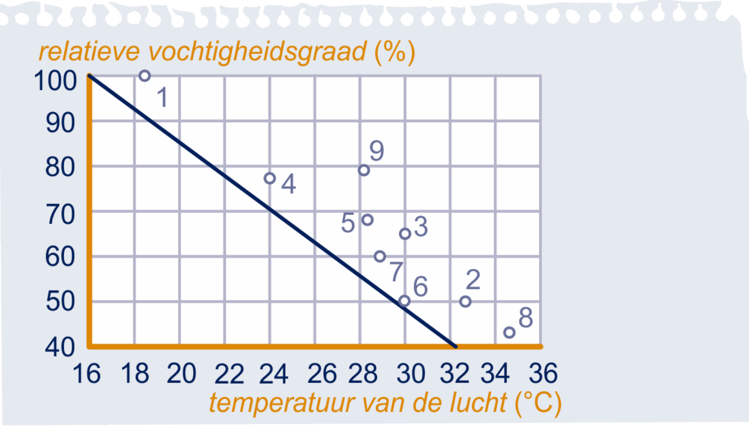
Als er 400 eenheden geproduceerd worden, dan zijn de kosten 380 euro.

e Benader hiermee, en met de helling die je bij **b** hebt gevonden, de kosten als er 385 eenheden geproduceerd worden.

Ongelijkheden

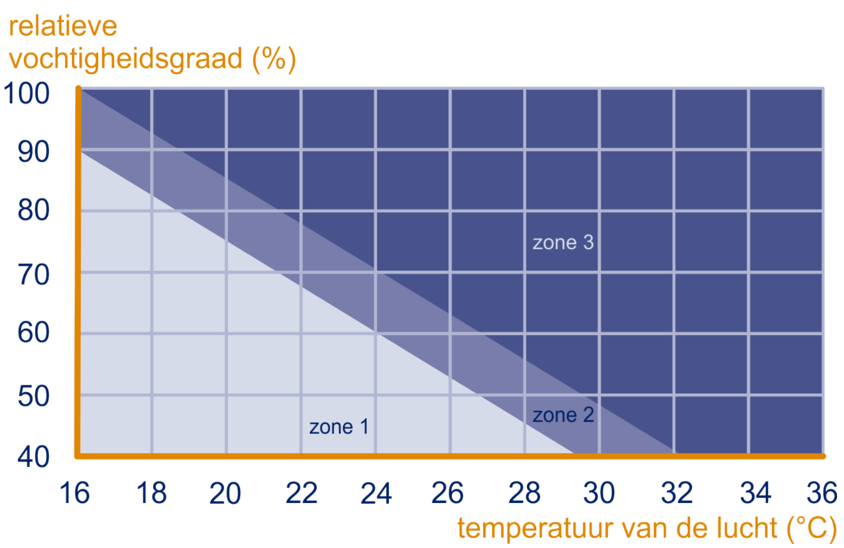
76 De beschermende kleding bij American football vormt een belemmering voor de warmteafgifte van het lichaam.
Het lichaam kan daardoor zijn warmte maar moeilijk kwijt en dat kan tot problemen leiden. We spreken dan van warmtestuwing. In ernstige gevallen kan dat dodelijk zijn.
Belangrijk zijn de temperatuur en de relatieve vochtigheid van de lucht. In de grafiek is aangegeven bij welke omstandigheden zich negen ernstige gevallen van warmtestuwing voordeden. Het betreft spelers van American football en mariniers onder zware lichamelijke belasting.





a Hoe waren de weersomstandigheden bij ongeval nr.1?

De ongevallen gaven aanleiding tot het opstellen van een "weergids". Zone 1 is veilig: bij die weersomstandigheden is er geen gevaar voor warmtestuwing. In zone 2 moet men oppassen. Zone 3 is gevaarlijk.



Het is 26°C en de relatieve vochtigheid is 60%.

b Is er gevaar voor warmtestuwing?

Noem de vochtigheidsgraad V (in procenten) en de temperatuur T (in graden Celsius).

c Stel een formule op voor de twee grenslijnen tussen de zones.

d Bepaal met de formules bij welke relatieve vochtigheid je in zone 2 zit, als de temperatuur 26°C is (dus $T = 26$).
Dezelfde vraag bij $T = 18$.

Voor zone 1 kunnen we een ongelijkheid opschrijven in de vorm: $V < aT + b$.

e Welke zijn de getallen a en b?

f Geef zo ook een ongelijkheid voor zone 3.
En met welke twee ongelijkheden kun je aangeven dat je in zone 2 zit?

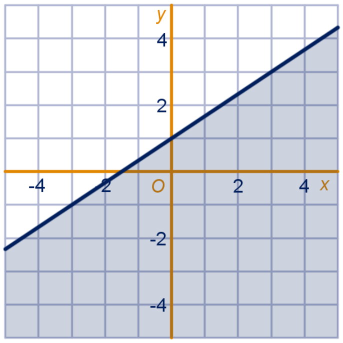
77

a Teken in een assenstelsel de lijnen $y = 2x - 3$, $y = 2x - 1$, $y = 2x + 1$ en $y = 2x + 3$.

b Kleur het gebied waar de punten (x, y) liggen waarvoor geldt: $y > 2x + 3$.

c Gebruik een andere kleur om het gebied aan te geven waar geldt: $2x - 1 < y < 2x + 1$.
Dat is het gebied waarvoor geldt: $y < 2x + 1$ en $y > 2x - 1$.

De gelijkheid $y = ax + b$ beschrijft een rechte lijn.
De **ongelijkheid** $y < ax + b$ beschrijft het gebied onder die lijn.
De **ongelijkheid** $y > ax + b$ beschrijft het gebied boven die lijn.
Als de ongelijkheid een andere vorm heeft, is het verstandig een punt in te vullen om uit te zoeken welk gebied (boven of onder de lijn) bij de ongelijkheid hoort.
Bijvoorbeeld: in de figuur is het gebied horend bij de ongelijkheid $2x - 3y \geq$ -3 gekleurd. Het juiste gebied is *onder* de lijn, ondanks het teken $\geq$ in de ongelijkheid. Vul maar een punt in.



78

Bij toetsen met 50 meerkeuzevragen wordt geteld hoeveel vragen een kandidaat goed heeft. Dit aantal noemt men de score X. Hierna wordt de score X omgezet in een cijfer Y.
Een kandidaat die niets goed heeft krijgt het cijfer 1; dus bij $X = 0$ hoort $Y = 1$. Wie alle vragen goed beantwoord heeft krijgt natuurlijk het cijfer 10; dus bij $X = 50$ hoort $Y = 10$.

Stel dat er een *lineair verband* wordt gehanteerd om de score X in het cijfer Y om te rekenen.

Een kandidaat heeft 40 vragen goed.

a Bereken zijn cijfer in één decimaal nauwkeurig.

Bij het cijfer 5,5 ligt de omslag van voldoende naar onvoldoende. Daarom noemen we de bijbehorende score de *omslagscore*.

b Welke score is dat?

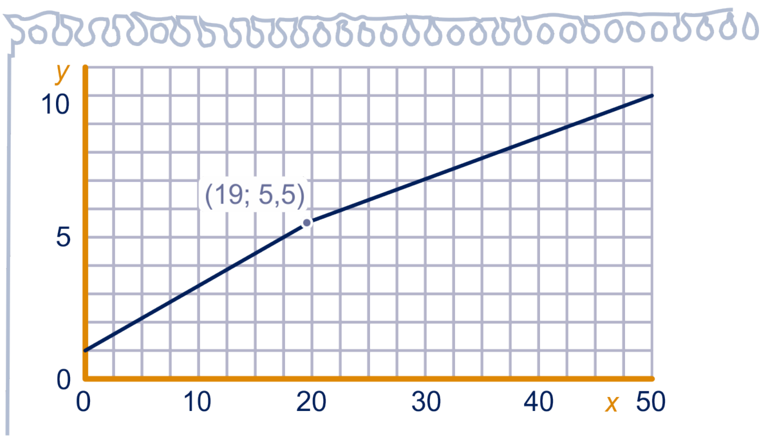
c Stel een formule op voor het verband tussen X en Y.

d Teken de bijbehorende grafiek.

Een lineair verband wordt gehanteerd bij toetsen van normale moeilijkheidsgraad. Als de toetsvragen aan de moeilijke kant zijn, hoeft de kandidaat minder vragen goed te hebben om aan een zelfde cijfer te komen dan bij een toets van normale moeilijkheid.

e Aan welke kant van de grafiek uit onderdeel **d** liggen de punten (X, Y) dan? Geef een ongelijkheid voor dat gebied.

Als de vragen aan de moeilijke kant zijn, wordt de score dus anders omgerekend naar een cijfer dan bij normale moeilijkheidsgraad. De omslagscore wordt verlaagd; de kandidaat hoeft dan minder antwoorden goed te hebben voor een voldoende cijfer. Omgekeerd kan het ook: bij makkelijke toetsen wordt de omslagscore verhoogd. Bij een verhoogde of verlaagde omslagscore bestaat de grafiek uit twee rechte lijnstukken. Bijvoorbeeld zo:



f Stel een formule op voor beide lijnstukken. Vermeld bij de formules voor welke waarden van X hij van toepassing is.

Bij een zekere toets van 50 vragen wordt op deze manier het cijfer berekend; dus met een verschoven omslagscore.
Een kandidaat had 40 vragen goed en kreeg het cijfer 7,5.

g Bereken de omslagscore.

h Welk cijfer krijgt iemand met 16 vragen goed bij deze toets?

Naar het examen havo wiskunde A 1995 eerste tijdvak

79 Op de markt verkoopt bakker Broodje krentenbollen en koffiebroodjes.
Voor een krentenbol heeft hij 12 gram meel en 0,2 gram gist nodig.
Voor een koffiebroodje heeft hij 10 gram meel en 0,1 gram gist nodig.
Hij heeft een voorraad van 8000 gram meel en 100 gram gist.
Neem aan dat de bakker x krentenbollen en y koffiebroodjes bakt.

a Welke twee ongelijkheden volgen hieruit, afgezien $x \geq 0$ en $y \geq 0$.

Bij deze vier ongelijkheden kun je grafieken tekenen. Elke ongelijkheid geeft een deel onder of boven een lijn dat voldoet aan de ongelijkheid. Het gebied dat voldoet aan **alle** ongelijkheden noemen we het **toegestane gebied**. Het toegestane gebied bevat dus **alle** punten (x, y) die voldoen aan **alle** ongelijkheden.

b Teken de vier ongelijkheden in een grafiek en kleur het toegestane gebied. Laat de x-as lopen van 0 tot en met 700 en de y-as van 0 tot en met 1000.

c Bereken de coördinaten van de drie hoekpunten ((0,0) niet meegerekend) van het toegestane gebied.

De winst op een krentenbol is 45 cent en op een koffiebroodje 35 cent.

d Bij welk aantal krentenbollen en koffiebroodjes is de winst voor de bakker maximaal? Hoeveel is de winst dan?

80 Een transportbedrijf moet minimaal 798 Deense karren vervoeren van Amsterdam naar het Ruhrgebied. Het bedrijf beschikt over x kleine en y grote vrachtwagens.
Een kleine wagen kan 24 karren vervoeren en kost €500,– per dag en een grote wagen kan 42 karren vervoeren en kost €900,– per dag.
Het aantal vrachtwagens per dag mag niet meer zijn dan 28.

a Welke twee ongelijkheden volgen hieruit, afgezien $x \geq 0$ en $y \geq 0$?

b Teken het toegestane gebied. Laat de x-as lopen van 0 tot en met 36 en de y-as van 0 tot en met 28.

c Bereken de coördinaten van de drie hoekpunten van het toegestane gebied.

d Bij hoeveel kleine en hoeveel grote wagens zijn de kosten minimaal? Wat zijn de kosten dan?

81 In een fabriek worden twee typen auto's geassembleerd (in elkaar gezet), per dag minstens 10 van type S en 8 van type TD. Beide typen hebben dezelfde carrosserie. Daarvan zijn er per dag 25 beschikbaar. Het assembleren van een auto van type S kost 50 arbeidsuren, het assembleren van een auto van het type TD kost 100 arbeidsuren. Per dag zijn er hiervoor maximaal 1800 arbeidsuren per dag beschikbaar.
Stel dat er per dag x auto's van type S en y auto's van type TD gemaakt worden.

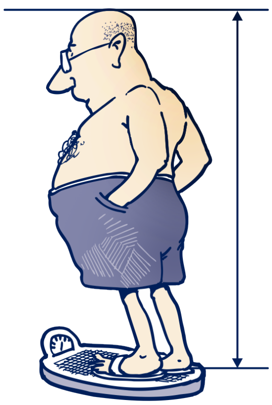
- **a** Aan welke vier voorwaarden moeten x en y voldoen (afgezien van $x \geq 0$ en $y \geq 0$)?
- **b** Teken het toegestane gebied. Laat de assen lopen van 0 tot en met 26.
- **c** Bereken de coördinaten van alle hoekpunten van het toegestane gebied.

De winst op een auto van type S is 2750 euro en de winst op een TD is 2500 euro.

- **d** Welk productieschema levert de meeste winst op en hoe groot is die winst?

Isolijnen

82 Wanneer je wilt nagaan of je een gezond gewicht hebt, dan kun je daarvoor de Body Mass Index (BMI) gebruiken. De BMI bereken je met de formule: $BMI = \frac{G}{L^2}$.
Daarbij is G je gewicht in kg en L je lengte in meters.



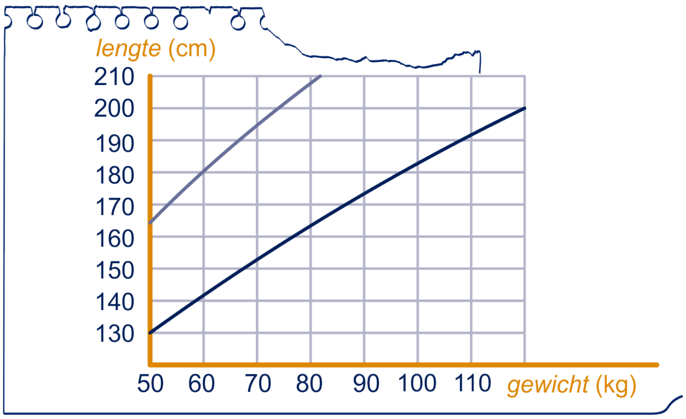
- **a** Maak een formule waarbij L wordt uitgedrukt in G voor iemand met een BMI van 20.
  Schrijf je formule in de vorm $L = a \cdot G^b$ met a en b in 2 decimalen nauwkeurig.

Voor de BMI gelden de volgende vuistregels:

- $BMI < 18{,}5$: ondergewicht
- $18{,}5 \leq BMI < 25$: normaal gewicht
- $25 \leq BMI < 30$: overgewicht
- $BMI \geq 30$: ernstig overgewicht (obesitas)

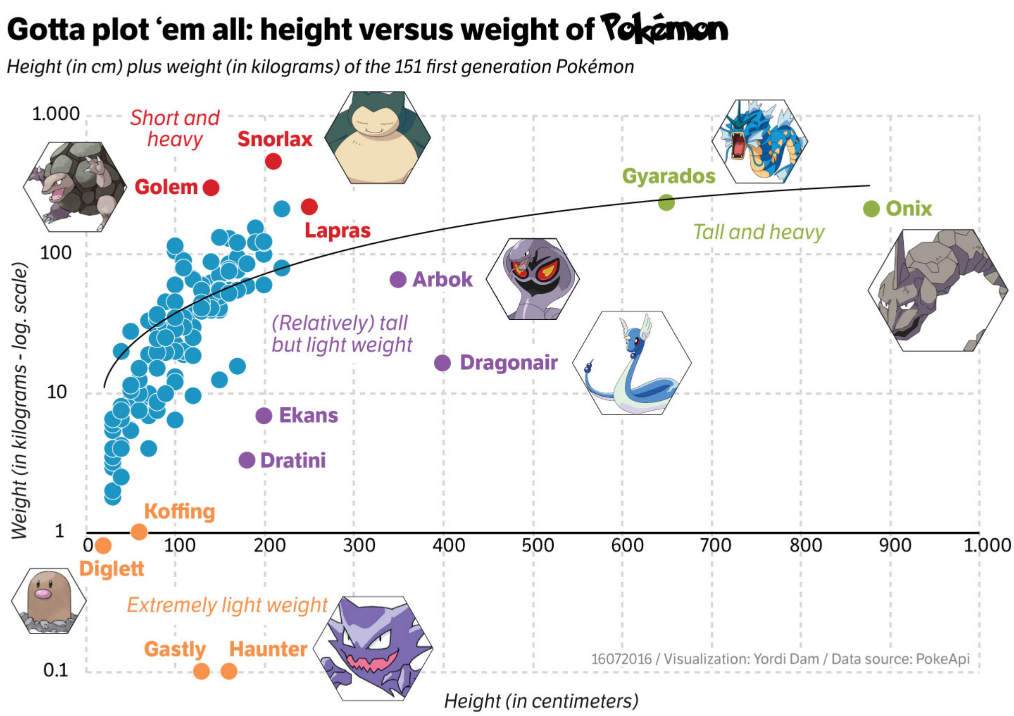
In de grafiek hieronder staan twee van de drie kromme lijnen getekend die bij grenzen van deze vier gebieden horen. De grafiek staat ook op het werkblad.

- **b** Teken de derde kromme grenslijn in de grafiek op het werkblad erbij en geef van elk van de vier gebieden die je dan krijgt aan welke conclusie over het gewicht van de persoon erbij hoort. Licht je antwoord toe.



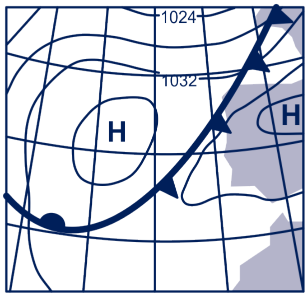
c Leg met behulp van de formule uit waarom mensen met een gewicht van 125 kg vrijwel allemaal een verhoogd risico voor hart- en vaatziekten hebben.

In de software van de app Pokémon-Go is van elke Pokémon terug te vinden hoe zwaar en hoe groot ze zijn. Hieronder staat dit van de 151 eerste generatie Pokémon weergegeven in een grafiek (met logaritmische schaal op de verticale as). De lengte is in cm en het gewicht in kg.



d Bereken met de figuur afgerond op 1 decimaal de BMI van de Arbok.
Hoe gezond is de Arbok volgens menselijke maatstaven?

8.6 Ongelijkheden en isolijnen



In de grafiek bij opgave 82 zijn meerdere kromme lijnen getekend, elk bij een andere waarde van de BMI.
De (kromme) lijnen in zo'n **bundel grafieken** worden **iso-lijnen** genoemd. (Het woord 'iso' komt uit het Grieks en betekent *gelijk*.)
Bij aardrijkskunde ben je vast al wel eens een keertje tegengekomen: grafieken met isobaren (lijnen met gelijke luchtdruk), of isohoogtelijnen (lijnen met gelijke hoogte). Isobaren zie je ook regelmatig op tv bij het weerpraatje om hoge en lage drukgebieden aan te geven.

83

Verf is een bijzondere stof. Wanneer je het aanbrengt, is het vloeibaar, na het drogen is het hard. Verf bestaat namelijk uit vaste stof die opgelost is in een vloeistof die tijdens het drogen verdampt.
We noemen het aantal vierkante meters dat met een liter verf geschilderd kan worden het *rendement*.
Het rendement kun je berekenen met de formule: $R = \frac{10V}{d}$
Hierin is:

- R het rendement (in m^2/liter);
- V het percentage vaste stof van de verf;
- d de dikte van de verflaag (in micrometer) (1 micrometer is 0,001 mm).

Op een blik verf staat vermeld dat het percentage vaste stof 67 is en dat het rendement 12 m^2/liter is.

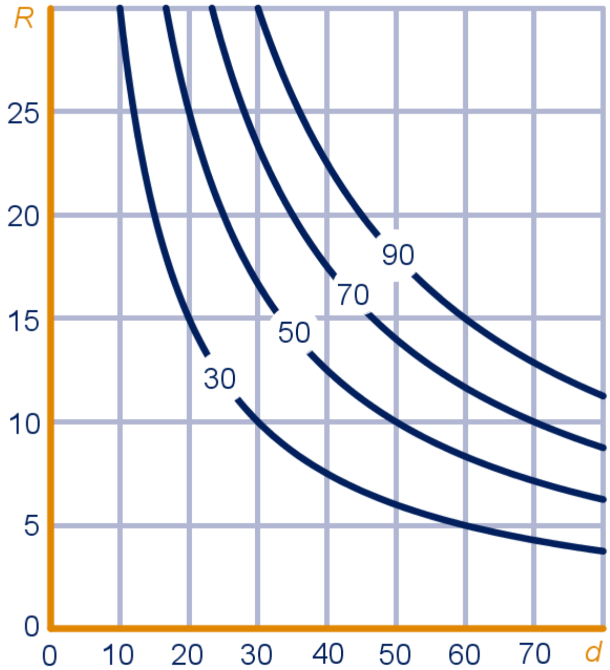
a Bereken de dikte van de verflaag in micrometer waar de fabrikant blijkbaar van uitgegaan is.

