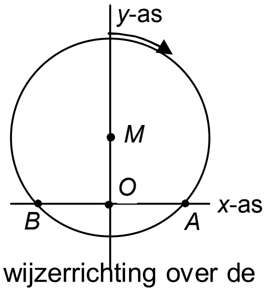
De Wageningse Methode **Zelftoets 14** **Klas 6Vb**

Naam: **Snelheid en richting**

1 Hiernaast is de cirkel met middelpunt $M(0,2)$ en straal 3 getekend. De snijpunten van de cirkel met de x-as noemen we A en B, zie plaatje.



a Bereken de lengte van AB exact.

Een kogeltje beweegt eenparig in wijzerrichting over de cirkel.
Het startpunt ($t=0$) is het hoogste punt op de cirkel; $t=\frac{1}{2}\pi$ is het eerste tijdstip na 0, waarop het kogeltje in het laagste punt van de cirkel is.
We rekenen de tijd in seconden.

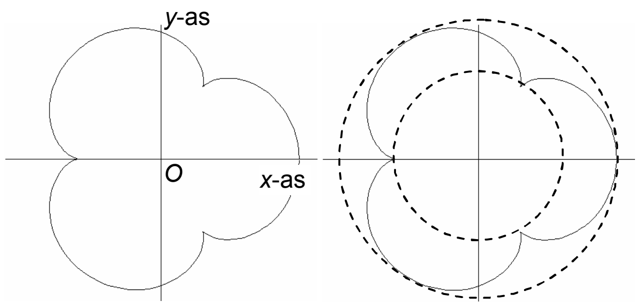
b Geef de bewegingsvergelijkingen van het kogeltje.

c Bereken de tijd die het kogeltje nodig heeft om van A naar B te komen in drie decimalen.

d Geef de exacte coördinaten van de positie waar het kogeltje zich bevindt, $\frac{1}{4}\pi$ seconden nadat het B gepasseerd is. Geef een toelichting.

2 We bekijken de beweging van een kogeltje:

$$\begin{cases} x(t)=\cos(4t)+4\cos(t) \\ y(t)=\sin(4t)+4\sin(t) \end{cases}, \text{ met } 0 \le t \le 2\pi .$$



Hiernaast links staat de baan.
Rechts is de baan ‘ingeklemd’ tussen twee cirkels met middelpunt $O(0,0)$. De baan heeft drie punten met de grote cirkel en ook drie met de kleine gemeen.

We gaan de straal van beide cirkels bepalen. Hierbij komt de volgende formule van pas: $x^2(t)+y^2(t)=17+8\cdot\cos(3t)$.

a Laat zien dat deze formule juist is.

b Bepaal de straal van de kleine en van de grote cirkel.
Bepaal ook exact de drie momenten waarop het kogeltje zich op de kleine cirkel bevindt.
Licht je antwoord toe.

Het lijkt erop dat de punten van de baan die op de kleine cirkel liggen keerpunten zijn, dat wil zeggen punten waar de snelheid 0 is, (dus de

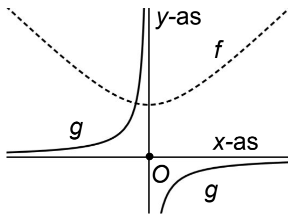
snelheidscomponent zowel in de x- als de y-richting 0 is.)
We gaan dat eens bekijken.

c Geef de formules voor $x'(t)$ en $y'(t)$.

d Ga nu met een exacte berekening na voor één van de drie punten op de kleine cirkel of het een keerpunt is.

e Bepaal de snelheidsvector op één van de twee tijdstippen waarop het kogeltje op de grote cirkel is en niet op de x-as.
Hoe volgt hieruit dat de grote cirkel op dit tijdstip de baan raakt?

3 Hiernaast staan in één figuur de grafieken van f en g met $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ en $g(x)=-\dfrac{1}{x}$.
Als (x,y) op de grafiek van f dan $y^2-x^2=4$.

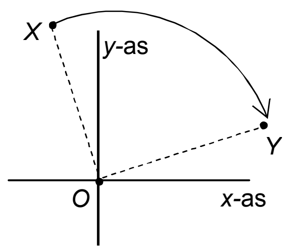


a Laat dat zien.

Het omgekeerde: *als* $y^2-x^2=4$ *dan* (x,y) *op de grafiek van f*, is niet waar.

b Waarom niet? Hoe krijg je de grafiek van het verband $y^2-x^2=4$ uit de grafiek van f?

Het lijkt erop dat je de grafiek van $y^2-x^2=4$ krijgt door de grafiek van g te draaien en te rekken.
We bekijken dat in het volgende.



Als je het punt $X(x,y)$ rechtsom over $90°$ om $O(0,0)$ draait, krijg je het punt $Y(y,-x)$. We bekijken de afbeelding A: $(x,y)\to(x+y,-x+y)$ (dus $\vec{x}\to\vec{x}+\vec{y}$).
A is de draaiing over $45°$ rechtsom om $O(0,0)$ gevolgd door een vermenigvuldiging met $\sqrt{2}$.

c Leg dat uit.

We passen de afbeelding A toe op een punt $T\left(t,-\dfrac{1}{t}\right)$ op de grafiek van g.

d Toon aan dat het beeld van T aan $y^2-x^2=4$ voldoet.

e Welke asymptoten heeft f? Licht je antwoord toe.

De grafiek van de functie $h: x\to\sqrt{x^2+2x+5}$ ontstaat uit de grafiek van f door een verschuiving.

f Toon dat aan en bepaal algebraïsch de scheve asymptoten van h.