Veranderingen deel 2

Examenprogramma:	**VWO wiskunde C**
Onderdeel van domein:	**Veranderingen en Verbanden**
Auteur(s):	**Jacques Jansen** **m.m.v.** **Hielke Peereboom, Simon Biesheuvel** **Floor van Lamoen (eindredactie) en** **Michiel Doorman**

Dit lesmateriaal is ontwikkeld in opdracht van cTWO om gebruikt te worden bij de pilots vernieuwde examenprogramma's wiskunde in de periode 2008-2017.

Herziene versie

door Hielke Peereboom m.m.v. Peter Vaandrager en Piet Versnel,

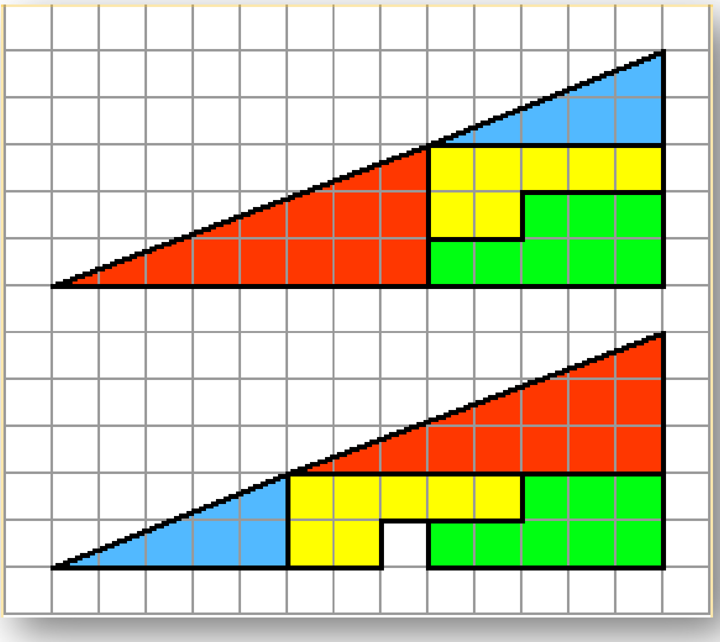
onder verantwoordelijkheid van SLO (december 2013)

Paragraaf 7 : Helling

Wat is een helling in een punt in een grafiek? Hoe benader je een helling? Wat is een raaklijn? Hoe kun je hellingen met elkaar vergelijken?

In figuur 1 staan twee, op het eerste gezicht even grote, vierkleurige driehoeken, beide opgebouwd uit dezelfde vormen, die alleen maar anders gerangschikt zijn. De vormen zijn aangegeven met de kleuren rood, blauw, geel en groen. Er lijkt iets niet te kloppen omdat in de onderste figuur voor dezelfde driehoek meer hokjes nodig lijken te zijn dan in de bovenste. Een paradox (schijnbare tegenstelling). Wat is er aan de hand?

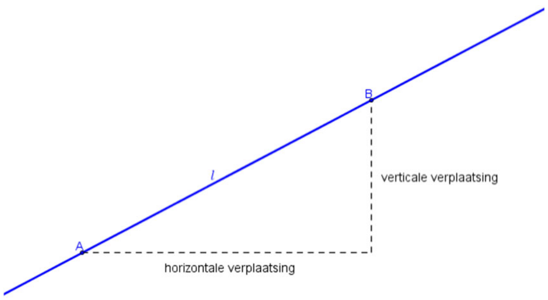
figuur 1



Op het eerste gezicht lijken de beide veelkleurige figuren op driehoeken, maar dat zijn ze niet. Het zijn vierhoeken.

1a. Leg uit dat de rode en de blauwe driehoek niet gelijkvormig zijn.
b. Bereken de helling van de schuine zijde van de blauwe driehoek en de helling van de schuine zijde van de rode driehoek. Vergelijk de hellingen met elkaar en schrijf je conclusie op.

Hieronder zie je hoe je de helling van een lijn l uitrekent.