Verf van topmerken is per liter duurder dan verf van huismerken van doe-het-zelfzaken. Maar verf van huismerken bevat meestal een kleiner percentage vaste stof dan verf van topmerken.
Om te weten welke verf het goedkoopste is, moet je dus niet kijken naar de prijs per liter, maar naar de prijs per vierkante meter aangebrachte verf.

Een huismerkverf kost 21 euro per liter en heeft een percentage vaste stof van 30. Verf van een topmerk kost 25 euro per liter en heeft een percentage vaste stof van 40.
We vergelijken van beide merken een verflaag van 50 micrometer dikte.

b Onderzoek welke verf het goedkoopste is.

Hieronder staat een grafiekenbundel voor de dikte en het rendement bij een aantal waarden van het percentage vaste stof. Deze grafiek staat ook op het werkblad.



c Teken zo goed mogelijk op het werkblad de lijn bij $V = 10$ in de grafiek erbij.

d Arceer het gebied waarvoor het vaste stof percentage groter dan 30 is, en de dikte groter dan 20 micrometer en het rendement minder dan 20 m^2/liter.
Hoe kun je dit gebied met ongelijkheden beschrijven?

We nemen een verfdikte van 50 micrometer en kijken naar V als functie van R.

e Wat voor soort verband is er dan tussen V en R? Geef een bijbehorende formule.

Naar het examen havo wiskunde A 2009 tweede tijdvak, aangepast

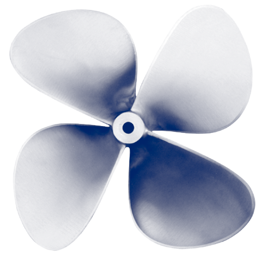
84

We bekijken nogmaals de Body Mass Index: $BMI = \frac{G}{L^2}$,
met L de lengte in meter en G het gewicht in kilogram.
Het aanbevolen gebied voor een gezond gewicht is een BMI tussen $18{,}5$ en 25. Als de BMI daarboven zit ben je te zwaar.

Kees zegt: "Mijn moeder zei vroeger: als je net zoveel kilogrammen weegt als je centimeters boven de meter meet, heb je een goed gewicht. En daar zit ik precies op. Maar mijn BMI is maar net in orde, ik zit op de grens van te zwaar."
Hoeveel weegt Kees en hoe lang is hij?

8.6 Ongelijkheden en isolijnen

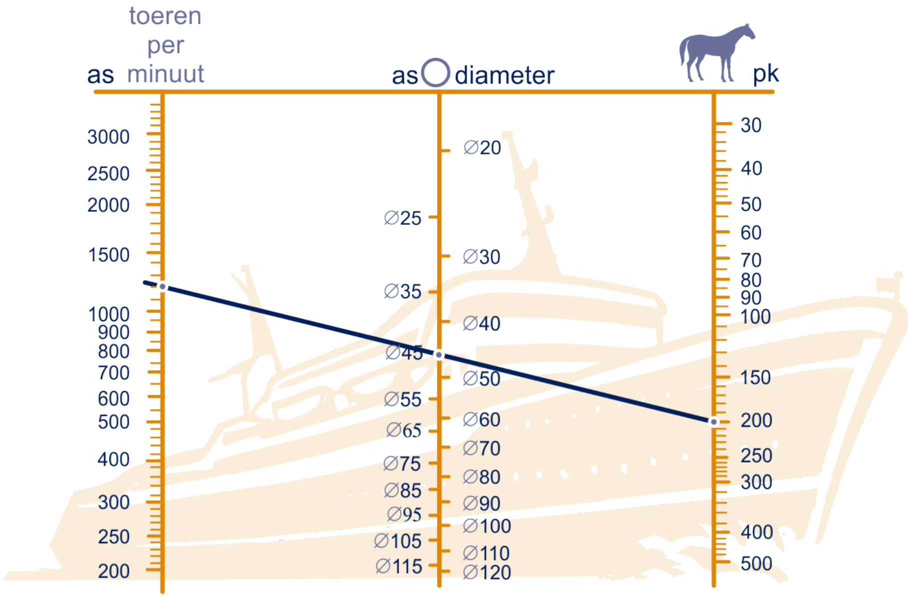
85



Een belangrijk onderdeel van een boot is de schroefas. Deze as wordt door de motor in beweging gebracht. Daardoor gaat de schroef van het schip draaien en dan kan de boot varen. De motor, de schroefas en de schroef samen noemen we hier het aandrijfsysteem van de boot.
De minimale diameter van de schroefas die nodig is, hangt af van de prestaties die de motor van deze boot kan leveren. Hieronder zie je een grafiek om de minimale diameter van de as vast te stellen. Deze figuur vind je ook op het werkblad. In dit zogenoemde **nomogram** zie je drie schalen:

- de linkerschaal: het aantal toeren (of omwentelingen) per minuut (tpm). Dit wordt ook wel het toerental genoemd;
- de middelste schaal: de diameter van de schroefas, gemeten in mm;
- de rechterschaal: het vermogen, uitgedrukt in paardenkracht (pk).

Zoals je kunt zien, is elk van de drie schalen niet-lineair.



Wanneer je een lijn trekt door de drie schalen kun je een van de drie waarden bepalen als je de andere twee weet. Zo hoort volgens de figuur bij een motor van 200 pk en 1200 tpm een asdiameter van (ten minste) 45 mm.

Python-Drive is een bedrijf dat aandrijfsystemen maakt. Op hun website staat dat alle systemen van het type P60-K (70 pk, 2600 tpm) een asdiameter hebben tussen 30 en 40 mm.

a Onderzoek met behulp van de figuur op het werkblad of de asdiameter van dit type groot genoeg is.

In het voorbeeld in het nomogram zie je een motor van 200 pk en 1200 tpm met een bijbehorende asdiameter van 45 mm. Er zijn ook wel motoren te vinden met een ander vermogen en een ander toerental waarbij dezelfde asdiameter van 45 mm hoort. Dan valt op dat een groter vermogen een hoger toerental oplevert.

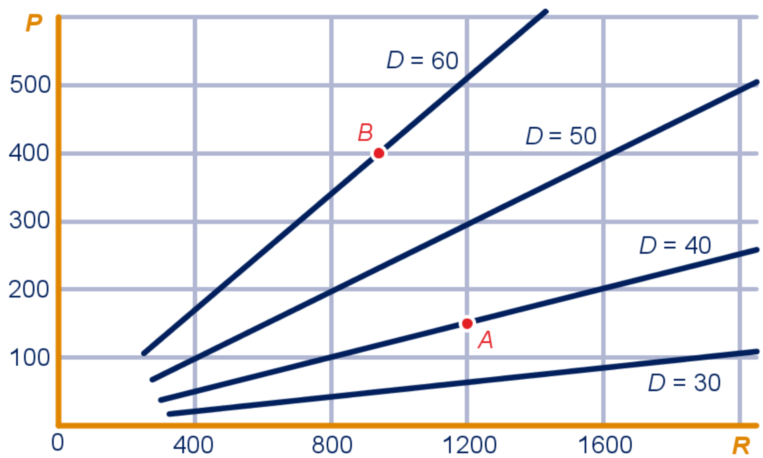
b Leg uit hoe je dat in het nomogram kunt zien.

Lloyd's is een organisatie die zich bezighoudt met het opstellen van regels voor de controle op de zeewaardigheid van schepen. Volgens een van deze regels moet de diameter D van de schroefas voldoen aan de volgende formule:

$$D = 79{,}78 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{R}}$$

In deze formule is D uitgedrukt in mm, het vermogen P uitgedrukt in pk en het toerental R in tpm.

In de figuur hieronder zie je voor enkele waarden van D het verband getekend tussen de bijbehorende waarden van P en R.



In de figuur kan elk aandrijfsysteem met een punt worden weergegeven. Zo hoort het punt A bij het aandrijfsysteem met waarden $(1200, 150, 40)$.

In de figuur is punt B aangegeven. Bij dit aandrijfsysteem is het vermogen goed af te lezen. De waarde van het toerental is echter niet nauwkeurig af te lezen, maar met behulp van de formule kunnen we deze wel berekenen.

c Bereken met behulp van de formule het toerental dat bij dit aandrijfsysteem hoort.

In enkele gevallen komt het voor dat de asdiameter al bekend is, bijvoorbeeld wanneer alleen de motor moet worden vervangen. Dan is het handig om de formule anders te schrijven.
We gaan uit van een asdiameter van 30 mm.

d Herschrijf de formule zo dat je een formule krijgt waarin P uitgedrukt wordt in R. Schrijf je formule zo eenvoudig mogelijk.
Wat voor soort verband is er tussen P en R?

Als je naar de figuur met de iso-D-lijnen kijkt, dan lijken dit allemaal rechte lijnen. En je zou je af kunnen vragen of ze bij verlenging door de oorsprong gaan.

e Leg uit dat de iso-lijnen inderdaad allemaal rechte lijnen door de oorsprong zijn.

Naar het examen vwo wiskunde A 2012, eerste tijdvak

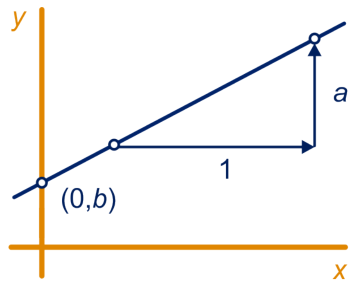
8.7 Eindpunt

Verbanden

Een **evenredig verband** tussen x en y heeft een formule in de gedaante $y = cx$.
De verhouding tussen x en y is altijd hetzelfde.
De grafiek is een rechte lijn door $(0,0)$.
Het getal $c = \frac{y}{x} \left(= \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ is de **evenredigheidsconstante**.
Kenmerk: als de x met een factor k wordt vermenigvuldigd, dan wordt y ook met factor k vermenigvuldigd.

x	1	2	4	8
y	3	6	12	24
$\frac{y}{x}$	3	3	3	3

Een **lineair verband** tussen x en y heeft een formule in de gedaante $y = ax + b$.
De verhouding tussen de toenames van x en y, is altijd hetzelfde, d.w.z. $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ en dit is de **richtingscoëfficiënt** van de lijn (of helling, hellingsgetal, hellingscoëfficiënt).
De grafiek is een rechte lijn door het punt $(0,b)$.
Ook de grafiek bij de formule $ax + by = c$ is een rechte lijn.



Een **omgekeerd evenredig verband** tussen x en y heeft een formule in de gedaante $y = \frac{c}{x}$.
Het product $x \cdot y = c$ is altijd hetzelfde.
Het getal c is de **evenredigheidsconstante**.
De grafiek is (een deel van) een hyperbool.
Kenmerk: als de x met een factor k wordt vermenigvuldigd, dan wordt y met factor $\frac{1}{k}$ vermenigvuldigd.

x	1	2	4	8
y	16	8	4	2
$x \cdot y$	16	16	16	16

Interpolatie en extrapolatie

Als je bij een lineair verband twee paren (x, y) gegeven hebt, kun je bij elke waarde van x de bijbehorende waarde van y uitrekenen, en omgekeerd.
Als de waarde van x tussen de twee gegevens in ligt, spreken we van **interpolatie**, anders van **extrapolatie**.
Schematisch:

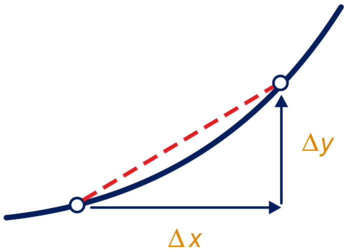
	x	y	
plus 4	10	15	*plus 30*
	12,7	?	
	14	45	

y neemt met 30 toe als x met 4 toeneemt
y neemt met 7,5 toe als x met 1 toeneemt
y neemt met $2{,}7 \cdot 7{,}5$ toe als x met 2,7 toeneemt
bij $x = 12{,}7$ hoort $y = 15 + 2{,}7 \cdot 7{,}5 = 35{,}25$

Toename

Gegeven is een verband tussen x en y.

De gemiddelde toename (of gemiddelde helling) van y op het x-interval $[a, b]$ kun je als volgt met het **rekenschema** uitrekenen.



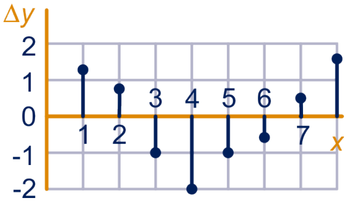
$x = a$	$\rightarrow$	$y = ...$
$\underline{x = b}$	$\rightarrow$	$\underline{y = ...}$
$\Delta x = b - a$	$\rightarrow$	$\Delta y = ...$

De gemiddelde toename is dan: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = ...$

Het is tevens de richtingscoëfficiënt van het verbindingslijstuk tussen de twee punten.

Als we x voortdurend met bijvoorbeeld 1 laten toenemen, krijgen we een rij toenames van y.

Het **toenamediagram** is een grafische weergave van deze toenames. Bij $x = 7$ wordt de toename van y uitgezet als x toeneemt van 6 naar 7.



Helling

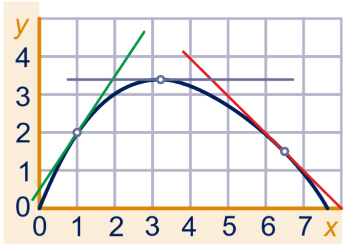
De vorm $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = ...$ bij een x-interval heet het **differentiequotiënt** en geeft de helling van de rechte lijn tussen twee punten op de grafiek.

Maak je het x-interval rondom een bepaalde waarde van x erg klein, bijvoorbeeld $\Delta x = 0{,}001$, dan krijg je met het differentiequotient de **helling in het punt**.

Dat is de richtingscoëfficiënt van de **raaklijn** aan de grafiek in dat punt.

Je kunt de helling in een punt ook vinden door de raaklijn te tekenen en van de raaklijn de richtingscoëfficiënt te bepalen.

De helling in een top (of dal) van de grafiek is nul.



Ongelijkheden

De gelijkheid $y = ax + b$ beschrijft een rechte lijn.

De **ongelijkheid** $y < ax + b$ beschrijft het gebied onder die rechte lijn.

De **ongelijkheid** $y > ax + b$ beschrijft het gebied boven die rechte lijn.

Als de ongelijkheid een andere vorm heeft, kun je een punt invullen om te bepalen welk gebied bij de ongelijkheid hoort.

Als er meer ongelijkheden een rol spelen, dan kun je bij elke ongelijkheid een grafiek tekenen en het bijbehorende gebied onder of boven de lijn aangeven. Het gebied dat voldoet aan **alle** ongelijkheden noemen we het **toegestane gebied**.

1

Bereken de coördinaten van het snijpunt van de lijnen met vergelijking:

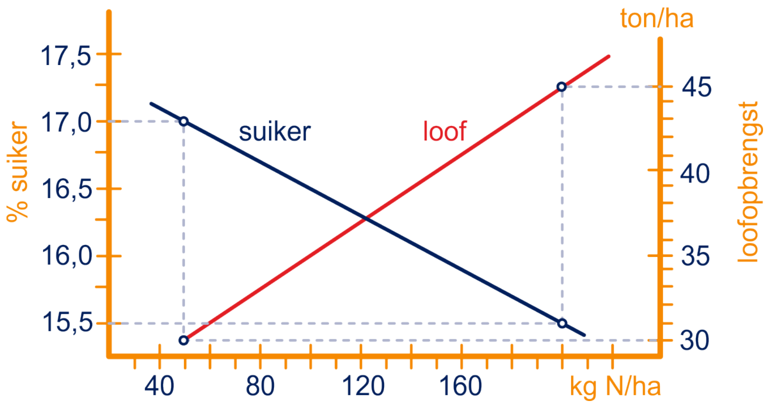
a $y = 3x - 12$ en $2x - 3y = 8$

b $2x + 3y = 18$ en $-x + 5y = 4$

c $3x - 5y = 15$ en $x - y = 6$

2

Een boer verbouwt suikerbieten. De suikerbieten zelf verkoopt hij aan de suikerfabriek, het loof gebruikt hij als veevoer.
Het suikergehalte en de hoeveelheid loof van de suikerbieten hangen sterk af van de bemesting met nitraat. Dat is in onderstaand plaatje weergegeven.



a Omschrijf in woorden de samenhang tussen bemesting en suikergehalte. Beschrijf ook de samenhang tussen bemesting en loofopbrengst.

S = percentage suiker van de biet
L = loofopbrengst (in tonnen per ha)
N = bemesting met nitraat (in kg per ha)

b Stel een formule op voor beide verbanden.

c Heeft het snijpunt van de grafieken betekenis?

Wat de suiker betreft, is de suikerbietenteelt alleen rendabel als het suikergehalte ten minste 15,9% is. Wat het loof betreft, is de bietenteelt alleen rendabel als de opbrengst ten minste 37 ton per ha is.

d Bereken de minimale hoeveelheid nitraat die de boer per ha mag gebruiken, opdat de loofopbrengst rendabel is.
Bereken de maximale hoeveelheid nitraat die de boer mag gebruiken, opdat de suikeropbrengst rendabel is.

e Hoeveel kg nitraat per ha mag de boer gebruiken opdat zowel de suiker- als de loofproductie rendabel zijn?

3

Lees het stukje hieronder.

De beschermingsfactor die op anti-zonnebrandmiddelen staat is geen onzin. In de Verenigde Staten waakt de dienst voor voedings- en geneesmiddelen, de FDA, over de juiste toepassing ervan. De beschermingsfactor is eenvoudig een vermenigvuldiger die aangeeft hoeveel keer zo lang je in de zon kunt blijven met het middel als zonder. Als je pas begint te zonnebaden en hooguit tien minuten in de zon kunt, mag je met een zonnebrandmiddel met factor 6 een uur in de zon blijven; het stukje huid dat je vergeten bent in te smeren is tegen die tijd wel goed verbrand.

...

De FDA erkent beschermingsfactoren tot 15, maar er zijn lotions op de markt die tot 30 of nog hoger gaan. Daarmee kun je, als ze werken, vijf uur in plaats van tien minuten in de zon blijven.

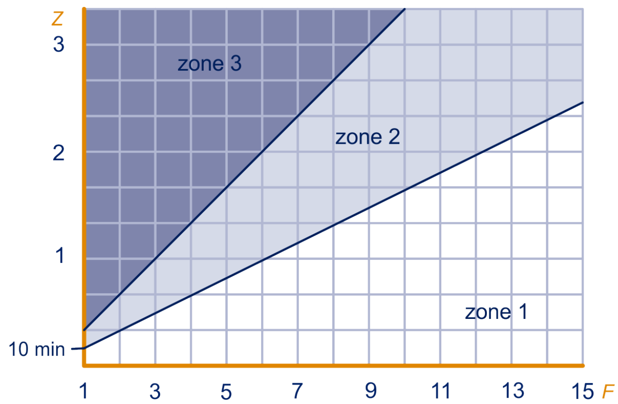
Uit: "De schaal van Richter en andere getallen", Hans van Maanen

De beschermingsfactor noemen we F, het aantal uren zonnebaden Z. We nemen een Nederlander met een normaal-gevoelige huid, die hooguit tien minuten zonder zonnebrandmiddel in de zon kan blijven.

a Welke factor heeft hij nodig om 2 uur in de zon door te kunnen brengen?

b Waarom bestaat er geen zonnebrandmiddel met factor 1?

Langs de horizontale as is F uitgezet, langs de verticale as is Z (in uren) uitgezet. Neem een punt in zone 1. Als je de daarbij behorende beschermingsfactor gebruikt en de bijbehorende tijdsduur wilt zonnebaden, dan kan dat veilig zonder te verbranden. Bij waarden voor F en Z uit zone 2 verbrandt je huid licht. In zone 3 verbrandt je huid ernstig (behandeling is noodzakelijk).



c Geef van beide grenslijnen een formule (gebruik de variabelen F en Z).
Gaan de lijnen door de oorsprong als je ze door zou trekken?

8.8 Extra opgaven

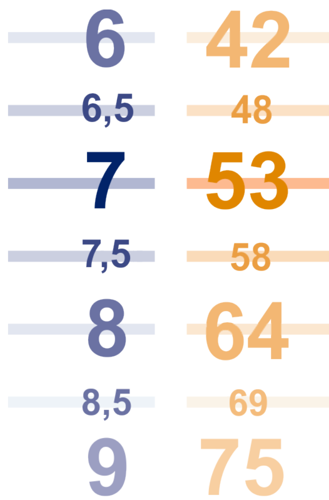
Vul ongelijkheden (met de variabelen F en Z) in:

d als ......, dan zal de huid niet verbranden,
als ......, dan zal de huid licht verbranden,
als ......, dan zal de huid ernstig verbranden.

Voor iemand met een heel gevoelige huid zal de grenslijn tussen zone 1 en zone 2 anders liggen.

e Hoe ligt deze grenslijn ten opzichte van de grenslijn bij een normaal-gevoelige huid?

4 Voor suikerziektepatiënten is de zogenaamde HbA_{1c}-waarde van belang. Die geeft de hoeveelheid versuikerd hemoglobine in het bloed aan. De HbA_{1c}-waarde is een maat voor de gemiddelde bloedglucosewaarde in de afgelopen 2 tot 3 maanden. Deze waarde wordt meestal door een laboratorium bepaald.
Tot 6 april 2010 werd die gemeten in procenten, daarna in mmol/mol.
Op de schaal staat links de oude waarde P (in procenten), en rechts de nieuwe waarde H (HbA_{1c} waarde). De waarden in deze tabel zijn afgeronde waarden.
Voorbeeld: als $P = 6$, dan $H = 42$.
H varieert tussen 0 en 200; goede waarden zijn als H tussen 42 en 75 ligt, met *streefwaarde* 53.



a Is er (bij benadering) een evenredig verband tussen P en H?

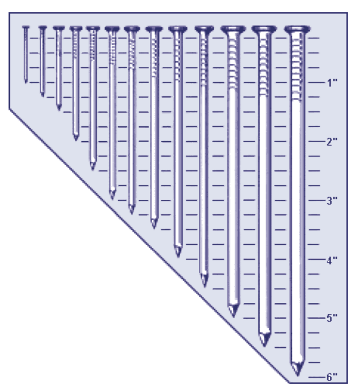
b Is er (bij benadering) een lineair verband tussen P en H?

c Geef een formule voor H uitgedrukt in P.

Een diabetespatiënt kan zijn eigen *glycemie* meten, dat is hoeveelheid glucose in het bloed (in millimol per liter).
Er is een verband tussen de glycemie G en de oude waarde P:
$G = 315{,}7P - 735{,}5$

d Geef een formule voor G uitgedrukt in de nieuwe waarde H.

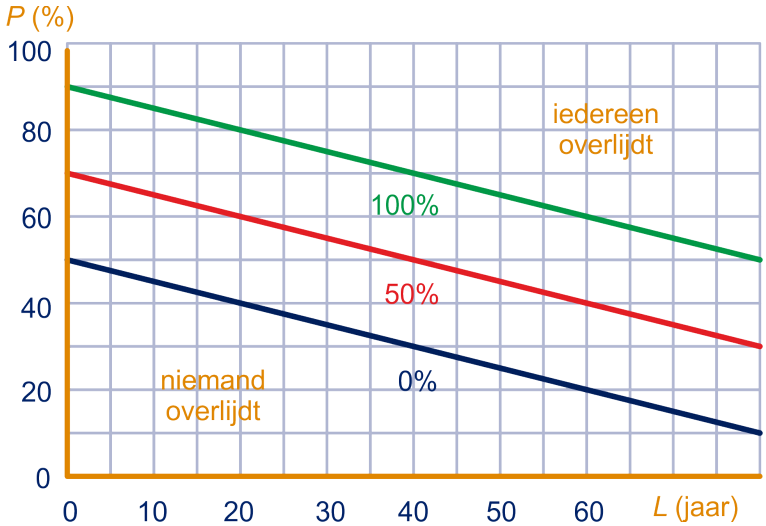
5 Gewone spijkers variëren in lengte van 2,5 tot 15 cm, en ze zijn zeer verschillend in gewicht: van de kleinste gaan er 1867 in een kilogram en van de grootste maar 24. Van een aantal standaardklassen is de lengte L en de diameter D (beide in cm) opgemeten en in de tabel hieronder zie je het verband tussen D^3 en L^2.



D^3	16	125	420	1000	1950	3375
L^2 (x 1000)	45	365	1230	2915	5695	9840

Geef aan de hand van de tabel een formule voor het verband tussen L als functie van D. Schrijf de formule als machtsfunctie.

6 Als oudere mensen een flink stuk van hun huid verbranden, is dat gauw dodelijk. Als jonge kinderen dat doen is er veel meer kans dat ze het overleven.



Hierboven staat een grafiek; P is het percentage van de huid dat verbrand is, L is de leeftijd van het slachtoffer in jaren.
De drie lijnen horen bij de sterftekansen 0%, 50% en 100%.

a Hoeveel procent van de huid mag bij een 40-jarige verbrand zijn om nog geen enkel gevaar te lopen om aan de brandwonden te overlijden?

b Hoe groot is de kans ongeveer om te overlijden voor een 60-jarige, wiens huid 30% verbrand is?

c Stel een formule op voor P en L voor de drie lijnen (de 0%-, 50%- en de 100%-lijn).

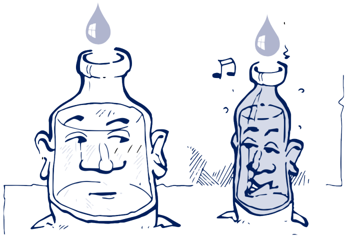
We onderscheiden drie zones:
1. de fatale zone: iedereen overlijdt,
2. de veilige zone: niemand overlijdt,
3. de risico zone: daartussen in.

d Beschrijf de drie zones met ongelijkheden.

We noemen de risicofactor R.
Dan kun je bij de grafiek een formule maken voor het verband tussen P, R en L:
$P = b + a \cdot R - 0{,}5L$, waarbij a en b constanten zijn.

e Bepaal de waarden van a en b en geef de formule.

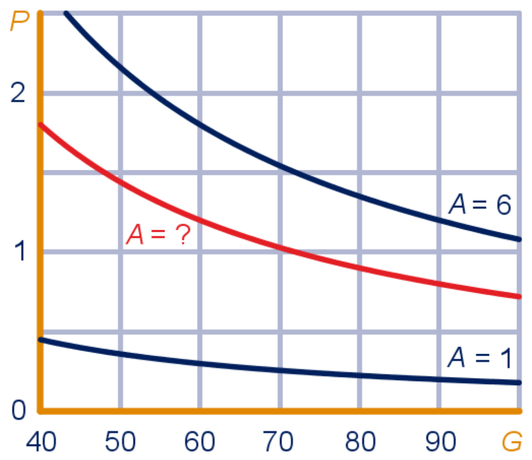
f Geef ook een formule voor R als functie van P en L.



7 Van alcohol word je dronken. Hoe dronken je wordt, hangt niet alleen af van het aantal glazen alcoholische drank, maar ook van je lichaamsgewicht. Het aantal glazen alcoholische drank noemen we A, het lichaamsgewicht G (in kg) en het alcoholpromillage in je bloed P. We nemen aan dat alle glazen evenveel alcohol bevatten.
Met de volgende vuistregel kun je P berekenen als je A en G kent: $P = 18 \cdot \frac{A}{G}$.
Deze formule geldt een half uur nadat je snel achter elkaar de glazen hebt gedronken.
Als je met een alcoholpromillage boven $0{,}5$ aan het verkeer deelneemt, ben je strafbaar.

a Bereken hoeveel glazen iemand van 72 kg maximaal kan drinken, wil hij nog aan het verkeer deel mogen nemen.

In de grafiek hieronder staan voor drie waarden van A de isolijnen getekend.



b Bepaal de ontbrekende (gehele) waarde van A. Geef ook een formule van P als functie van G bij deze grafiek.

Neem voor G het getal 72.

c Zijn A en P evenredige of omgekeerd evenredige grootheden? Geef een bijbehorende formule.

Neem voor A het getal 3.

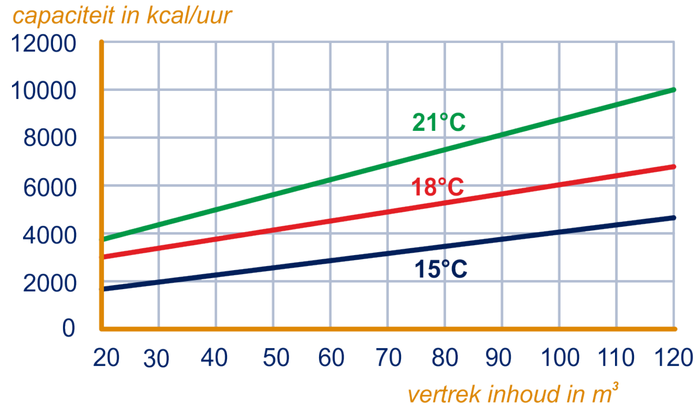
d Zijn P en G evenredige of omgekeerd evenredige grootheden? Geef een bijbehorende formule.

Neem voor P het getal 0,5.

e Zijn A en G evenredige of omgekeerd evenredige grootheden? Geef een bijbehorende formule.

8

In kleinere kamers staan meestal kleinere cv-radiatoren dan in grotere kamers. Dit heeft te maken met de zogenaamde capaciteit van de verwarming; dit is een maat voor de hoeveelheid warmte die een radiator af kan geven.
Hieronder zie je een grafiek waaruit je de benodigde capaciteit kunt aflezen als je de inhoud van de kamer kent.

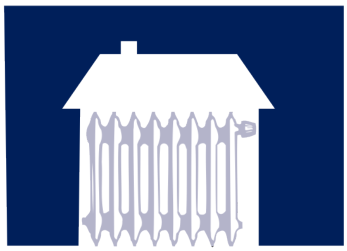


Een kamer van 8 m lang, 4 m breed en $2{,}60$ m hoog moet een temperatuur van $18°$C hebben.

a Welke capaciteit is nodig?

Dat de grafieken stijgend zijn is niet verwonderlijk. Ook niet dat de grafieken bij hogere temperaturen hoger liggen.

b Maar waarom lopen de grafieken niet evenwijdig?



Een radiator heeft een capaciteit van 8000 kcal/uur.

c Op welke temperatuur kan deze radiator een kamer van 110 m^3 ongeveer houden?

Een radiator heeft zo'n capaciteit dat een kamer van 50 m^3 op $18°$C gehouden kan worden.

d Hoeveel m^3 mag de kamer zijn die door dezelfde radiator op $15°$C kan worden gehouden?

e Bereken voor iedere lijn $\frac{\Delta C}{\Delta I}$.

Een kamer van 120 m^3 heeft een capaciteit van 6800 kcal/uur nodig om hem op $18°$C te houden.

f Bereken met je antwoord op vraag **e** hoeveel capaciteit een kamer van 144 m^3 nodig heeft om hem op $18°$C te houden.

g Stel voor elke lijn in de figuur een formule op.

Neem een vertrek met een inhoud van 100 m^3. Bij elke temperatuur T hoort een capaciteit C.

h Hoe kun je uit de grafieken concluderen dat het verband tussen T en C *niet* lineair is?

9 Een bedrijf heeft twee vestigingen: een oude en een nieuwe. De activiteiten worden geleidelijk van de oude vestiging naar de nieuwe verlegd. Op dit moment werken er in de oude vestiging 540 mensen. Naar verwachting zal dit aantal elke maand 25 minder worden. In de nieuwe vestiging werken op dit moment 40 mensen, terwijl de directie verwacht dat dit aantal elke maand met 40 zal toenemen. Het is dus niet voldoende werknemers van de oude naar de nieuwe vestiging over te plaatsen; er moet zelfs nieuw personeel worden aangenomen. We gaan er vanuit dat alle prognoses uitkomen.

Noem het aantal mensen dat in de oude vestiging werkt O, het aantal mensen dat in de nieuwe vestiging werkt N en het aantal maanden t.

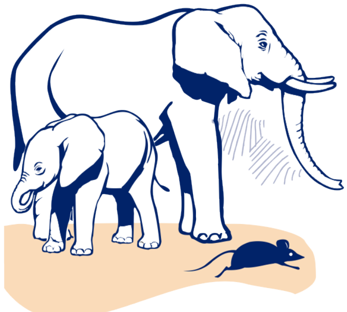
- **a** Stel bij beide vestigingen een formule op voor het aantal werknemers in de komende maanden.
- **b** Bereken met de formules over hoeveel maanden er op beide vestigingen evenveel mensen werken.
- **c** Bereken na hoeveel maanden de personeelsbezetting op de oude vestiging nog maar de helft is van die op de nieuwe vestiging.

Het bedrijf hanteert een formule voor het percentage P van de werknemers dat op elk moment werkt op de nieuwe vestiging:

$$P = \frac{800 + 800t}{116 + 3t}$$

- **d** Laat zien dat deze formule juist is.
- **e** Bereken met de formule na hoeveel maanden voor het eerst minder dan 5% van het totale aantal werknemers werkzaam is op de oude vestiging.

10 Uit onderzoek is gebleken dat er een verband bestaat tussen de lengte van diersoorten en het aantal diersoorten met die lengte. Met de lengte van een diersoort wordt bedoeld de gemiddelde lengte van volwassen dieren van die soort. Het blijkt dat er weinig lange diersoorten zijn en veel korte diersoorten. Uit gegevens die de onderzoeker Dobson verzamelde, blijkt dat bij benadering het aantal diersoorten van een bepaalde lengte omgekeerd evenredig is met het kwadraat van die lengte, ofwel $S \sim \frac{1}{L^2}$.
Hierin is L de lengte in meter en S het aantal diersoorten van die lengte. Het verband geldt voor $0{,}01 \leq L \leq 10$.



Het aantal diersoorten van 10 cm lang is veel groter dan het aantal diersoorten van 50 cm lang.

- **a** Bereken hoeveel maal zo groot.

Als de lengte van de dieren toeneemt van 25 naar 40 cm, dan neemt het aantal dieren toe met 6825.

b Bereken de evenredigheidsconstante.

Voor diersoorten met een lengte tussen 10 en 50 cm blijkt er ook een verband te bestaan tussen het gemiddelde gewicht van de volwassen dieren van een diersoort en het aantal diersoorten met dit gemiddelde gewicht: $D^3 \sim \frac{1}{G^2}$.
Hierin is G het gemiddelde gewicht in kilogram en D is het aantal diersoorten met dit gemiddelde gewicht.

Volwassen huiscavia's zijn gemiddeld 28 cm lang en hebben een gemiddeld gewicht van 1,1 kg.
Er zijn ongeveer 8000 diersoorten met hetzelfde gewicht als een cavia.

c Geef een formule voor D uitgedrukt in G. Schrijf de formule in de vorm $D = a \cdot G^b$.

11

De gegevens in onderstaande tabel zijn afkomstig van het CBS. De bevolking is het gemiddelde aantal mensen in het betreffende jaar in Nederland.

jaar	bevolking (x1000)	geboorte	sterfte	immigratie	emigratie	bevolkings-groei
2000	15.924	206.619	140.527	132.850	78.977	119.965
2001	16.044	202.603	140.377	133.404	82.566	113.064
2002	16.149	202.083	142.355	121.250	96.918	84.060
2003	16.225	200.297	141.936	104.514	104.831	56.044
2004	16.282	194.007	136.553	94.019	110.235	41.238
2005	16.320	187.910	136.402	92.297	119.725	24.080
2006	16.346	185.057	135.372	101.150	132.470	18.365
2007	16.382	181.336	133.022	116.819	122.576	42.557
2008	16.446	184.634	135.136	143.516	117.779	75.235
2009	16.530	184.915	134.235	146.378	111.897	85.161
2010	16.615	183.866	135.895	154.432	121.351	81.052

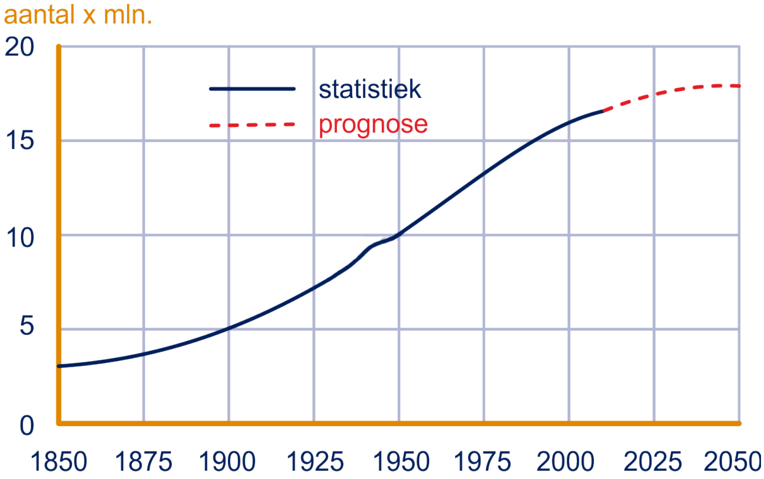
a Hoe hangt de laatste kolom samen met de kolommen Geboorte, Sterfte, Immigratie en Emigratie?

b Maak een toenamediagram van de groei van Nederlandse bevolking per jaar.

De Nederlandse bevolking bedroeg op 1 januari 2007 16.359 duizend mensen.

c Hoe groot was de Nederlandse bevolking op 1 januari 2008, denk je?
Waarom kun je dat niet zeker weten?

Hieronder staat de grafiek van de ontwikkeling van de Nederlandse bevolking vanaf 1850. De figuur staat ook op het werkblad.



d Verklaar de kleine dip net vóór 1950.

e Tot wanneer ongeveer was er sprake van toenemende stijging van de Nederlandse bevolking.
Hoe ontwikkelde de bevolking zich daarna?

In de periode 1950-1975 groeide de Nederlandse bevolking vrij constant.

f Met hoeveel mensen groeide Nederland in die periode gemiddeld per jaar?

g In welk jaar groeide de Nederlandse bevolking net zoveel als in het jaar 1900? Licht je werkwijze toe.

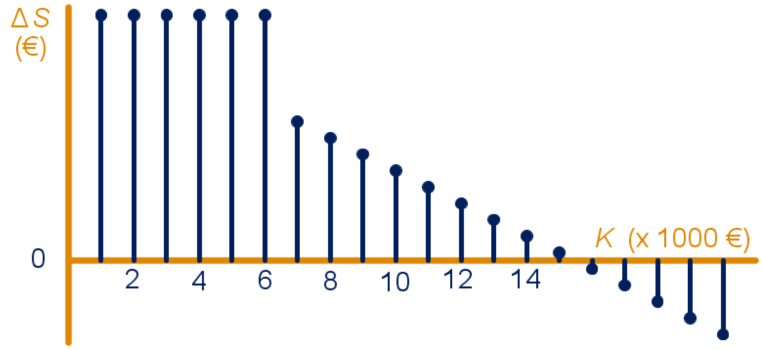
12 Er bestaat een mogelijkheid om als sportclub een subsidie te krijgen als deze zijn accommodatie uit wil breiden. Hieronder zie je de regeling vermeld.

> Zijn de kosten €6000,- of minder, dan is de subsidie 12% van de kosten.
> Voor bedragen boven de €6000,- wordt het percentage gelijkmatig verminderd en wel zo dat voor iedere €1000,- boven de €6000,- er 0,5% van de 12% af gaat.
> Het nieuwe percentage wordt over de totale kosten berekend.

a Laat met een berekening zien dat bij € 7500,— kosten het subsidiepercentage $11{,}25\%$ is.

b Bereken de subsidie als de kosten € 7500 zijn.

Voor alle mogelijke kosten berekent men de subsidie. Van de grafiek van de subsidie is een toenamediagram gemaakt. Het toenamediagram staat hieronder. De kosten in duizenden euro's noemen we K, het subsidiebedrag (in euro) S.



c Bereken de hoogte van het staafje in het toenamediagram bij $K = 9$.

d Geef met behulp van het toenamediagram een schatting van de kosten waarbij de subsidie maximaal is.

Voor kosten boven de 6000 euro kun je een formule maken voor de subsidie S (in euro) als functie van K:

$S = 150K - 5K^2$

e Laat dit zien.

Hint 10.

f Bereken met de formule voor welke kosten de subsidie maximaal is en bereken het maximale subsidiebedrag.

g Bereken met de formule de gemiddelde toename van S op het interval $[a - 1, a]$.

h Wat heeft de uitkomst van vraag **g** te maken met het toenamediagram?

13 Een mossel bestaat voor een deel uit schelp en voor een deel uit vlees. Er bestaat een verband tussen de schelplengte L (in mm) en het gewicht van het vlees W (in grammen) van mosselen.
Bij een onderzoek naar dit verband bij de gewone mossel in de Waddenzee worden van een groot aantal van deze mosselen de schelplengte en het gewicht van het vlees gemeten. In de tabel zijn bij verschillende lengten de gemiddelde vleesgewichten vermeld.

L (in mm)	30	40	50	60	70
W (in grammen)	0,12	0,28	0,55	0,95	1,51

We nemen aan dat W evenredig is met een macht van L. Bij de tabel hoort dus een formule van de vorm $W = a \cdot L^b$.
Bereken a en b.