Neem twee punten op lijn l, bijvoorbeeld A en B.

$$\text{helling lijn } l = \frac{\text{verticale verplaatsing}}{\text{horizontale verplaatsing}}$$

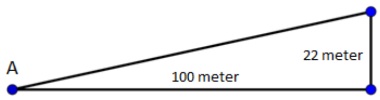
In plaats van '*helling van een lijn*' spreek je ook wel van '*richtingscoëfficiënt van een lijn*'.

c. Leg nu uit waarom de beide vierkleurige driehoeken in figuur 1 in werkelijkheid vierhoeken zijn. Om jezelf nog eens te overtuigen kan het goed zijn een geo-driehoek langs de "schuine zijde" van de driehoek te leggen.

Probleem van de "hellingen"
Een rechtlijnige grafiek is overal even steil, er is slechts één helling. Heeft een grafiek die niet recht loopt, bijvoorbeeld een parabool, ook een helling of heeft die juist heel veel hellingen? Hoe bepaal je die hellingen dan? Kan dat door raaklijnen te schetsen en dan daarvan de hellingen te berekenen?

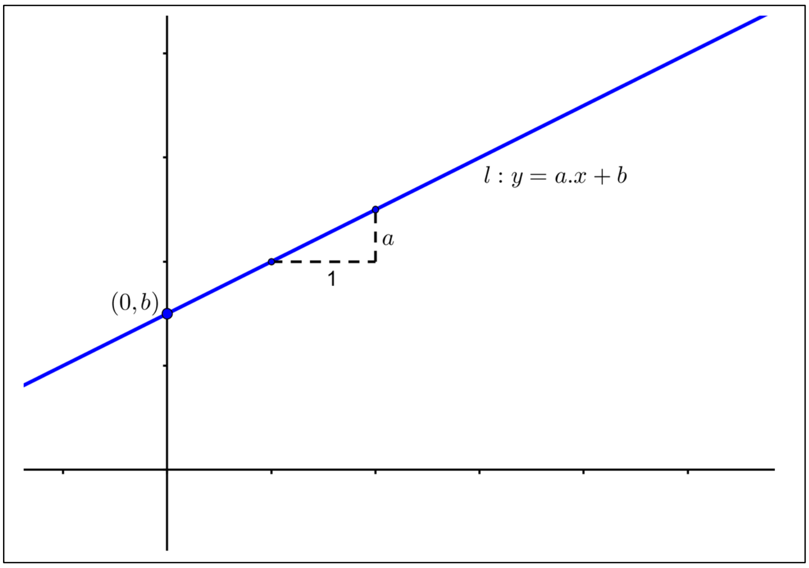
Bekijk de foto hiernaast. Je vraagt je misschien af: wat betekent die 22% op het verkeersbord?

Een dergelijk percentage op zo'n verkeersbord wordt hellingspercentage genoemd.
Een hellingspercentage van 22% betekent dat bij een horizontale verplaatsing van 100 meter er een verticale verplaatsing is van 22 meter. Een hellingspercentage van 22% komt dus overeen met een helling van $\frac{22}{100} = 0,22$.



2. Bereken in de volgende situaties steeds de helling van de lijn.
a. Het hellingspercentage van de lijn is 8%.
b. De lijn gaat door de punten $A(0, 0)$ en $B(63, 21)$.
c. De lijn gaat door de punten $A(10, 80)$ en $B(80, 210)$.
d. De lijn gaat door de punten $A(-15, -30)$ en $B(35, 130)$.
e. De lijn heeft de bijbehorende formule $y = 4\frac{1}{2}x - 7$.