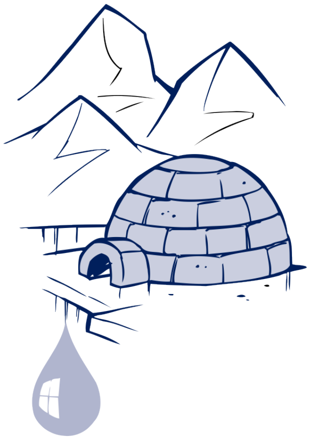
Naar examen havo wisB Pilot 2011 tweede tijdvak

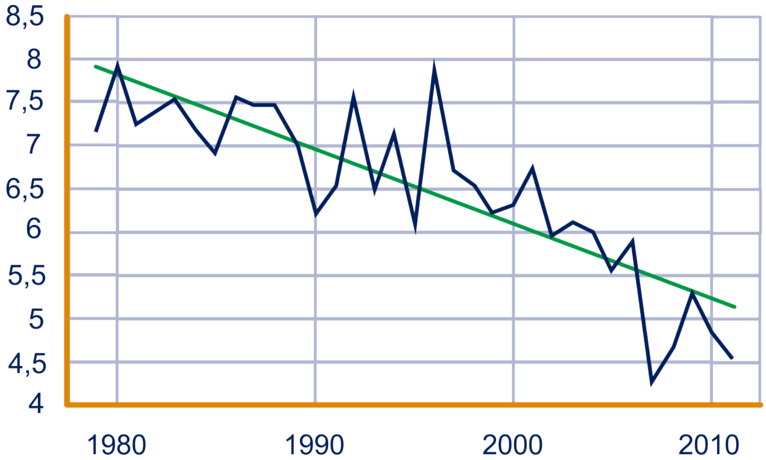
14

De omtrek van een rechthoek is 28 m.
De oppervlakte van die rechthoek is 24 m^2.
Stel een stelsel vergelijkingen op met de breedte b en de hoogte h, allebei in meter, en bereken met behulp van *ontbinden* hoe lang de zijdes van de rechthoek zijn.

15

De hoeveelheid ijs op de Noordpool lijkt steeds minder te worden. Het is natuurlijk niet zo dat de hoeveelheid voortdurend afneemt, want hij schommelt met de seizoenen. Daarom moet er elk jaar op hetzelfde tijdstip gemeten worden, bijvoorbeeld in september, aan het eind van de zomer. En dan zijn er nog grote verschillen tussen het ene en het andere jaar.





Op de verticale as staat de ijsoppervlakte op de Noordpool in miljoenen km^2, in september.

a Lees uit het plaatje af hoeveel procent meer ijs er in het topjaar was dan in het dieptepunt.

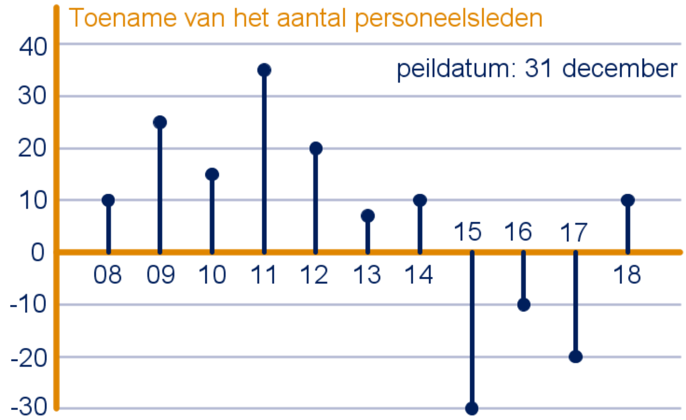
Om aan te geven dat de hoeveelheid ijs op de Noordpool steeds minder wordt is een zogenaamde trendlijn getekend. Daaromheen schommelen de werkelijk gemeten waarden.

b Stel een formule op voor de trendlijn, waarbij y de ijsoppervlakte in miljoenen km^2 is en j de tijd gemeten in jaren vanaf september 2000. Voorbeeld: $j = -5$ in september 1995.

Veronderstel dat de trend zich voortzet.

c In welk jaar is de Noordpool dan geheel ijsvrij?

16 In een bedrijf is een aantal jaren achter elkaar steeds op 31 december uitgerekend hoeveel personeelsleden er in het afgelopen jaar in totaal zijn bijgekomen of afgegaan. De resultaten staan in het toenamediagram hieronder.
In het diagram kun je bijvoorbeeld aflezen dat er tussen 31 december 2008 en 31 december 2009 in totaal 25 personeelsleden zijn bijgekomen.
Op 31 december 2013 had het bedrijf 430 personeelsleden.



a Bereken het aantal personeelsleden bij het bedrijf op 31 december 2018 en op 31 december 2008.
b In welk jaar was het aantal personeelsleden aan het eind van het jaar het grootst? Wat was toen het aantal?

Tussen 31 december 2013 en 31 december 2015 heeft het bedrijf 53 nieuwe mensen aangenomen.
c Hoeveel mensen hebben in deze periode het bedrijf verlaten?
d In welke periode(n) was er bij dit bedrijf sprake van afnemende groei?

17 Hieronder zie je twee tabellen A en B.

A

x	1	4
y	1,2	4,8

B

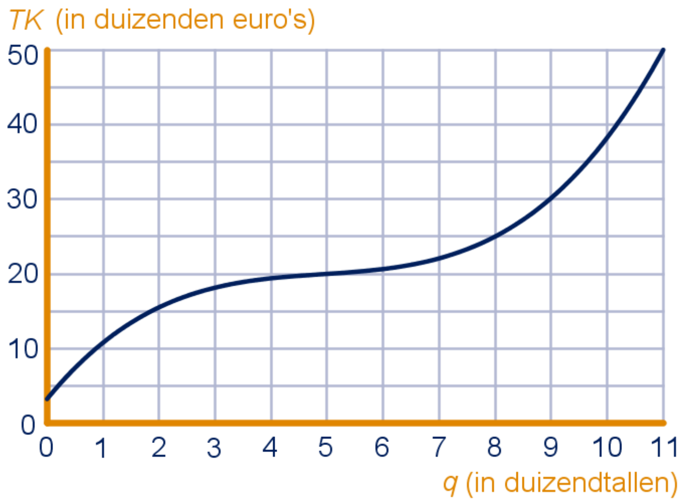
x	1	4
y	4,8	1,2

Omdat er te weinig gegevens zijn, is niet te zeggen welk soort verband er tussen x en y is: er zijn (oneindig) veel mogelijkheden.

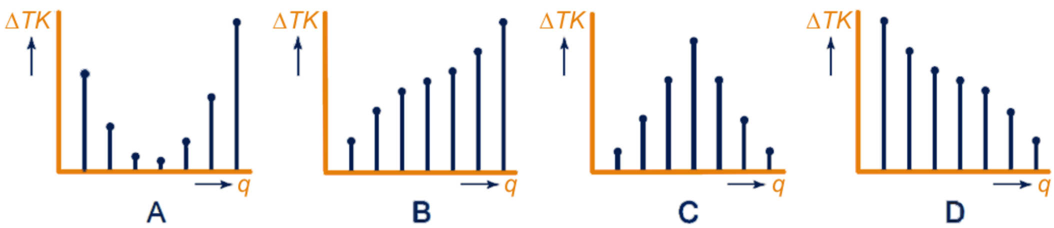
Maak, indien mogelijk, bij beide tabellen een formule voor y uitgedrukt in x, indien er sprake is van:
- een (recht) evenredig verband;
- een omgekeerd evenredig verband;
- een lineair verband;
- een exponentieel verband.

18

Een bedrijf maakt bijzondere verpakkingen. Het bedrijf heeft onderzocht hoe de kosten voor het maken van die verpakkingen samenhangen met het aantal verpakkingen. Het verband tussen de totale kosten TK (in duizenden euro's) en het aantal geproduceerde verpakkingen q (in duizendtallen) zie je in de figuur hieronder. Deze figuur staat ook op het werkblad.
In de grafiek lees je bijvoorbeeld af dat bij een productie van 9000 verpakkingen de totale kosten (ongeveer) 30.000 euro zijn.



Hieronder zie je vier diagrammen, A, B, C en D, waarin de toename ΔTK van TK is weergegeven. Eén van de vier diagrammen past bij de grafiek hierboven.



a Welke toenamediagram past bij de grafiek? Licht je antwoord toe.

De *marginale* kosten MK geven de veranderingen van de totale kosten weer: het geeft aan hoeveel de kosten veranderen als het bedrijf één product meer gaat maken.
Er is een productiehoeveelheid q waarbij de marginale kosten zo klein mogelijk zijn.

b Bepaal met de figuur op het werkblad een schatting van het aantal verpakkingen waarbij de marginale kosten het laagst zijn. Hoe groot zijn dan de marginale kosten?

Bij de grafiek hoort de volgende formule:
$TK = 0{,}12q^3 - 1{,}77q^2 + 9{,}2q + 3{,}25$.
Je kunt met de formule bij elke productie precies berekenen wat de marginale kosten zijn.

c Bereken met de formule de marginale kosten bij een productie van 2000 verpakkingen. Rond je antwoord af op 2 decimalen.

Voor het bedrijf zijn ook de *gemiddelde* kosten (GK) van belang: dat is hoeveel elke verpakking gemiddeld kost bij een bepaalde productie.
Bijvoorbeeld bij een productie van 9000 verpakkingen zijn de totale kosten 30.000 euro, dus de gemiddelde kosten per verpakking is dan gelijk aan $\frac{30.000}{9000} \approx 3{,}3$ euro.
In de grafiek is deze uitkomst gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de lijn door $(0{,}0)$ en $(9{,}30)$.

d Bepaal met de grafiek op de uitwerkbijlage bij welke productie q de gemiddelde kosten per product het laagst zijn.
Hoe groot zijn dan de gemiddelde kosten per product?

19

Een aardewerkfabriek wilde profiteren van de laatste troonwisseling. Ze gaan daarom mokken en borden maken met plaatjes van Beatrix en Willem-Alexander erop.
Voor een mok is 200 gram porceleinklei nodig en 16 cm^2 decoratiemateriaal. Voor een bord is 250 gram porceleinklei nodig en 10 cm^2 decoratiemateriaal.
Er is een voorraad van 20 kg porceleinklei en 1200 cm^2 decoratiemateriaal.
Noem het aantal mokken x en het aantal borden y.

Er geldt natuurlijk $x \geq 0$ en $y \geq 0$.

a Welke twee andere ongelijkheden gelden?

b Teken het toegestane gebied. Laat de assen lopen van 0 tot en met 120.

c Bereken de coördinaten van de hoekpunten van het toegestane gebied.

Op een mok maakt de fabriek $1{,}50$ euro winst, op een bord $1{,}75$ euro.

d Hoeveel mokken en hoeveel borden moeten ze maken om zoveel mogelijk winst te maken?
Hoeveel winst hebben ze dan?

20 Tijdens een warme zomer is het voor de supermarkt niet eenvoudig om voldoende bier in voorraad te hebben.
De brouwerij kan niet altijd de gewenste bestellingen op tijd leveren.
De supermarkt is blij dat de brouwerij vandaag 520 liter bier levert, in kratten halve liters en kratten pijpjes. Het aantal kratten pijpjes is tweemaal zoveel als het aantal kratten halve liters.
In een pijpje zit $\frac{1}{3}$ liter bier; er zitten 24 pijpjes in een krat.
Er zitten 20 halve liters in een krat.

a Hoeveel liter bier zit er in een krat pijpjes? En in een krat halve liters?

De supermarkt krijgt x kratten pijpjes en y kratten halve liters. Dat het totaal aantal kratten 520 liter bevat geeft een verband tussen x en y.

b Geef een formule van dit verband.

c Teken de grafiek. Zet x horizontaal $(0 \leq x \leq 70)$ en y verticaal $(0 \leq y \leq 60)$.

In de supermarkt worden twee keer zoveel kratten met pijpjes als met halve liters verkocht, daarom bestelt de supermarkt ook in deze verhouding bij de brouwerij.
Deze verhouding geeft een verband tussen x en y.

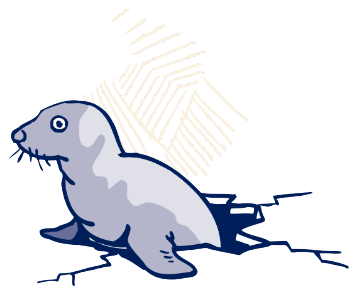
d Geef een formule voor dit verband.

e Teken de grafiek van dit verband in het rooster van vraag **c** erbij.

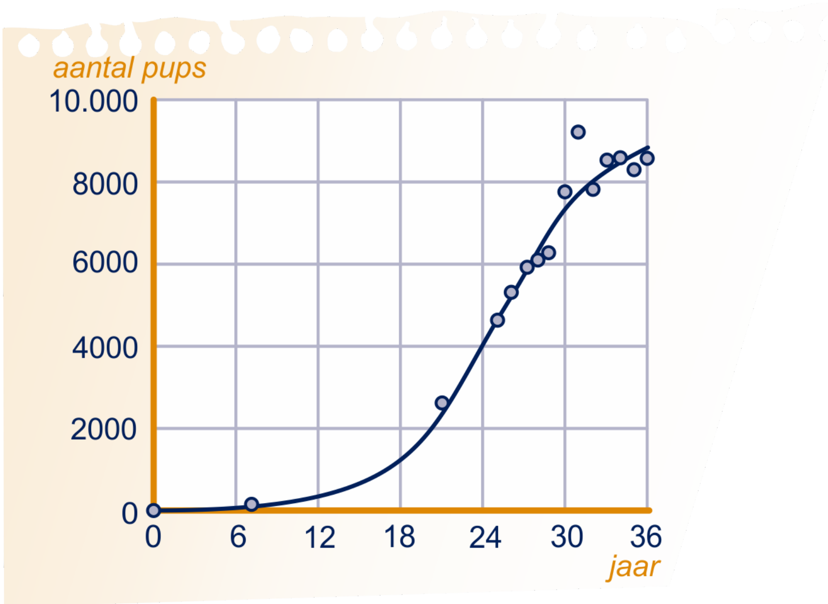
f Bereken de coördinaten van het snijpunt.

g Hoeveel kratten bier worden er van elk soort geleverd als de brouwerij 520 liter levert in de verhouding die de supermarkt wenst?

21 **De Antactische pelsrob**



Op eilandjes in de buurt van Antarctica leven weer grote populaties van de Antarctische pelsrob. Dat is bijzonder want ze waren bijna uitgeroeid. In het begin van de 19e eeuw is er namelijk zeer veel op deze robben gejaagd vanwege hun pels. Heel lang werd er geen enkel exemplaar gesignaleerd, maar ruim 50 jaar geleden werd er een kleine populatie ontdekt. De natuurlijke groei van deze populatie is gevolgd.
Sinds 1966 is met tussenpozen het aantal pups (jonge pelsrobben) geteld. In de figuur zijn deze aantallen met bolletjes weergegeven.



De bolletjes liggen bij benadering op de grafiek waarbij de volgende formule hoort:

$N = \dfrac{9300}{1 + 0{,}769^{t-25}}$

Hierin is N het aantal pups en t de tijd in jaren, met $t = 0$ op 1 januari 1966.

Op 1 januari 2002 werden er 8577 pups geteld.

a Bereken hoeveel procent het aantal volgens de formule afwijkt van het getelde aantal.

b Bereken met de formule in welk jaar het aantal pups voor het eerst groter is dan 9250.

Op 1 januari 1966 werden en 12 pups geteld. Op 1 januari 1992, 25 jaar later, werden er 4650 pups geteld. Tussen die jaren was er bij benadering sprake van exponentiële groei van het aantal pups.

c Bereken met hoeveel procent per jaar het aantal pups in deze periode is gegroeid.

Op $t = 25$ is de grafiek het steilst. De richtingscoëfficiënt is daar dus het grootst.

d Leg uit wat de richtingscoëfficiënt zegt over het aantal pups.

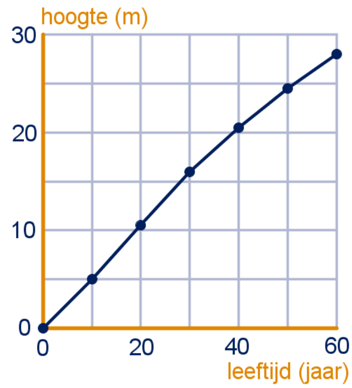
e Bereken met een differentiequotiënt de richtingscoëfficiënt van de grafiek op $t = 25$.

Naar: examen havo WA12 2008 tweede tijdvak

Interpoleren en extrapoleren

1

a Ongeveer 40 jaar.
b 22,5 m; 11,5 m (straks ga je dit preciezer uitrekenen)
c Nee; Ongeveer 17 à 18 jaar.
d Zie figuur.
e Deel de leeftijd door 2 om de hoogte in meters te krijgen.



2

a De beuk groeit bijna rechtlijnig en de populier duidelijk niet.
b De eik hoort bij de populier; ook afnemende groei.
c Voor de hoogte na 25 jaar heeft zij het gemiddelde genomen van de twee hoogten bij 10 jaar en 20 jaar. Voor de hoogte na 25 jaar het gemiddelde van de hoogten 20 jaar en 30 jaar.
d De hoogte bij 15 jaar klopt niet.
e Ongeveer 38 m.(?)

3

a Omtrek = $3{,}14 \cdot 66 = 207$ cm.
b Omtrek 160 cm → diameter 51 cm → leeftijd 36 à 37 jaar → hoogte 32 m (zie opgave 2).

4

a 4 meter in 10 jaar; 1,2 m in 3 jaar
b Hoogte = $20{,}5 + 1{,}2 = 21{,}7$ m
c In 10 jaar 3,5 m, dus 0,35 m per jaar; Na 58 jaar dus $24{,}5 + 8 \cdot 0{,}35 = 27{,}3$ m.

5

a 4 m groei in 10 jaar →1 m groei in 2,5 jaar.
Leeftijd = $40 + 3 \cdot 2{,}5 = 47{,}5$ jaar.
b Tussen 50 jaar en 60 jaar groeit hij 3,5 m→1 m groei in 2,86 jaar.
Leeftijd = $50 + 2 \cdot 2{,}86 = 55{,}7$ jaar.

6

a In 8 uur groeit het 24 kg → in 1 uur 3 kg.
Hoeveelheid om 16 uur is $10 + 4 \cdot 3 = 22$ kg.
b Hoeveelheid om 23 uur $34 + 3 \cdot 3 = 43$ kg.
Hoeveelheid om 10 uur $10 - 2 \cdot 3 = 4$ kg.

7

a In 5 uur 40 kg eraf → in 1 uur 8 kg eraf.
Na 19 uur $50 - 2 \cdot 8 = 34$ kg.
b 40 kg eraf in 5 uur → 1 kg eraf in 0,125 uur
Hoeveelheid van 22 kg bij $17 + 28 \cdot 0{,}125 = 20{,}5$ uur.

8

a In 26 uur 138 kg erbij → in 1 uur 5,3 kg erbij.
Na 30 uur $112 + 6 \cdot 5{,}3 = 143{,}8$ kg.

b Na 61 uur $250 + 11 \cdot 5{,}3 = 308{,}3$ kg

9

a 20 kg erbij in 70 uur → 1 kg erbij in 3,5 uur.
75 kg na $30 + 15 \cdot 3{,}5 = 82{,}5$ uur.

b 85 kg na $30 + 25 \cdot 3{,}5 = 117{,}5$ uur.

10

a De grafiek is geen rechte lijn.

b In 20 jaar 15 m erbij → in 1 jaar 0,75 m erbij.
Na20 jaar $14{,}5 + 10 \cdot 0{,}75 = 22$ m.
Dat scheelt 2 m met de werkelijke lengte.

11

a ... ; Nee, de groei van de wereldbevolking is onregelmatig.

b ... , Nee, je kunt niet uit de gegevens afleiden hoeveel mensen er per jaar (ongeveer) bij komen.

12

a In 5 jaar 35 duizend erbij → in 1 jaar 7 duizend erbij.
In het studiejaar 2002/2003 $166 + 2 \cdot 7 = 180$ duizend studenten.

b Nee, de groei van het aantal studenten is onregelmatig.

c In de afgelopen twee jaren komen er steeds 10 duizend studenten per jaar bij. Als die lijn zich zo voortzet, zouden er in het jaar 2020:
$233 + 11 \cdot 10 = 343$ duizend studenten zijn.(?)

d In het studiejaar 2009/2010, dan komen er 19 duizend studenten bij. In alle andere studiejaren is het minder dan 19 duizend studenten per jaar.

e In 9 jaar 90 duizend erbij → in 1 jaar 10 duizend erbij.

13

a -27°C

b bij 0 m/s: steeds -5
bij 5 m/s: steeds -7
bij 10 m/s: steeds -9
bij 15 m/s: steeds -9

c Tweede rij: -32; -39
Derde rij: -36; -45; -54
Vierde rij: -32; -41; -50; -59

d Bij 5 m/s: 5°C kouder voelt 7°C kouder aan →1°C kouder voelt 1,4°C kouder aan.
-13°C voelt aan als $-18 - 3 \cdot 1{,}4 = -22{,}2$°C.
Bij 10 m/s: 5°C kouder voelt 9°C kouder aan →1°C kouder voelt 1,8°C kouder aan.
-13°C voelt aan als $-27 - 3 \cdot 1{,}8 = -32{,}4$°C.
Bij -13°C: 5 m/s hardere wind voelt 10°C kouder aan →1 m/s harder voelt 2°C kouder aan.
Bij7 m/s hoort dus $-22{,}2 - 2 \cdot 2 = -26{,}2$°C.

14

a $g = \left(\frac{34}{10}\right)^{\frac{1}{8}} \approx 1{,}165$

b $10 \cdot 1{,}165...^4 \approx 18{,}4$ kg.

c Hoeveelheid om 23 uur: $34 \cdot 1{,}165...^3 \approx 53{,}8$ kg.
Hoeveelheid om 10 uur: $10 \cdot 1{,}165...^{-2} \approx 7{,}4$ kg.

Lineaire verbanden

15

a Benzine: $7695 + 5 \cdot 10.000 \cdot 0{,}31 = 23.195$ euro;
Elektrisch: $26490 + 5 \cdot 10.000 \cdot 0{,}26 = 39.490$ euro

b De kosten per km zijn $0{,}31$, dus bij x km zijn de kosten $0{,}31k$; tel daar de aanschapkosten nog bij op. $E = 0{,}26k + 26490$

c Oplossen: $0{,}31k + 7695 = 0{,}26k + 26490$ (met de GR of via $0{,}05k = 18795$)
$k = 375.900$ km. 38 jaar; 15 jaar

d 20% verlaging kosten elektrisch: prijsverschil per km wordt $0{,}31 - 0{,}208 = 0{,}102$ €; en bij 20% verhoging kosten benzine: prijsverschil per km wordt $0{,}372 - 0{,}26 = 0{,}112$ €; dus meeste effect heeft het verhogen van de kosten voor benzine-auto's.

16

a -

b Met de optie *intersect* van je GR: snijpunt $(6{,}4)$

17

a $4x - 5 = -2x - 1 \rightarrow 6x = 4 \rightarrow x = \frac{2}{3}$
$y = 4 \cdot \frac{2}{3} - 5 = -2\frac{1}{3}$, dus coördinaten snijpunt: $\left(\frac{2}{3}, -2\frac{1}{3}\right)$.

b $\frac{1}{4}x + 7 = \frac{1}{2}x + 9 \rightarrow x + 28 = 2x + 36 \rightarrow -8 = x$
$y = \frac{1}{4} \cdot -8 + 7 = 5$, dus coördinaten snijpunt: $(-8{,}5)$.

c $1{,}3x = -0{,}9x - 5 \rightarrow 2{,}2x = -5 \rightarrow x = \frac{-5}{2{,}2} = -2\frac{3}{11}$
$y = 1{,}3 \cdot -2\frac{3}{11} = -2\frac{21}{22}$, dus coördinaten snijpunt: $\left(-2\frac{3}{11}, -2\frac{21}{22}\right)$.

d $x + \frac{5}{8}x = 10 \rightarrow 1\frac{5}{8}x = 10 \rightarrow x = 6\frac{2}{13}$
$y = 10 - 6\frac{2}{13} = 3\frac{11}{13}$, dus coördinaten snijpunt: $\left(6\frac{2}{13}, 3\frac{11}{13}\right)$.

18

a In $14 - 6 = 8$ minuten stijgt Anneke $990 - 750 = 240$ m. Dus per minuut stijgt Anneke $\frac{240}{8} = 30$ m. richtingscoëfficiënt = 30

b Op hoogte $750 - 6 \cdot 30 = 570$ m.

c $h = 30t + 570$

d $1800 = 30t + 570 \rightarrow 1230 = 30t \rightarrow 41 = t$
Dus 41 minuten zit Anneke in de kabelbaan.

19

a Aflossing per jaar is $\frac{100.000}{40} = 2500$.
Schuld na het zesde jaar is dan nog $100.000 - 6 \cdot 2500 = 85.000$ euro.

b $100.000 - 27 \cdot 2500 = 32.500$ euro

c $100.000 - 2500x$ euro

20

a $P = 1\frac{1}{2}t + 11$

b In 5 weken stijgt P 15 kg; per week dus 3 kg; $P = 3t + 25$

21

a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - -5}{7 - -5} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

b Neem bijv. punt $(7{,}3)$; $y = \frac{2}{3}x + b \rightarrow 3 = \frac{2}{3} \cdot 7 + b \rightarrow b = -1\frac{2}{3} \rightarrow y = \frac{2}{3}x - 1\frac{2}{3}$.

c Vergelijken met de hoogte van het snijpunt met de y-as: klopt.

22

a De uitgeademde lucht heeft altijd dezelfde temperatuur.

b De uitgeademde lucht heeft een lagere temperatuur dan de buitenlucht.

c Eend: $U = 0{,}42I + 22{,}6$; mus: $U = 0{,}54I + 15{,}6$; mens: $U = 34$; winterkoninkje: $U = 0{,}7I + 8{,}7$; buidelrat: $U = 1{,}2I - 9{,}2$

23

a In 11 jaar tijd daalt de oplage van de Libelle met 230 duizend, dus per jaar een daling van 20,9 duizend; $L = 650 - 20{,}9t$
In 11 jaar tijd daalt de oplage van de Margriet met 190 duizend, dus per jaar een daling van 17,3 duizend; $M = 430 - 17{,}3t$
In 11 jaar tijd daalt de oplage van de Viva met 70 duizend, dus per jaar een daling van 6,4 duizend; $V = 150 - 6{,}4t$

b $0 = 650 - 20{,}9t \rightarrow 20{,}9t = 650 \rightarrow t = 31$, dus in het jaar 2031.

c De richtingscoëfficiënten verschillen weinig.

d De oplage van Magriet is ongeveer 3 keer zo groot als de oplage van Viva, want $\frac{450.000}{150.000} \approx \frac{360.000}{120.000} \approx \frac{260.000}{90.000}$.
Tussen Libelle en Viva wordt de verhouding steeds groter, want $\frac{660.000}{150.000} < \frac{560.000}{120.000} < \frac{440.000}{90.000}$.

e $L + M + V = 650 - 20{,}9t + 430 - 17{,}3t + 150 - 6{,}4t = 1230 - 44{,}6t$

24

a $v = 1000 \rightarrow B = 86$ en dat is 100%;
Vaste vergoeding van 52 euro is dan $\frac{52}{86} \cdot 100\% = 60{,}5\%$.

b Het percentage wordt kleiner. Als het verbruik v toeneemt, dan wordt B groter. Het vastrecht blijft gelijk, dus de breuk $\frac{52}{B}$ wordt kleiner, dus het percentage wordt kleiner.

c Dan totale bedrag $B = 104 \rightarrow 104 = 0{,}034v + 52 \rightarrow 52 = 0{,}034v \rightarrow v \approx 1529$ kWh

d Het pijltje staat ongeveer bij 40%, dus 52 € is 40% van B
$\rightarrow B = \frac{100}{40} \cdot 52 = 130 \rightarrow v = \frac{130-52}{0{,}034} = 2294$ kWh.

25

a Aflezen op de trendlijn: van -16,5 naar 2,5 is 19 cm stijging

b 1996 (afwijking 10 cm)

c In 1900 -16,5 cm en in 2000 2,5 cm, dus rc $= 0{,}19$; $Z = 0{,}19t - 16{,}5$;
$t = 150$ invullen: $Z = 12$ cm; bandbreedte ± 8 cm

d $Z = 0{,}19(j - 1900) - 16{,}5 = 0{,}19j - 377{,}5$

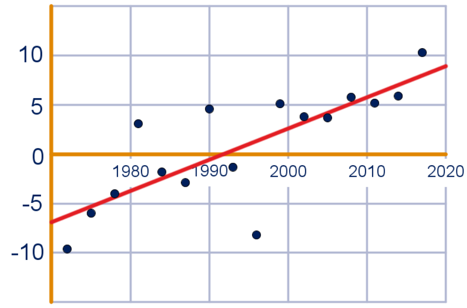
26

a Zie figuur.

b Bijvoorbeeld: $Z = 0{,}32t - 7$ (kan veel verschillen).

c -

d $t = 78$ invullen geeft $Z \approx 18$ cm, dus dat is aardig wat meer.



27

a Vanaf 1970 lijkt er een trendbreuk te zijn: de temperatuur nam eerst maar langzaam toe en dan ineens veel sneller.

b In 1980 is volgens de kromme de temperatuur 9,5°C en in 2017 10,9°C;
dus $a = \frac{1,4}{37} \approx 0,0378$ en $b = 9,5$;
Voorspelling: $T = 0,0378(2050 - 1980) + 9,5 \approx 12,1°C$

c In het begin van de vorige eeuw: rc $= \dfrac{\Delta T}{\Delta j} = \dfrac{9,2 - 8,95}{1970 - 1910} \approx 0,004$; In de laatste jaren was de richtingscoëfficiënt $0,0378$, dus dat is (ongeveer) 9 keer zo groot.

28

a Aflezen: in 1976 5100 kWh en in 2015 11000 kWh, dus
de gemiddelde toename is $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{11000 - 5100}{2015 - 1976} = \dfrac{5900}{39} \approx 151$ kWh per jaar

b Aantal inwoners in 1976: $\frac{5100}{370} \approx 13,78$ miljoen; in 2015: $\frac{11000}{650} \approx 16,92$ miljoen;
$\dfrac{16,92 - 13,78}{13,78} \cdot 100\% \approx 22,8\%$

c rc $= \dfrac{708 - 650}{7} = 8,29$, dus per jaar neemt het verbruik hiermee af; het verbruik moet nog $650 - 370 = 280$ dalen, dus dat duurt $\frac{280}{8,25} \approx 33,8$ jaar;
Dat is dus in 2048 (of 2049).

29

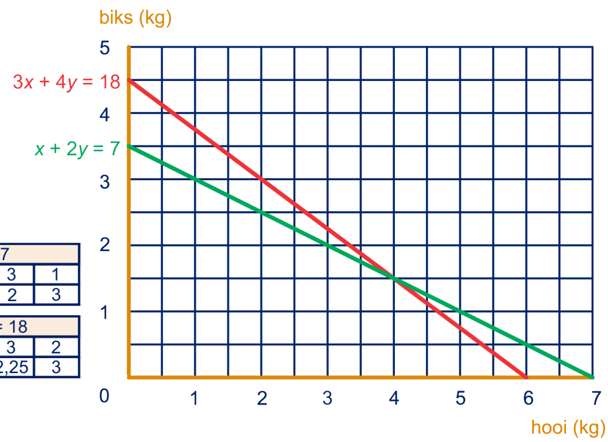
a Zetmeel: $300x + 600y$ gram; eiwit: $60x + 80y$ gram

b Zetmeel: $300x + 600y = 2100$; delen door 300 geeft $x + 2y = 7$;
Eiwit: $60x + 80y = 360$; delen door 20 geeft $3x + 4y = 18$

c Zie figuur.

zetmeel	$x + 2y = 7$			
x	0	7	3	1
y	3,5	0	2	3

eiwit	$3x + 4y = 18$			
x	0	6	3	2
y	4,5	0	2,25	3



d Zetmeel: $y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$; eiwit: $y = -\frac{3}{4}x + 4\frac{1}{2}$;
Gelijkstellen: $-\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2} = -\frac{3}{4}x + 4\frac{1}{2} \rightarrow -2x + 14 = -3x + 18 \rightarrow x = 4$ en $y = 1\frac{1}{2}$;
Dus: 4 kg hooi en 1,5 kg biks.

e $3(7 - 2y) + 4y = 18 \rightarrow 21 - 6y + 4y = 18 \rightarrow 21 - 2y = 18\ 3 = 2y \rightarrow y = 1\frac{1}{2}$ en $x = 4$

30

a $2(3x - 2) + x = 10 \rightarrow 6x - 4 + x = 10 \rightarrow 7x = 14 \rightarrow x = 2$
$y = 3 \cdot 2 - 2 = 4$; snijpunt $(2,4)$

b $2x + 4y = 11 \rightarrow 2x = 11 - 4y \rightarrow 4x = 22 - 8y$
$-4 + 5y = 22 - 8y \rightarrow 13y = 26 \rightarrow y = 2$
$\rightarrow 4x = 22 - 8 \cdot 2 = 6 \rightarrow x = 1\frac{1}{2}$; snijpunt $\left(1\frac{1}{2},2\right)$

c $-5x + 2y = 20 \rightarrow -5x = 20 - 2y \rightarrow 10x = -40 + 4y$
$\frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}y \rightarrow 5 = 10x - 5y \rightarrow 5 + 5y = 10x$
$4y - 40 = 5 + 5y \rightarrow y = -45 \rightarrow 10x = 4 \cdot -45 - 40 = -220 \rightarrow x = -22$; snijpunt $(-22,-45)$

d $2x + 2y = 3 \rightarrow 2x = 3 - 3y \rightarrow 6x = 6 - 9y$
$6x - y = 1 \rightarrow 6x = 1 + y$
$6 - 9y = 1 + y \rightarrow 5 = 10y \rightarrow \frac{1}{2} = y$
$6x - \frac{1}{2} = 1 \rightarrow 6x = 1\frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{4}$; snijpunt $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

e $2x - 5y = 7 \rightarrow 2x = 7 + 5y$
$-2x + 13y = 1 \rightarrow 13y = 1 + 2x \rightarrow 13y - 1 = 2x$
$7 + 5y = 13y - 1 \rightarrow 8 = 8y \rightarrow 1 = y$
$2x = 7 + 5 \cdot 1 = 12 \rightarrow x = 6$; snijpunt $(6{,}1)$

f $3x - 2y = 16 \rightarrow 3x = 16 + 2y \rightarrow 6x = 32 + 4y$
$2x + y = 6 \rightarrow 2x = 6 - y \rightarrow 6x = 18 - 3y$
$32 + 4y = 18 - 3y \rightarrow 14 = -7y \rightarrow -2 = y \rightarrow 6x = 32 + 4 \cdot -2 = 24 \rightarrow x = 4$
Snijpunt $(4,-2)$

31 Koppen: $3r + 4g = 111$; staarten: $2r + 3g = 79$;
17 rode en 15 groene draken

32 Stelsel: $\begin{cases} 5x + 8y = 16{,}50 \\ 4x + 2y = 7{,}70 \end{cases}$

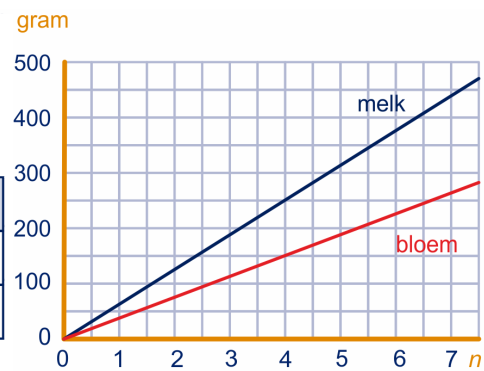
$5x + 8y = 16{,}50 \rightarrow 20x = 66 - 32y$ en
$4x + 2y = 7{,}70 \rightarrow 20x = 38{,}50 - 10y$, dus
$66 - 32y = 38{,}50 - 10y \rightarrow 27{,}50 = 22y \rightarrow 1{,}25 = y$
Een fles sinas kost 1,25 euro en een fles cola kost $\frac{66-32\cdot1{,}25}{20} = 1{,}30$ euro.
10 cola en 7 sinas kosten dus 21,75 euro.

Evenredigheden

33

a $\frac{600}{8} \cdot 3 = 225$ gram bloem ; $\frac{600}{8} \cdot 5 = 375$ gram melk
b $\frac{100n}{8} \cdot 3 = 37{,}5n$ gram bloem ; $\frac{100n}{8} \cdot 5 = 62{,}5n$ gram melk
c Zie figuur.

n	1	2	3	4	6	*n*
hoeveelheid bloem (gr.)	37,5	75	112,5	150	225	37,5*n*
hoeveelheid melk (gr.)	62,5	125	187,5	250	375	62,5*n*



d $m = \frac{5}{3} \cdot 360 = 600$; $b = \frac{3}{5} \cdot 360 = 216$
e $m = \frac{5}{3}b$ ($\approx 1{,}67b$)

34

a $P = \pi \cdot d$ (want $d = 2 \cdot r$)
b Zie figuur.

muntsoort in eurocenten	1	2	5	10	20	50	100	200
diameter in mm	16,25	18,75	21,25	19,75	22,25	24,25	23,25	25,75
omtrek in mm	51,05	58,90	66,76	62,05	69,90	76,18	73,04	80,90

c 2 euro en 2 ct:
Diameters: $\frac{25{,}75}{18{,}75} \approx 1{,}3733...$; omtrekken: $\frac{80{,}90}{58{,}90} \approx 1{,}3735..$ (dus *bijna* gelijk)
1 euro en 5 ct:
Diameters: $\frac{23{,}25}{21{,}25} \approx 1{,}0941...$; omtrekken: $\frac{73{,}04}{66{,}76} \approx 1{,}0940..$ (dus *bijna* gelijk)
d De omtrekken zijn afgerond op 2 decimalen; als de onafgeronde waarden waren gebruikt, dan was er wél hetzelfde uitgekomen.

35

a De omtrek van de aarde is $2\pi r = 40.000$ (km). De omtrek van het touw in de nieuwe situatie is $2\pi(r + x) = 2\pi r + 2\pi x = 40.000 + 2\pi x$; Dus $2\pi x$ moet 1 meter worden → $x = \frac{1}{2\pi} \approx 0159$ meter, ofwel 15,9 cm.
b Of je in de vorige vraag voor $2\pi r$ een andere waarde neemt (de omtrek van de munt), maakt niet uit. Ook nu geldt $2\pi x = 1$, dus ook hier is de afstand 15,9 cm.

36

a $V = 1{,}67 \cdot G$; de evenredigheidsconstante is 1,67
b $V = \pi \cdot r^2; V = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}d\right)^2 = \frac{1}{4}\pi \cdot d^2$
c 1 cent: $V = \frac{1}{4}\pi \cdot 16{,}25^2 \cdot 1{,}67 \approx 346{,}35$ mm^3;
2 cent: $V = \frac{1}{4}\pi \cdot 18{,}75^2 \cdot 1{,}67 \approx 461{,}11$ mm^3;
5 cent: $V = \frac{1}{4}\pi \cdot 21{,}25^2 \cdot 1{,}67 \approx 592{,}28$ mm^3
d Als $W = c \cdot V$ dan $c = \frac{W}{V}$, telkens uitrekenen:
1 cent: $c = \frac{2{,}30}{346{,}35} = 0{,}006640...$;
1 cent: $c = \frac{3{,}06}{461{,}11} = 0{,}006636...$;
1 cent: $c = \frac{3{,}92}{592{,}28} = 0{,}006618...$;
De waarde van c is inderdaad (ongeveer) gelijk, dus er is een evenredig verband; $c \approx 0{,}0066$
e Bereken weer telkens $c = \frac{W}{V}$:
10: $c = \frac{4{,}10}{591{,}26} = 0{,}006934...$;
20: $c = \frac{5{,}74}{832{,}08} = 0{,}006898...$;
50: $c = \frac{7{,}80}{1099{,}23} = 0{,}007095...$;
De waarden van c verschillen te veel, dus geen evenredig verband. Verklaring: de dikte van de munten zijn verschillend.