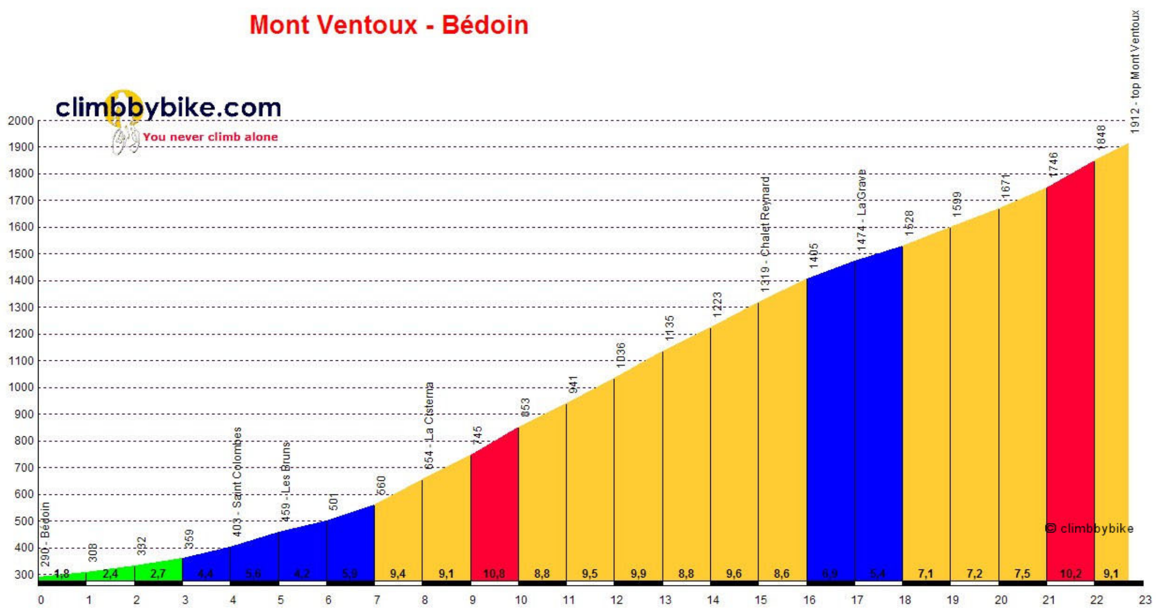
De algemene vorm van de formule van een rechte lijn is $y = a \cdot x + b$.
Hierin is het getal a de helling (richtingscoefficient) van de lijn.
Deze lijn snijdt de y-as in het punt $(0, b)$.



De berg Mont Ventoux

We maken een uitstap naar, voor fietsers één van de interessantste bergen van Frankrijk, de " Mont Ventoux". In figuur 2 zie je het *profiel* van de Mont Ventoux via Bedoin.
De hoogte van de start in Bedoin is 290 meter. De hoogte van de top is 1912 meter.
De lengte van de af te leggen weg van start naar top is 22,7 km.

3a. Bereken de gemiddelde toename van de hoogte per kilometer afgelegde weg.



figuur 2

Hoe is de afgelegde weg in figuur 2 aangegeven?
Men heeft de af te leggen weg van de Mont Ventoux van 22,7 km verdeeld in 22 gelijke stukken van 1 km en een 23^e stuk van 0,7 km. Bij elk stuk is het hellingspercentage aangegeven. Voor het gemak heeft men steeds gekozen voor een horizontale verplaatsing van 1 km. In totaal een horizontale verplaatsing van $22 \times 1 + 0,7 = 22,7$ km.
Na elke horizontale verplaatsing van 1 km heeft men ook de hoogte aangeven.
Omdat in de figuur hierboven een aantal getallen moeilijk afleesbaar zijn is deze figuur vergroot in de bijlage. Kijk in de bijlage en de tabel hieronder.

horizontale verplaatsing	1	2	3	4	5	6	7
hoogteverandering	290-308	308-332	332-359	359-403	403-459	501-459	563-501
afgelezen helling							
berekende helling							

Ga er vanuit dat de aangegeven hoogtes juist zijn.
3b. Lees uit de figuur het hellingspercentage af van de eerste 7 km horizontale verplaatsingen, reken deze om naar de grootte van de helling en vul deze in op de derde rij van bovenstaande tabel.
3c. Bereken met behulp van de in de tabel gegeven hoogteveranderingen de hellingen van de eerste 7 km horizontale verplaatsingen en vul deze op de vierde rij van bovenstaande tabel in.
3d. Vergelijk de getallen op de derde en vierde rij met elkaar. Komen ze (redelijk) overeen?