37

a $V = r^3, O = 6 \cdot r^2$
b $V = r^3 \rightarrow 216 \cdot V^2 = 216 \cdot \left(r^3\right)^2 = 216 \cdot r^6$;
$O = 6 \cdot r^2 \rightarrow O^3 = \left(6 \cdot r^2\right)^3 = 6^3 \cdot \left(r^2\right)^3 = 216 \cdot r^6$, dus ze zijn gelijk
c Dan $O^3 = 216 \cdot 5^2 = 5400$, dus $O = \sqrt[3]{5400} \approx 17{,}544$
Of: $r = \sqrt[3]{5}$ en $O = 6 \cdot \sqrt[3]{5}^2 = 17{,}544$
d $O^3 = 216 \cdot V^2 \rightarrow O = \left(216 \cdot V^2\right)^{\frac{1}{3}} = 216^{\frac{1}{3}} \cdot \left(V^2\right)^{\frac{1}{3}} = 6 \cdot V^{\frac{2}{3}}$

38
a Voor iemand die 80 kg weegt, krijg je: $H = 11{,}2 \cdot \sqrt[3]{80^2} \approx 207{,}9$
b Beide kanten tot de derde macht nemen geeft:
$H^3 = 11{,}2^3 \cdot G^2$. Vervolgens deel je beide kanten door $11{,}2^3$.
c $G = \sqrt{0{,}0007}\sqrt{H^3} \approx 0{,}027\sqrt{H^3}$

39
a $T = 0{,}2 \cdot (149{,}5)^{1\frac{1}{2}} \approx 365{,}5978759$;
Dit klopt aardig met de werkelijke omlooptijd van 365,25 dagen
b $T = 0{,}2 \cdot (1427)^{1\frac{1}{2}} \approx 10781{,}2$ dagen $\approx 29{,}52$ jaar
c $0{,}2^2 = 0{,}04$

40
a -
b Van de hoge koker: inhoud = $30 \cdot 5^2 = 750$ cm^3;
van de lage koker: inhoud = $20 \cdot 7{,}5^2 = 1125$ cm^3;
dus de lage koker heeft de grootste inhoud
c Het verschil is $1125 - 750 = 375$ cm^3; De factor is $\frac{1125}{750} = 1{,}5$; dat lijkt niet zo in de figuur.
d Hoge koker: $600 + 2 \cdot 5^2 = 650$ cm^2; Lage koker: $600 + 2 \cdot 7{,}5^2 = 712{,}5$ cm^2;
De verhouding is $\frac{712{,}5}{650} = 1{,}1875$

41
a Dan wordt de bodem G groter; Dan wordt de hoogte h groter.
b Zie figuur.

hoogte *h* in cm	2	4	6	8	10
oppervlakte bodem *G* in cm²	200	100	66,7	50	40

c De oppervlakte wordt dan twee keer zo groot.
d Hyperbool
e Nee, het is een horizontale asymptoot.
f Nee, het is een verticale asymptoot.

42
a Zie figuur.

breedte vierkante bodem in cm	3	4	6	7	8	10
oppervlakte vierkante bodem *G* in cm²	9	16	36	49	64	100
hoogte *h*	44,4	25	11,1	8,2	6,3	4
oppervlakte opstaande rechthoek	133,3	100	66,4	57,1	50	40
totale oppervlakte verpakkingsmateriaal	551,3	432	338,7	326,6	328	360

b Breedte bodem en oppervlakte opstaande rechthoek zijn omgekeerd evenredig;
$\text{breedte bodem} = \dfrac{400}{\text{opp. opstaande rechthoek}}$
c $G = x^2$, dus $h = \dfrac{400}{G} = \dfrac{400}{x^2}$

d $A = x \cdot \frac{400}{x^2} = \frac{400x}{x^2} = \frac{400}{x}$

e De totale oppervlakte is gelijk aan $2 \cdot G$ plus $4 \cdot A$, dus $T = 2 \cdot G + 4 \cdot A = 2 \cdot x^2 + 4 \cdot \frac{400}{x^2} = 2x^2 + \frac{1600}{x}$

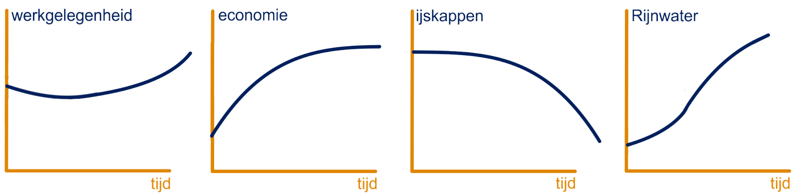
f Optie 'minimum' geeft $x \approx 7{,}36806295...$, dus $x \approx 7{,}37$ cm; hoogte $h = \frac{400}{x^2} \approx 7{,}368...$, dus het doosje is dan een kubus!

43

- A: exponentieel verband, $y = 1{,}6 \cdot 2{,}5^x$
- B: omgekeerd evenredig verband, $y = \frac{15}{x}$
- C: lineair verband, $y = -2x + 25$
- D: evenredig verband, $y = \frac{4}{5}x$
- E: omgekeerd evenredig verband, $y = \frac{9}{x}$
- F: lineair verband, $y = 1{,}5x + 7$
- G: exponentieel verband, $y = 24 \cdot 1{,}5^x$
- H: omgekeerd evenredig verband, $\sqrt{y} = \frac{12}{x} \rightarrow y = \left(\frac{12}{x}\right)^2 = \frac{144}{x^2}$, of $y = 144x^{-2}$
- I: evenredig verband, $\frac{1}{y} = 1{,}5 \cdot x^2 \rightarrow y = \frac{1}{1{,}5x^2} = \frac{2}{3}x^{-2}$
- J: exponentieel verband, $y^2 = 9 \cdot 2^x \rightarrow y = (9 \cdot 2^x)^{\frac{1}{2}} = 3 \cdot 2^{\frac{1}{2}x}$
- K: exponentieel verband, $\frac{1}{y} = 20 \cdot 0{,}5^x \rightarrow y = \frac{1}{20 \cdot 0{,}5^x} = 0{,}05 \cdot 2^x$
- L: evenredig verband, $y^3 = 0{,}6x^2 \rightarrow y = \left(0{,}6x^2\right)^{\frac{1}{3}} = 0{,}6^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} \approx 0{,}84 \cdot x^{\frac{2}{3}}$

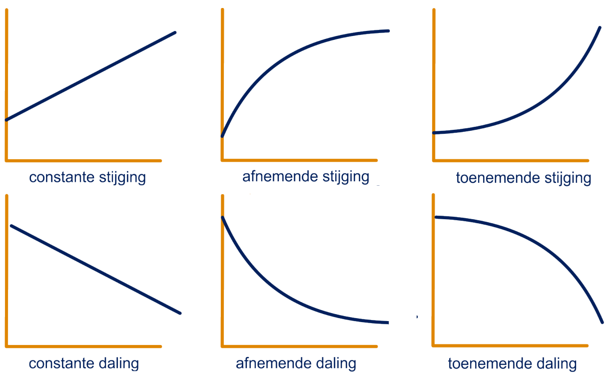
Veranderingen zichtbaar maken

44 Zie figuur.

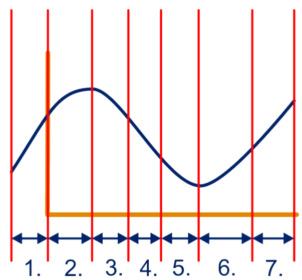


45

a Zie figuur.



b Zie figuur.



1. constante stijging
2. afnemende stijging
3. toenemende daling
4. constante daling
5. afnemende daling
6. toenemende stijging
7. constante stijging

46

a Zie figuur.

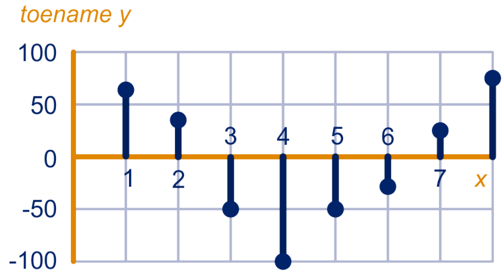
van ... tot ...	0 - 1	1 - 2	2 - 3	3 - 4	4 - 5	5 - 6	6 - 7	7 - 8
toename	65	35	-50	-100	-50	-25	25	75

b Zie figuur.

c Afnemende stijging: de knopspelden liggen alle boven de x-as, maar worden wel korter.

d Afnemende daling: de knopspelden liggen onder de x-as en worden korter.

e Toenemende daling: de knopspelden liggen onder de x-as en worden langer.
Toenemende stijging: de knopspelden liggen boven de x-as en worden langer.



47

a Grafiek 1 en 4.

b Grafiek 3.

c 1: Amsterdam, 2: Pretoria, 3: Paramaribo, 4: Moskou, 5: Sidney

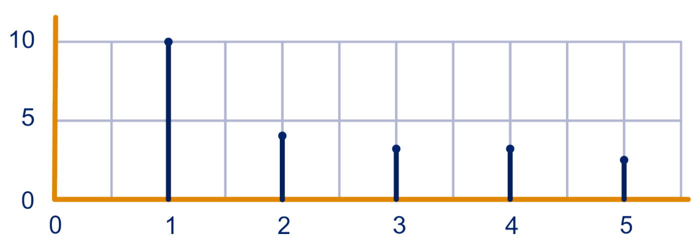
48

a Afnemende stijging.

b Zie tabel.

dag	eerste	tweede	derde	vierde	vijfde
toename straal (in km)	10	4	3	3	2

c Zie figuur.



d Zie tabel.

dag	eerste	tweede	derde	vierde	vijfde
straal (in km)	10,00	14,14	17,32	20,00	22,36
opp. (in km^2)	314	628	942	1267	1571
toename opp. (in km^2)	314	314	314	315	314

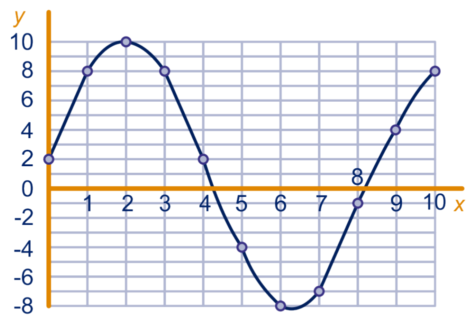
e De staafjes in het toenamediagram zijn (bijna) allemaal even lang.
f $10 \cdot 314 = 3140$ km^2
g $r^2 = \frac{3140}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{3140}{\pi}} = 31{,}61$ km
h Ja, want de hoeveelheid olie die per uur uit het schip lekt is ook constant en de olievlek is (waarschijnlijk) overal even dik.

49
a Zie einde paragraaf.
b Zie einde paragraaf.
c De strepen verschillen steeds 2 in lengte.

50
a Zie einde paragraaf.
b Zie einde paragraaf.
c De strepen zijn alle even lang.

51
a Zie einde paragraaf.
b Zie einde paragraaf.
c De eindpunten van de strepen liggen op een rechte lijn.

52
a Zie figuur.
b Bij de getekende grafiek hierboven: bij $x = 2$. Maar het kan ook net vóór of ná $x = 2$ zijn! Dus: het maximum zit ergens rondom $x = 2$.
c In de getekende grafiek hierboven net na $x = 6$, maar het kan ook precies bij $x = 6$ zijn of er net vóór. Dus: het minimum zit ergens rondom $x = 6$.



53
a Zie einde paragraaf.
b Vóór een maximum is er een toename en erna een afname, dus links van het maximum liggen de staven boven de as, erna eronder.
c Het maximum hoeft niet voor een gehele waarde van x aangenomen te worden.
d Vóór een minimum is er een afname en erna een toename, dus links van het minimum liggen de staven onder de as, erna erboven.

54
a Er is eerst sprake van afnemende stijging en vervolgens van toenemende stijging.
b Met 41 euro; met 27 euro

c **Tabellen**

x	0	1	2	3	4	5
y	0	1	4	9	16	25
toename y		1	3	5	7	9

opgave 49

x	0	1	2	3	4	5
y	-7	-4	-1	2	5	8
toename y		3	3	3	3	3

opgave 50

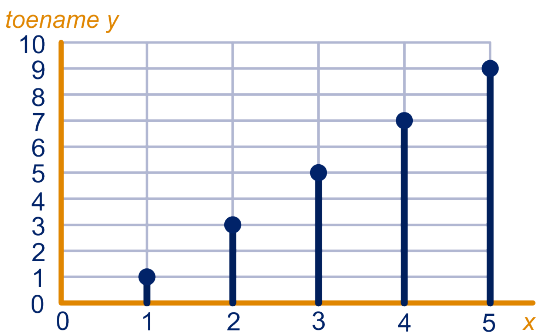
x	-2	-1	0	1	2	3
y	0	3	4	3	0	-5
toename y		3	1	-1	-3	-5

opgave 51

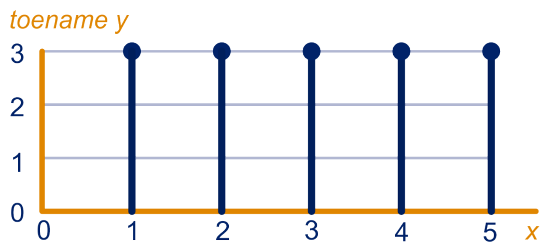
van ... tot ...	0 - 1	1 - 2	2 - 3	3 - 4	4 - 5	5 - 6	6 - 7	7 - 8
toename	41	27	19	17	21	31	47	69

opgave 54

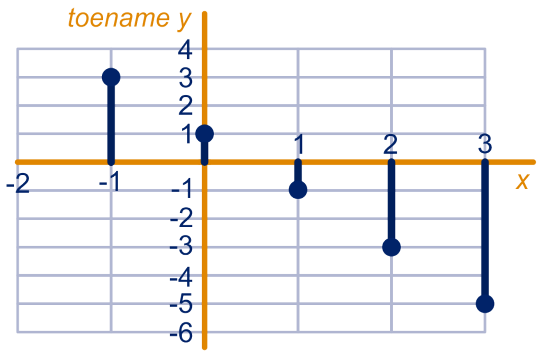
Toenamediagrammen



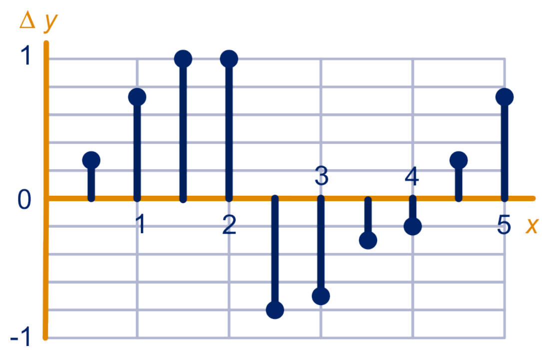
opgave 49



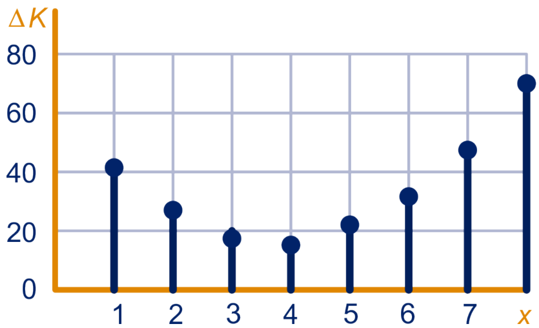
opgave 50



opgave 51



opgave 53



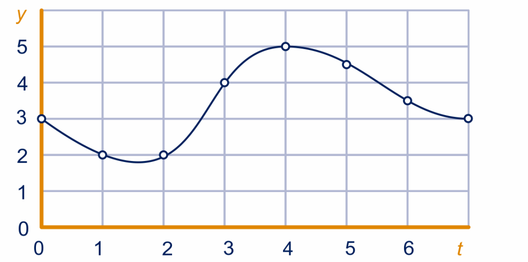
opgave 54

55

a $y = 5 - 0{,}5 - 1 - 0{,}5 = 3$

b $y = 5 - 1 - 2 - 0 + 1 = 3$

c Zie figuur.

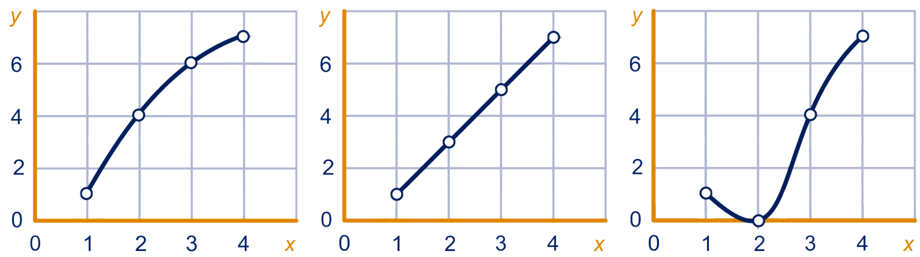


56

a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-1}{4-1} = \frac{6}{3} = 2.$

b Totale toename is steeds 6.

c Zie figuur.



d De totale toename nu getekend in het toenamediagram is $1{+}4{-}1 = 4$, dus er ontbreekt een staafje met lengte $(+)\,2$

Rekenen met veranderingen

57

a T_2

b 20°C in 5 uur; dat is 4°C per uur.

c -18°C in 10 uur; dat is -1,8°C per uur.

d 8°C in 4 uur; dat is 2°C per uur.

e 15°C in 16 uur; dat is 0,94°C per uur.

f T_2 hoort bij de luchttemperatuur, T_1 hoort bij de grondtemperatuur. De grond wordt warmer als de luchttemperatuur hoger is. Het temperatuurverloop van de grond loopt dus achter.

58

a $52 \times 5 = 260$ (en geen 365, want in het weekend is er geen handel)

b De prijs is gestegen van ongeveer 1200 naar ongeveer 1720. Als je voor 100 dollar had gekocht, was het nu $\frac{1720}{1200} \cdot 100 \approx 143$ dollar waard geweest. Dus je had ongeveer 43 dollar winst gemaakt.

c Met $\frac{1720-1200}{12} \approx 43$ dollar.

d Met $\frac{1720-1200}{365} \approx 1{,}42$ dollar.

59

a Overige Aziatische landen: groei van 1,4 naar 2,1 miljard, dus groei van 0,7 miljard;
Afrika: groei van 1,2 naar 1,8 miljard, dus groei van 0,6 miljard;
Chris heeft geen gelijk.

b 1,4 mld op 11,5 mld (dus ongeveer 1 op de 8): $\frac{1,4}{11,5} \times 100\% \approx 12\%$

c 4,9 mld in 150 jaar → 32,7 mln per jaar → bijna 90.000 per dag → ongeveer 1 per seconde.

60

a $t = 0 \rightarrow P = 1200$

$\underline{t = 364} \rightarrow \underline{P = 1720}$

$\Delta t = 364 \rightarrow \Delta P = 520$

De gemiddelde toename is: $\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{520}{364} \approx 1{,}43$.

(Of nauwkeuriger: $\frac{1717{,}28 - 1197{,}98}{364 - 0} \approx 1{,}43$.)

b $t = 8 \rightarrow T_2 = 14$

$\underline{t = 20} \rightarrow \underline{T_2 = 10}$

$\Delta t = 12 \rightarrow \Delta T_2 = -4$

De gemiddelde toename is: $\frac{\Delta T_2}{\Delta t} = \frac{-4}{12} \approx -0{,}33$.

61

a $t = 12 \rightarrow A = 45$

$\underline{t = 15} \rightarrow \underline{A = 168}$

$\Delta t = 3 \rightarrow \Delta A = 123$

De gemiddelde toename is: $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{123}{3} = 41$.

b Gemiddelde snelheid per uur.

62

a Van 3 tot en met 11 een toename van $1 - 2 - 2 + 3 + 3 + 2 - 1 + 4 = 8$, dus $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8}{8} = 1$.

b $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

c Van $x = 3$ tot en met $x = 7$; toename is $1 - 2 - 2 + 3 = 0$.

63

Rechte lijn met richtingscoëfficiënt $1\frac{1}{2}$.

64

a Op $[3,6]$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{36 - 9}{6 - 3} = \frac{27}{3} = 9$

Op $[0,10]$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{100 - 0}{10 - 0} = \frac{100}{10} = 10$

Op $[-2,2]$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 4}{2 - (-2)} = \frac{0}{4} = 0$

Op $[-3,2]$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 9}{2 - (-3)} = \frac{-5}{5} = -1$

b $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9 - a^2}{3 - a} = \frac{(3 + a)(3 - a)}{3 - a} = 3 + a$

c Gebruik de gevonden formule van vraag **b**: $3 + a = 2 \rightarrow a = -1$.

d Teken door het punt $(3,9)$ een lijn met richtingscoëfficiënt 3 en lees het snijpunt van deze lijn af met de grafiek.

e Teken door $(-1,1)$ een lijn met richtingscoëfficiënt 1,5 in de grafiek en lees de eerste coördinaat van het snijpunt af: $b = 2{,}5$.

f $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b^2 - (-1)^2}{b - 1} = \frac{b^2 - 1}{b - 1} = \frac{(b + 1)(b - 1)}{b - 1} = b - 1$;
dus $b - 1 = 1{,}5 \rightarrow b = 2{,}5$

65

a $\Delta y = b^2 - a^2$

b $\Delta x = b - a$

c $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b + a)(b - a)}{b - a} = b + a$

66

a 4, $a+3$ en $3a$

b 12, $3a+9$ en $9a$

c 2, $a+1$ en $2a-2$

67

a Op $[1{,}3]$: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{12-2}{3-1}=\frac{10}{2}=5$; Op $[2{,}5]$: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{30-6}{5-2}=\frac{24}{3}=8$.

b Op $[a{,}3]$: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{12-(a^2+a)}{3-a}=\frac{-a^2-a+12}{3-a}=\frac{(3-a)(a+4)}{3-a}=a+4$.

c Op $[a,a+1]$: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(a+1)^2+(a+1)-(a^2+a)}{(a+1)-a}=\frac{2a+2}{1}=2a+2$.