4. Stel dat de weg van Bedoin naar de top overal even steil zou zijn en men een verkeersbord plaatst om het hellingspercentage van deze weg aan te geven. Bereken dan met behulp van de gegevens het hellingspercentage dat op dit verkeersbord komt te staan.

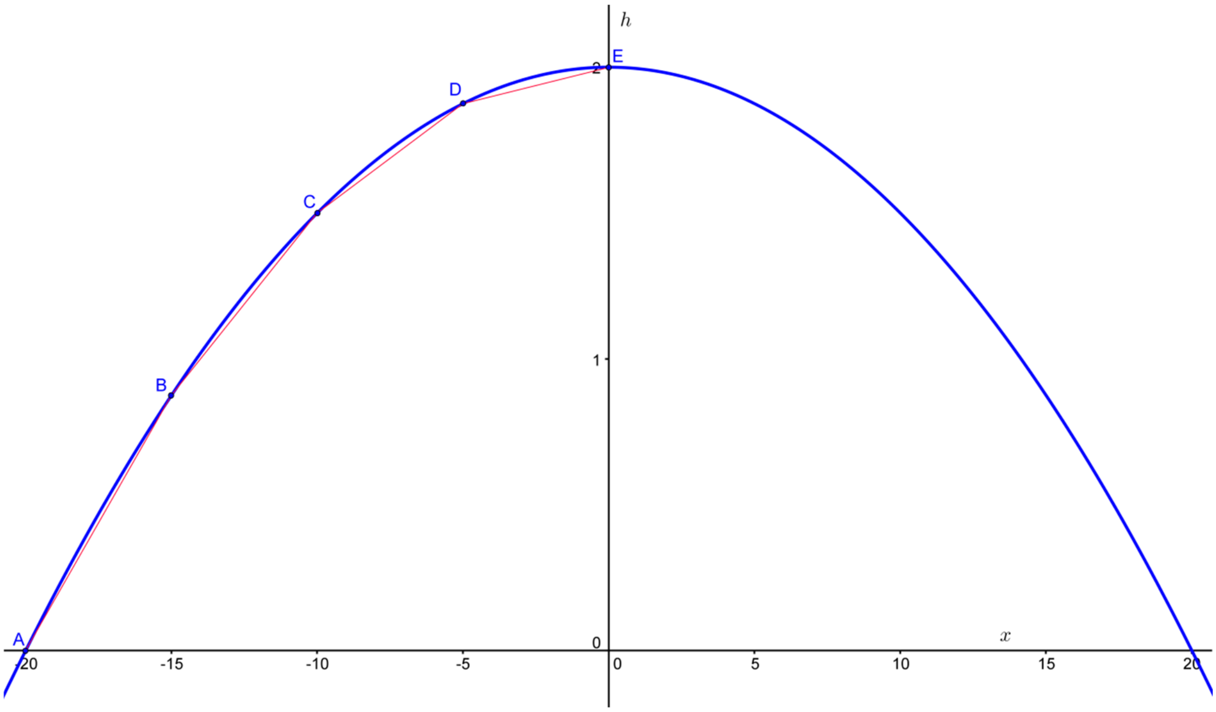
In werkelijkheid is de weg, zoals we zagen, niet overal even steil.
In de tabel hieronder is de helling in vier categorien verdeeld.

	helling
Groen	0 – 0,04
Blauw	0,04 – 0,07
Geel	0,07 – 0,10
Rood	Meer dan 0,10

In de gele zone komt een helling voor die precies twee keer zo groot is als een helling in de blauwe zone.
5. Geef aan op welke afgelegde afstanden dit betrekking heeft.

6. Na hoeveel km horizontale verplaatsing begint een stuk dat even steil is als in de denkbeeldige situatie die beschreven wordt bij opgave 4?