68

a Gemiddelde helling is 19.

b Gemiddelde helling is 17 ; gemiddelde helling is 15

c $\Delta y=(8\cdot 1{,}1^2-1{,}1^3)-(8\cdot 1^2-1^3)=1{,}349$; $\Delta x=1{,}1-1=0{,}1$, dus
$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1{,}349}{0{,}1}=13{,}49$
$\Delta y=(8\cdot 1{,}01^2-1{,}01^3)-(8\cdot 1^2-1^3)=0{,}130499$; $\Delta x=1{,}01-1=0{,}01$, dus
$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0{,}130499}{0{,}01}=13{,}0499$
$\Delta y=(8\cdot 1{,}001^2-1{,}001^3)-(8\cdot 1^2-1^3)=0{,}013004999$; $\Delta x=0{,}001$, dus
$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0{,}013004999}{0{,}001}=13{,}004999$

d De waarde 13.

69

a $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(8\cdot 2{,}01^2-2{,}01^3)-24}{2{,}01-2}=\frac{0{,}200199}{0{,}01}=20{,}0199$
$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(8\cdot 4{,}01^2-4{,}01^3)-64}{4{,}01-4}=\frac{0{,}159599}{0{,}01}=15{,}9599$
$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(8\cdot 6{,}01^2-6{,}01^3)-72}{6{,}01-6}=\frac{-0{,}121000999}{0{,}01}=-12{,}1000999$

b -

70

a $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2{,}01^2-2^2}{2{,}01-2}=\frac{0{,}0401}{0{,}01}\approx 4$

b $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0{,}01^2-0^2}{0{,}01-0}=\frac{0{,}0001}{0{,}01}\approx 0$; $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1{,}01^2-1^2}{1{,}01-1}=\frac{0{,}0201}{0{,}01}\approx 2$; $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3{,}01^2-3^2}{3{,}01-3}=\frac{0{,}0601}{0{,}01}\approx 6$

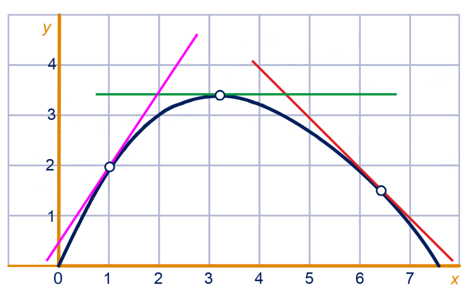
c Ja.

71

a Lijn 3.

b 0,6

c Zie figuur.
Teken met je geodriehoek eerst een lijn met de juiste helling en ga dan met je geodriehoek schuiven tot je de grafiek raakt. Zie figuur.



72

Zie tabel.
(Jouw antwoorden kunnen iets afwijken.)

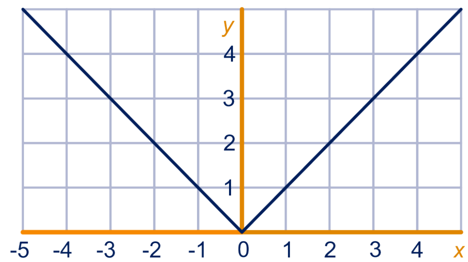
x	0	1	2	3	4	5	6
helling	0,5	1,4	0	-0,8	0	1,1	2,0

73

a Zie figuur.

b x^2 is, voor voor elke waarde van x, altijd 0 of groter, dus is $\sqrt{x^2}$ ook altijd 0 of groter. Als $x = 0$, dan is ook $y = 0$. Dus de grafiek heeft een minimum in het punt $(0{,}0)$.

c Het zijn twee (halve) rechte lijnen die in het punt $(0{,}0)$ bij elkaar komen. Vanwege de knik tussen de twee lijnen is er geen helling in het punt $(0{,}0)$.

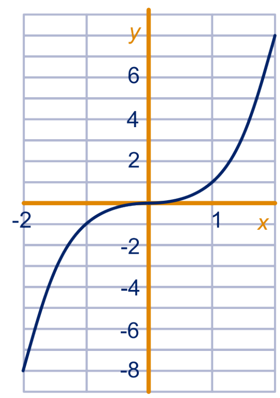


74

a Zie figuur.

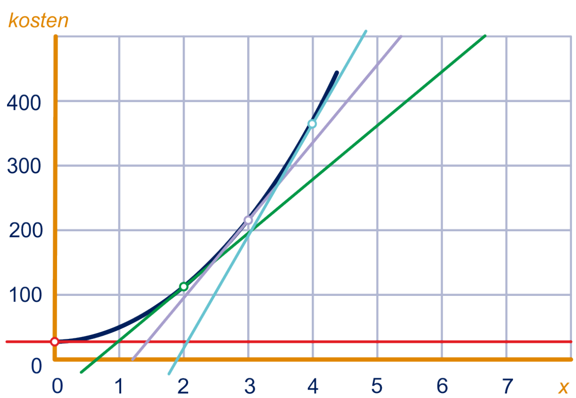
b Neem $\Delta x = 0{,}001$:
$x = 0$ geeft $y = 0$
en $x = 0{,}001$ geeft $y = 0{,}000000001 = 10^{-9}$
$\rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}000000001}{0{,}001} = 10^{-6} \approx 0$.
Grafische rekenmachine, optie dy/dx geeft ook helling $= 0$.

c Voor negatieve waarden van x is $y = x^3$ negatief en voor positieve waarden van x is $y = x^3$ positief, dus links van $(0{,}0)$ ligt de grafiek onder de x-as en rechts van $(0{,}0)$ boven de x-as. Dus de grafiek heeft in het punt $(0{,}0)$ wel helling nul, maar toch geen minimum of maximum.



75

a Zie figuur.



b 0 ; 40 ; 80 ; 120 ; 160

c Per honderd eenheden komt er 120 euro bij, dus per tien eenheden komt er 12 euro bij. De kosten bij 310 eenheden zijn dan $220 + 12 = 232$ euro.

d De helling is ongeveer 80. Per honderd eenheden komt er 80 euro bij, dus per vijfentwintig eenheden komt er 20 euro bij. De kosten bij 225 eenheden zijn dan (ongeveer) $116 + 20 = 136$ euro.

e De helling is ongeveer 160. Per honderd eenheden gaat er 160 euro af, dus per vijftien eenheden gaat er 24 euro af. De kosten bij 385 eenheden zijn dan (ongeveer) $380 - 24 = 356$ euro.

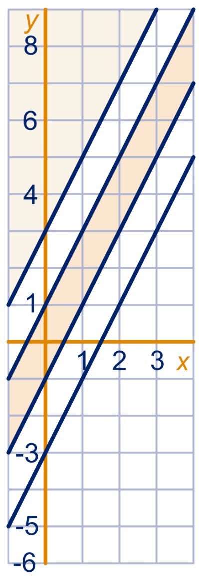
Ongelijkheden en isolijnen

76

a Heel vochtig weer (regen) en vrij koel.
b Ja, grenszone 2 / 3.
c $V = -3{,}75T + 150$ (zone 1 / 2)
$V = -3{,}75T + 160$ (zone 2 / 3)
d Vul $T = 26$ in: bij eerste lijn $V = -3{,}75 \cdot 26 + 150 = 52{,}5$;
bij tweede lijn $V = -3{,}75 \cdot 26 + 160 = 62{,}5$.
Dus tussen $V = 52{,}5$ en $V = 62{,}5$.
e Zone 1: $V < -3{,}75T + 150$
f Zone 3: $V > -3{,}75T + 160$
Zone 2: $V > -3{,}75T + 150$ en $V < -3{,}75T + 160$
(of in één keer: $-3{,}75T + 150 < V < -3{,}75T + 160$)

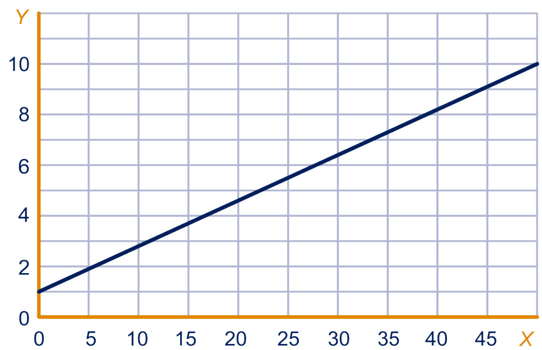
77

a Zie figuur.
b Zie antwoord **a**.
c Zie antwoord **a**.



78

a Per 50 goede: 9 punten → per 1 goede: $\frac{9}{50} = 0{,}18$ punten
Bij $X = 40$ hoort het cijfer $1 + 40 \cdot 0{,}18 = 8{,}2$.
b $X = \frac{5{,}5-1}{0{,}18} = 25$, dus bij 25 punten.
c $Y = 0{,}18X + 1$
d

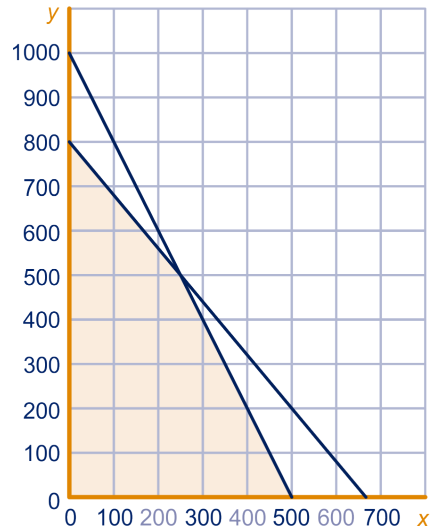


e Boven de lijn, dus $Y > 0{,}18X + 1$.
f $Y = 0{,}237X + 1$ van $X = 0$ tot en met $X = 19$.
$Y = 0{,}145X + 2{,}74$ van $X = 19$ tot en met $X = 50$.
g Formule tweede deel: $Y = 0{,}25X - 2{,}5$
$5{,}5 = 0{,}25X - 2{,}5 \rightarrow 8 = 0{,}25X \rightarrow X = 32$, dus omslagscore ligt bij 32 punten.
h Formule eerste deel: $Y = 0{,}140625X + 1$
$X = 16$ invullen → cijfer $Y = 0{,}140625 \cdot 16 + 1 = 3{,}3$.

79

a $12x + 10y \leq 8000$ en $0{,}2x + 0{,}1y \leq 100$
b Zie figuur.

c • $0{,}2x + 0{,}1y = 100$ en $y = 0$, dan $x = 500$, snijpunt $(500{,}0)$
- $12x + 10y = 8000$ en $x = 0$, dan $y = 800$, snijpunt $(0{,}800)$
- $12x + 10y = 8000$ en $0{,}2x + 0{,}1y = 100$, dan
  $12x = 8000 - 10y$ en
  $12x = 6000 - 6y$, dus
  $8000 - 10y = 6000 - 6y \rightarrow y = 500$
  $\rightarrow x = 250$, snijpunt $(250{,}500)$

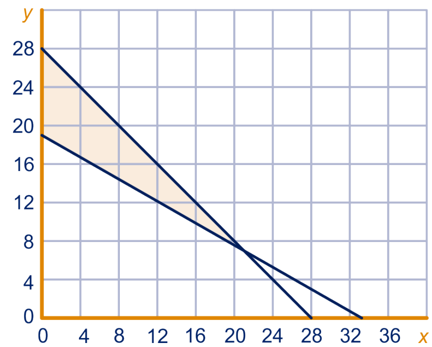


d In het punt $(250{,}500)$ is de winst €287,50;
in het punt $(500{,}0)$ is de winst €225,–;
in het punt $(0{,}800)$ is de winst €280,–.
De maximale winst is €287,50 als de bakker 250 krentenbollen en 500 koffiebroodjes verkoopt.

80

a $24x + 42y \geq 798$ en $x + y \leq 28$

b Zie figuur.



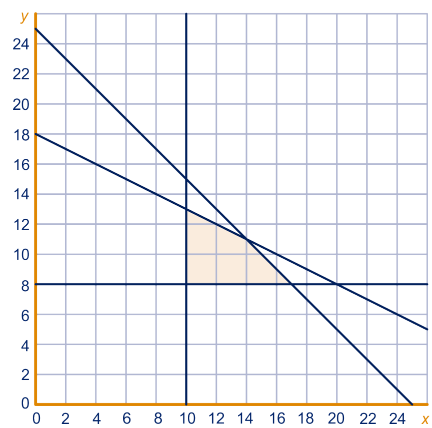
c • $24x + 42y = 798$ en $x = 0$, dan $y = 19$, snijpunt $(0{,}19)$
- $x + y = 28$ en $x = 0$, dan snijpunt $(0{,}28)$
- $24x + 42y = 798$ en $x = 28 - y$, dan
  $24(28 - y) + 42y = 798$, dus $y = 7$
  $x = 28 - 7 = 21$, snijpunt $(21{,}7)$

d In het punt $(0{,}19)$ zijn de kosten €17.100,– (in het punt $(0{,}28)$ is het sowieso duurder dan in het punt $(0{,}19)$);
in het punt $(21{,}7)$ zijn de kosten €16.800,–.
De minimale kosten zijn €16.800,– als je 21 kleine en 7 grote vrachtwagens gebruikt.

81

a $x \geq 10$, $y \geq 8$, $x + y \leq 25$ en $50x + 100y \leq 1800 \rightarrow x + 2y \leq 36$

b Zie figuur.



c • $x + 2y = 36$ en $x = 10$, dan $y = 13$, snijpunt $(10{,}13)$
- $x = 10$ en $y = 8$, snijpunt $(10{,}8)$
- $x + y = 25$ en $y = 8$
  $x = 17$, snijpunt $(17{,}8)$
- $x + 2y = 36$ en $x = 25 - y$, dan
  $25 - y + 2y = 36 \rightarrow y = 11$
  $\rightarrow x = 14$, snijpunt $(14{,}11)$

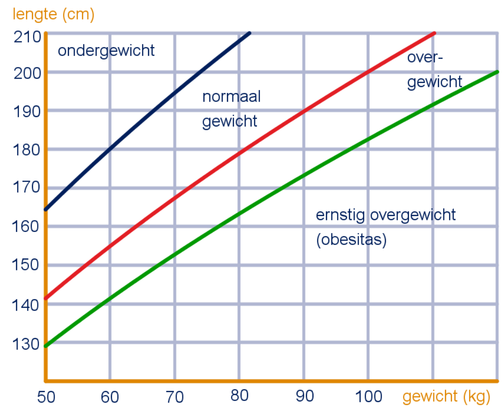
d In het punt $(10{,}13)$ is de winst €60.000,–;
in het punt $(17{,}8)$ is de winst €66.750,–;
in het punt $(14{,}11)$ is de winst €66.000,–.
De winst is maximaal €66.750,– bij 17 auto's van type S en 8 auto's van type TD.

82

a $20 = \frac{G}{L^2} \rightarrow L^2 = \frac{G}{20} = 0{,}05G\; L = (0{,}05G)^{\frac{1}{2}} = 0{,}05^{\frac{1}{2}} \cdot G^{\frac{1}{2}} \approx 0{,}22 \cdot G^{0{,}50}$

b Getekend zijn de lijnen voor $BMI = 18{,}5$ en $BMI = 30$, dus de lijn met $BMI = 25$ moet getekend worden.
$25 = \frac{G}{L^2} \rightarrow \ldots \rightarrow L = 0{,}2 \cdot G^{0{,}5}$; tabel maken en kromme lijn tekenen.
Zie figuur.

c Gezond gewicht: $\frac{125}{L^2} = 25$
$\rightarrow L = \sqrt{5} \approx 2{,}24$;
Als $BMI < 25$ dan moet $L > 2{,}24$ en dat komt bijna niet voor.



d De lengte is 350 cm, ofwel 3,5 m;
Gewicht: $10^{1{,}825} \approx 66{,}8$ kg;
$BMI = \frac{66{,}8}{3{,}5^2} \approx 5{,}5$;
De Arbok heeft (ernstig) ondergewicht.

83

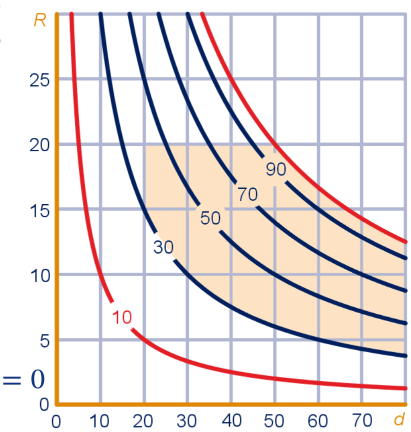
a $12 = \frac{10 \cdot 67}{d} \rightarrow d \approx 56$ micrometer

b $R_{\text{huismerk}} = \frac{10 \cdot 30}{50} = 6\ \text{m}^2$/liter; per m^2 kost het dus $\frac{21}{6} = 3{,}5$ euro;
$R_{\text{topmerk}} = \frac{10 \cdot 40}{50} = 8\ \text{m}^2$/liter; per m^2 kost het dus $\frac{25}{8} = 3{,}125$ euro;
Conclusie: het topmerk is goedkoper.

c $R = \frac{10 \cdot 10}{d} = \frac{100}{d}$.
Zie figuur.

d Je moet eerst de lijn bij $V = 100$ erbij tekenen, want het percentage vaste stof moet kleiner dan 100% zijn. Zie figuur bij vraag **c**.
$30 < V < 100$ en $R < 20$ en $d > 20$.

e $R = \frac{10V}{50} = \frac{1}{5}V \rightarrow V = 5R$, dus het is een (recht) evenredig verband.



84

Zijn gewicht is volgens de regel van zijn moeder
$G = 100(L - 1) = 100L - 100$;
Invullen in de formule voor BMI geeft:
$\frac{100L - 100}{L^2} = 25 \rightarrow 25L^2 = 100L - 100 \rightarrow L^2 - 4L + 4 = 0$
$\rightarrow (L - 2)^2 = 0 \rightarrow L = 2$
(mag ook met de GR, met *solver* of *intersect*);
Kees is dus 2 meter lang en weegt 100 kg.

85

a Teken de lijn en lees af op de middelste schaal: (iets minder dan) 25 mm (of 24 mm) De diameter is dus groot genoeg.

b Een groter vermogen betekent lager op de rechteras. De lijn door dit punt en 45 mm van de middelste schaal komt dan hoger op de linkeras uit. Bij dat linkerpunt hoort een grotere waarde van het toerental.

c Aflezen: $D = 60$ en $P = 400$; $60 = 79{,}78 \cdot \sqrt[3]{\frac{400}{R}} \rightarrow$ (mag met *intersect*) $R \approx 940$ tpm.

d $30 = 79{,}78 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{R}} \to 0{,}376... = \sqrt[3]{\frac{P}{R}} \to \frac{P}{R} = (0{,}376...)^3 \approx 0{,}053 \to P = 0{,}053R$; (recht) evenredig verband

e We zagen zojuist dat bij $D = 30$ sprake is van een recht evenredig verband tussen P en R, dus in dat geval is de grafiek inderdaad een rechte lijn door de oorsprong. Voor andere waarden van D kun je dezelfde berekeningen uitvoeren en krijg je dus ook een evenredig verband en is de grafiek ook een rechte lijn door de oorsprong.

Extra opgaven

1

a $2x - 3(3x - 12) = 8 \to x = 4 \to y = 0$; snijpunt $(4{,}0)$

b $2x + 3y = 18 \to 2x = 18 - 3y$
$-x + 5y = 4 \to 5y - 4 = x \to 2x = 10y - 8$
Gelijkstellen: $18 - 3y = 10y - 8 \to y = 2 \to x = 6$; snijpunt $(6{,}2)$

c $x - y = 6 \to x = 6 + y$ invullen geeft $3(6 + y) - 5y = 15 \to y = 1\frac{1}{2} \to x = 7\frac{1}{2}$; snijpunt $\left(7\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$

2

a Als de bemesting toeneemt, neemt het suikergehalte af en neemt de loofopbrengst toe.

b $S = 17{,}5 - 0{,}01N$; $L = 0{,}1N + 25$

c Nee, want bij beide grafieken hoort een andere verticale schaalverdeling.

d Suiker rendabel als $N < 160$;
loof rendabel als $N > 120$.

e $120 < N < 160$

3

a factor 12

b Kun je net zo goed niets opsmeren.

c $Z = \frac{1}{6}F$; $Z = \frac{1}{3}F$;
Ja, ze gaan door de oorsprong, want het zijn evenredige verbanden tussen Z en F.

d $Z < \frac{1}{6}F \to$ niet verbranden
$\frac{1}{6}F < Z < \frac{1}{3}F \to$ licht verbranden
$Z > \frac{1}{3}F \to$ ernstig verbranden

e Lager, eerder verbrandingen.

4

a Nee, de uitkomsten van de quotiënten $\frac{H}{P}$ verschillen erg: bijv. $\frac{62}{6} = 7$ en $\frac{64}{8} = 8$.

b Ja, als de oude waarde met 1 toeneemt, neemt de nieuwe waarde met 11 toe.

c $H = 11P - 24$

d $P = \dfrac{H + 24}{11}$ invullen geeft $G = 315{,}7 \cdot \dfrac{H + 24}{11} - 735{,}5 = 28{,}7H + 688{,}8 - 735{,}5 \to G = 28{,}7H - 46{,}7$

5

Bereken de quotiënten $\frac{L^2}{D^3}$, daar komt telkens (ongeveer) 2,92 uit (keer 1000).

Dus $L^2 = 2920 \cdot D^3 \to L = \left(2920 \cdot D^3\right)^{\frac{1}{2}} \approx 54 \cdot D^{\frac{3}{2}}$

6

a 30%

b 25%

c 0%-lijn: $P = 50 - 0{,}5L$; 50%-lijn: $P = 70 - 0{,}5L$; 100%-lijn: $P = 90 - 0{,}5L$

d 1. $P > 90 - 0{,}5L$
2. $P < 90 - 0{,}5L$
3. $50 - 0{,}5L < P < 90 - 0{,}5L$

e Neem $L = 0$, dan geldt $P = a + b \cdot R$, dus er is een lineair verband tussen P en R;
De volgende waarden gelden: $P = 50, R = 0$; $P = 70, R = 50$; $P = 90, R = 100$, dus per toename van 50 van R neemt P met 20 toe, dus $a = \frac{20}{50} = 0{,}4$ en $b = 50$;
Dus: $P = 50 + 0{,}4R - 0{,}5L$

f $0{,}4R = P + 0{,}5L - 50 \rightarrow R = \frac{1}{0{,}4}(P + 0{,}5L - 50) = 2{,}5P + 1{,}25L - 125$

7

a $0{,}5 = 18 \cdot \frac{A}{72} \rightarrow 0{,}5 = \frac{1}{4}A \rightarrow A = 2$

b Punt aflezen, bijvoorbeeld $(70; 1{,}05)$; $1{,}05 = 18 \cdot \frac{A}{70} \rightarrow A = 1{,}05 \cdot \frac{70}{18} \approx 4{,}08$, dus waarschijnlijk $A = 4$;
formule: $P = 18 \cdot \frac{4}{G} = \frac{72}{G}$

c $P = 18 \cdot \frac{A}{72} = \frac{1}{4}A \rightarrow P$ en A zijn evenredig

d $P = 18 \cdot \frac{3}{G} = \frac{54}{G} \rightarrow P$ en G zijn omgekeerd evenredig

e $0{,}5 = 18 \cdot \frac{A}{G} \rightarrow 0{,}5 = \frac{18A}{G} \rightarrow G = 36A \rightarrow G$ en A evenredig

8

a Ongeveer 5500 kcal/uur.

b Vergelijk een kamer van 80 m^3 en een kamer van 90 m^3 die je beide naar 18°C wilt brengen.
Het zal extra energie kosten om deze 10 m^3 extra op 18°C te brengen. Het zal natuurlijk meer extra energie kosten om deze 10 m^3 extra op 21°C i.p.v. 18°C te brengen.

c Ongeveer 19,7°C.

d 97 m^3

e 15°C: 32,3 kcal/uur per m^3
18°C: 42,6 kcal/uur per m^3
21°C: 62,5 kcal/uur per m^3

f $6800 + 24 \cdot 42{,}6 = 7822$ kcal/uur

g 15°C: $C = 32{,}3I + 870$
18°C: $C = 42{,}6I + 1900$
15°C: $C = 62{,}5I + 2500$

h Als T met 3 °C toeneemt, dan neemt C met respectievelijk 2000 en 2800 toe, dus geen gelijke toenamen.
(Of: de verticale afstanden tussen de twee lijnen is ongelijk, dus ongelijke toenamen.)

9

a $O = 540 - 25t$; $N = 40 + 40t$

b $540 - 25t = 40 + 40t \rightarrow 500 = 65t \rightarrow t = 7{,}69$

c $540 - 25t = 0{,}5(40 + 40t) \rightarrow 540 - 25t = 20 + 20t \rightarrow 520 = 45t \rightarrow t = 11{,}56$

d Het totaal aantal werknemers is gelijk aan $O + N = 540 - 25t + 40 + 40t = 580 + 15t$
$P = \frac{N}{N + O} \cdot 100 = \frac{40 + 40t}{580 + 15t} \cdot 100 = \frac{4000 + 4000t}{580 + 15t} = \frac{800 + 800t}{116 + 3t}$

e Op te lossen $\frac{800 + 800t}{116 + 3t} = 95$ (mag met de GR, *intersect* of *solver*) $\rightarrow t \approx 19{,}84...$, dus na 20 maanden.

10

a $S = \frac{c}{L^2}$ voor zekere waarde van c;
Voor de kleine soort: $S = \dfrac{c}{0{,}10^2} = 100c$;
Voor de grote soort: $S = \dfrac{c}{0{,}50^2} = 4c$;
Dus $\frac{100c}{4c} = 25$ maal zo groot.

b $\dfrac{c}{0{,}25^2} - \dfrac{c}{0{,}40^2} = 6825 \rightarrow 16c - 6{,}25c = 6825 \rightarrow c = \frac{6825}{9{,}75} = 700$

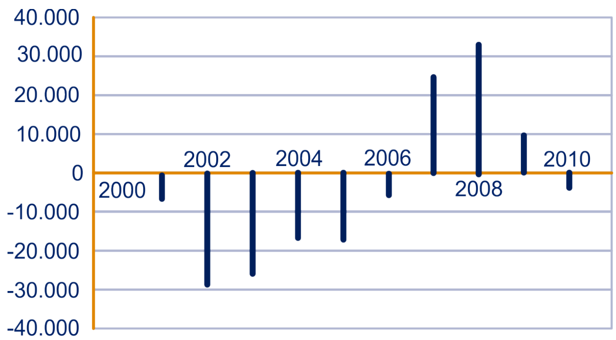
c $D^3 = \frac{c}{G^2}$, dus $8000^3 = \dfrac{c}{1{,}1^2} \rightarrow c = 1{,}1^2 \cdot 8000^3 \approx 6{,}195... \cdot 10^{11} \rightarrow D^3 = \dfrac{6{,}195... \cdot 10^{11}}{G^2}$

$\rightarrow D = \left(\dfrac{6{,}195... \cdot 10^{11}}{G^2}\right)^{\frac{1}{3}} \approx \dfrac{8525}{G^{\frac{2}{3}}} = 8525 \cdot G^{-\frac{2}{3}}$

11

a bevolkingsgroei = Geboorte − Sterfte + Immigratie − Emigratie

b Zie figuur.



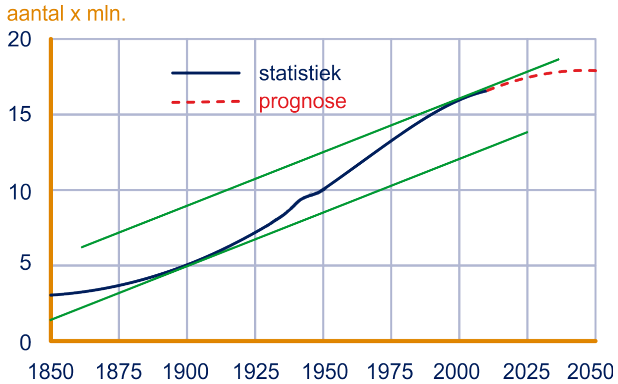
c -
Je weet uit de tabel alleen het *gemiddelde* aantal in dat jaar, dus het kan aan het begin van het jaar meer of minder zijn. Je kunt het dus niet precies weten.

d Toen was er oorlog.

e Tot 1975 toenemende stijging. Daarna een afnemende stijging.

f Groei van (ongeveer) 5 naar 13,3 miljoen, dus $\dfrac{\Delta B}{\Delta t} = \dfrac{13{,}3 - 5}{1975 - 1950} = \dfrac{8{,}3}{25} = 0{,}332$ miljoen, ofwel toename van (ongeveer) 332.000 per jaar.

g Zie figuur.



Raaklijn tekenen in het jaar 1900 en dan verschuiven naar een jaar waar de lijn met dezelfde helling ook raakt: rond het jaar 2002.

12

a €7500 is €1500 meer dan €6000, dus het percentage is $12 - 1{,}5 \cdot 0{,}5 = 11{,}25\%$.

b Het percentage is $12 - 3 \cdot 0{,}5 = 10{,}5$, dus de subsidie is $0{,}105 \cdot 9000 = 945$ euro.

c Dan moet je het verschil in subsidie bij stijging kosten van 8000 naar 9000 berekenen:
Bij 8000: percentage is $12 - 2 \cdot 0{,}5 = 11\%$, dus de subsidie is $0{,}11 \cdot 8000 = 880$ euro;
De toename is $945 - 880 = 65$ euro, dus de hoogte van het staafje is 65.

d Dat is bij de overgang van stijging naar daling, dus ergens rond 15.000 euro.

e Voor het subsidiepercentage p geldt $p = 12 - (K - 6) \cdot 0{,}5 = 12 - K + 3 = 15 - K$;
Het subsidiebedrag S is gelijk aan $S = 1000 \cdot K \cdot \frac{p}{100} = 100 \cdot K \cdot p$
$\rightarrow S = 10 \cdot K \cdot (15 - 0{,}5K) = 150K - 5K^2$

f Met de GR de grafiek tekenen en met de optie *maximum* de top bepalen: dat is bij $K = 15$, ofwel bij kosten van 15.000 euro is de subsidie maximaal.
De maximale subsidie is €1125,–.

g
$K = a - 1 \quad \rightarrow \quad S = 150(a-1) - 5(a-1)^2 = -5a^2 + 160a - 155$
$\underline{K = a} \quad \rightarrow \quad \underline{S = 150a - 5a^2}$
$\Delta K = 1 \quad \rightarrow \quad \Delta S = 155 - 10a$
De gemiddelde toename is: $\frac{\Delta S}{\Delta K} = \frac{155 - 10a}{a} = 155 - 10a$.

h De uitkomst $155-10a$ geeft de hoogte van het staafje in het toenamediagram bij $K = a$ (voor $a > 6$)

13

Uit de tabel volgen bijvoorbeeld de vergelijkingen $a \cdot 30^b = 0{,}12$ en $a \cdot 70^b = 1{,}51$;
Beide omschrijven: $a = \frac{0{,}12}{30^b}$ en $a = \frac{1{,}51}{70^b}$;
Gelijkstellen: $\frac{0{,}12}{30^b} = \frac{1{,}51}{70^b}$; oplossen met de GR (*intersect*) geeft $b \approx 2{,}99$ (of $b \approx 3$);
Invullen (onafgeronde waarde, gebruik ANS) in één van de eerste twee vergelijkingen geeft
$a = \frac{0{,}12}{30^{2{,}98876...}} \approx 4{,}6 \cdot 10^{-6}$

14

Stelsel: $\begin{cases} 2b + 2h = 28 \\ bh = 24 \end{cases}$
$2b + 2h = 28 \rightarrow 2b = 28 - 2h \rightarrow b = 14 - h$, dus:
$(14 - h)h = 24 \rightarrow 14h - h^2 = 24 \rightarrow h^2 - 14h + 24 = 0 \rightarrow (h - 12)(h - 2) = 0 \rightarrow h = 12$ of $h = 2$.
Als $h = 12$ dan $b = 14 - 12 = 2$, als $h = 2$ dan $b = 14 - 2 = 12$.
De rechthoek is dus 12 bij 2 m.

15

a Afname is $7{,}8 - 4{,}3 = 3{,}5$ miljoen km^2, dat is $\frac{3{,}5}{4{,}3} \cdot 100\% = 81{,}4\%$ meer ijs in het topjaar.

b $y = -0{,}08j + 6{,}1$

c $0 = -0{,}08j + 6{,}1 \rightarrow 0{,}08j = 6{,}1 \rightarrow j \approx 76$, dus in het jaar 2076.

16

a 31 december 2018: $430 + 10 - 30 - 10 - 20 + 10 = 390$;
31 december 2008: $430 - 7 - 20 - 35 - 15 - 25 = 328$

b Op 31 december 2014, want daarna begint het te dalen. Er waren toen 440 personeelsleden.

c Netto resultaat in die twee jaren is $+10 - 30 = -20$, dus er zijn 73 mensen weggegaan.

d periode 2009-2010 en periode 2011-2013

17

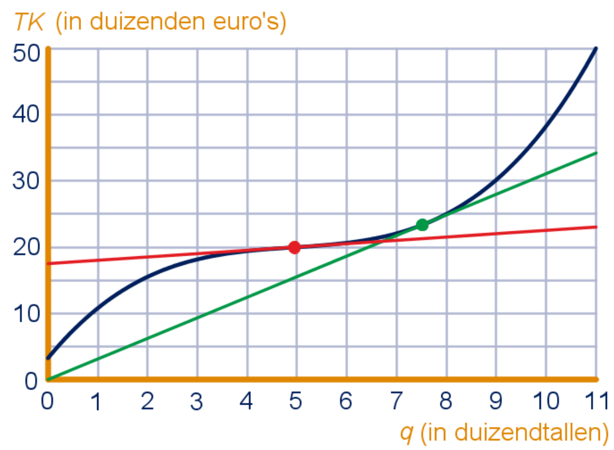
Tabel A:
- (recht) evenredig verband: $y = 1{,}2x$;
- omgekeerd evenredig verband: niet mogelijk;
- lineair verband: $y = 1{,}2x$;
- exponentieel verband: $1{,}2 \cdot g^3 = 4{,}8 \rightarrow g = 4^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}587...$ en startwaarde is $\frac{1{,}2}{1{,}587...} = 0{,}755... \rightarrow y = 0{,}756 \cdot 1{,}587^x$.

Tabel B:
- (recht) evenredig verband: niet mogelijk;
- omgekeerd evenredig verband: $y = \frac{4{,}8}{x}$;
- lineair verband: $y = \text{-}1{,}2x + 6$;
- exponentieel verband: $4{,}8 \cdot g^3 = 1{,}2 \rightarrow g = 0{,}25^{\frac{1}{3}} \approx 0{,}629...$ en startwaarde is $\frac{4{,}8}{0{,}629...} = 7{,}619... \rightarrow y = 7{,}620 \cdot 0{,}630^x$.

18

a Diagram A, want eerst moet er sprake zijn van afnemende groei en daarna van toenemende groei, dus de staafjes moeten eerst kleiner worden en daarna weer groter. Dat is alleen bij diagram A het geval.

b Zoek het punt waar de helling het laagst is, dus waarbij de raaklijn het minst steil is. Zie rode raaklijn in de figuur hieronder. Dat is (net voor) $q = 5$, dus bij een productie van 5000 stuks.
De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is (ongeveer) $0{,}5$, dus de marginale kosten zijn dan $0{,}5$ euro per stuk.



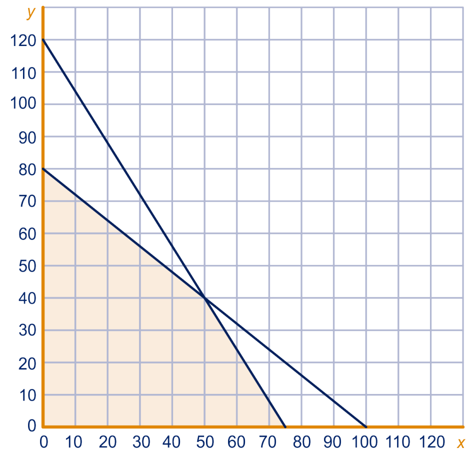
c Je moet dan de toename van de totale kosten berekenen bij toename van 2000 (dus $q = 2$) naar 2001 verpakkingen (dus $q = 2{,}001$).
$TK(2) = 15{,}53$ en $TK(2{,}001) = 15{,}53355895$;
Dus $\Delta TK = 0{,}00355...$ keer duizend euro, ofwel de marginale kosten zijn dan €3,56.

d Zoek op het werkblad de lijn vanuit de oorsprong naar de grafiek met de kleinste richtingscoëfficiënt: dat is de raaklijn uit de oorsprong aan de grafiek. Zie groene raaklijn in de figuur bij vraag **b**. Dat is bij $q = 7{,}5$, dus bij een productie van 7500 verpakkingen.
De richtingscoëfficiënt van deze raaklijn is (ongeveer) $3{,}1$, dus de gemiddelde kosten per product zijn dan €3,10.

19

a $200x + 250y \leq 20.000$ en $16x + 10y \leq 1200$

b Zie figuur.



c $200x + 250y = 20.000$ en $x = 0$, dus
$200 \cdot 0 + 250y = 20.000 \rightarrow 250y = 20.000$
$\rightarrow y = 80$, snijpunt $(0,80)$

$16x + 10y = 1200$ en $y = 0$, dus
$16x + 10 \cdot 0 = 1200 \rightarrow 16x = 1200$
$\rightarrow x = 75$, snijpunt $(75,0)$

$200x + 250y = 20.000$ en $16x + 10y = 1200$, dan
$250y = 20.000 - 200x$ en
$10y = 1200 - 16x \rightarrow 250y = 30.000 - 400x$, dus
$20.000 - 200x = 30.000 - 400x \rightarrow x = 50 \rightarrow y = 40$, snijpunt $(50,40)$

d In het punt $(50,40)$ is de winst $50 \cdot 1{,}50 + 40 \cdot 1{,}75 = €145{,}–$,
in het punt $(0,80)$ is de winst $0 \cdot 1{,}50 + 80 \cdot 1{,}75 = €140{,}–$,
in het punt $(75,0)$ is de winst $75 \cdot 1{,}50 + 0 \cdot 1{,}75 = €112{,}50$.
De winst is het grootst als ze 50 mokken en 40 borden maken. De winst is dan €140,–.

20

a $\frac{1}{2} \cdot 20 = 10$ liter in een krat halve liters; $\frac{1}{3} \cdot 24 = 8$ liter in een krat pijpjes

b $8x + 10y = 520$

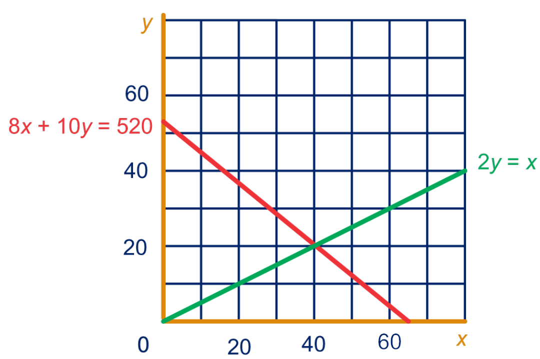
c Zie figuur.

d $2y = x$ (of $y = \frac{1}{2}x$)

e Zie vraag **c**.

f $8 \cdot 2y + 10y = 520 \rightarrow y = 20$
$x = 2 \cdot 20 = 40$, snijpunt $(40,20)$

g 40 kratten pijpjes en 20 kratten halve liters



21

a $t = 36$ invullen geeft $N \approx 8810$; de afwijking is $\frac{8810 - 8577}{8577} \cdot 100\% \approx 2{,}7\%$ (t.o.v. van het getelde aantal)

b De vergelijking oplossen met de GR (met *intersect*) geeft $t \approx 44{,}9$, dus in de loop van 2010.
(Kan ook met een tabel: $N(44) \approx 9237$ en $N(45) \approx 9252$, dus in de loop van 2010.)

c $12 \cdot g^{25} = 4650 \rightarrow g = \left(\frac{4650}{12}\right)^{\frac{1}{25}} \approx 1{,}269$, dus het aantal is met 26,9% per jaar gegroeid.

d De richtingscoëfficiënt geeft de toenamesnelheid aan van het aantal pups, dus dat betekent hier een benadering van de toename van het aantal pups per jaar.

e
$t = 25 \quad \rightarrow \quad N = 4650$
$\underline{t = 25{,}001} \quad \rightarrow \quad \underline{N \approx 4650{,}611}$
$\Delta t = 0{,}001 \quad \rightarrow \quad \Delta N \approx 0{,}611$

De helling is $\frac{\Delta N}{\Delta t} \approx \frac{0{,}611}{0{,}001} = 611$.

8 Veranderingen en verbanden 1

1 Bereken eerst met interpolatie de ervaringstemperatuur bij:
   - windsnelheid 5 m/s en thermometertemperatuur -13°C en
   - windsnelheid 10 m/s en thermometertemperatuur -13°C.

2 Stel een voor het aantal koppen en een voor het aantal staarten.

3 Schrijf beide vergelijkingen als $20x = ...$

4 Maak een situatieschets en noem de straal van de aarde r en de afstand tussen het opgetilde touw en aarde x.

5 Druk $216 \cdot V^2$ en O^3 beide in r. Kijk zo nodig terug in het hoofdstuk ’exponenten en logaritmen’.

6 Teken de grafiek van T en gebruik de optie ’minimum’ van je GR

7 De oppervlakte van een cirkel is $\pi \cdot r^2$, waarbij r de straal van de cirkel is.

8 Ontbind de teller in twee factoren: $b^2 - a^2 = (... + ...)(... - ...)$

9 Bereken de breuk $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ en ontbind de teller in factoren.

10 Geef eerst een formule voor het subsidiepercentage p.

Index