Veronderstel dat een ander bergprofiel precies de vorm heeft van een bergparabool. Zie figuur 3 hieronder.



figuur 3

Bij deze bergparabool hoort de formule $h = -0,005x^2 + 2$. Hierin is h is de hoogte in kilometers en de horizontale afstand x is ook in kilometers.
7. Laat met berekeningen met behulp van de gegeven formule zien dat de top op een hoogte van 2000 meter ligt en dat het bergprofiel 40 km breed is.

Het profiel is mooi symmetrisch ten opzichte van de verticale as. We bekijken alleen de linkerkant van het bergprofiel. We willen weten hoe steil de berg is op bepaalde stukken. We verdelen het interval [–20, 0] in vier gelijke stukken. Dit levert vijf punten op van de parabool: de punten *A*(–20, 0), *B*(–15; 0,875), *C*(–10; 1,5), *D*(–5; 1,875) en *E*(0, 2).
De punten worden met lijnstukken achtereenvolgens verbonden en de vier lijnstukken *AB*, *BC, CD* en *DE* geven samen een benadering van het bergprofiel waarvan we de hellingen kunnen uitrekenen.
Bijvoorbeeld de helling van *AB* is gelijk aan:

$$\frac{\text{verticale verplaatsing}}{\text{horizontale verplaatsing}} = \frac{0{,}875-0}{-15-(-20)} = \frac{0{,}875}{5} = 0{,}175\,.$$

Dat betekent een toename van 0,175 km (ofwel 175 meter) per km.

8. Neem onderstaande tabel over en vul hem verder in.

lijnstuk	helling
AB	0,175
BC	0,125
CD	…
DE	…

Het linker gedeelte van het bergprofiel hebben we benaderd met vier lijnstukken. Door meer punten op de grafiek te kiezen kun je het bergprofiel met meer lijnstukken benaderen.

Zo kunnen we bijvoorbeeld de hellingen van het bergprofiel rond het punt *C*(–10; 1,5) verder onderzoeken. We zoomen in op de grafiek in de buurt van punt *C* en nemen een punt *P* op de parabool vlakbij het punt *C*.

Neem eerst voor *P* het punt met *x*-coördinaat –9.
9a. Controleer met je rekenmachine dat de *y*-coördinaat van *P* gelijk is aan 1,595.
b. Laat met een berekening zien dat de helling van het lijnstuk *CP* gelijk is aan 0,095.

Door het punt *P* nog dichter bij *C* te kiezen gaat het bergprofiel in de buurt van punt *C* steeds meer lijn lijken op lijnstuk *CP*. De helling van lijnstuk *CP* komt steeds dichter in de buurt van de helling van het bergprofiel in punt *C*.

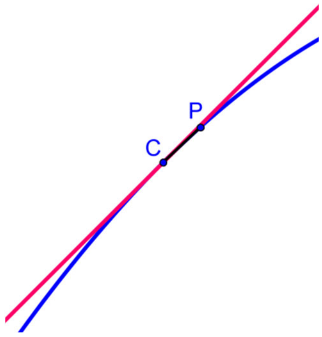
We nemen punt *P* dichter bij punt *C*, bijvoorbeeld door *x*-coördinaat –9,9 voor *P* te nemen.
10. Laat zien dat nu de helling van *CP* gelijk is aan 0,0995.

11. Neem de tabel hieronder over en vul deze verder in.

x-coördinaat *P*	helling *CP*
–9	0,095
–9,9	0,0995
–9,99	0,…
–9,999	…

12. Vul in: hoe dichter punt *P* bij punt *C* wordt genomen, hoe dichter de helling van *CP* in de buurt van het getal … komt.

13. Hoe groot is dus de helling van het bergprofiel in punt C?
De rode lijn in figuur 4 hiernaast geeft aan hoe steil het bergprofiel is in punt *C*. Deze lijn gaat door punt *C* met 0,1 als helling, dat is het getal dat je in de vorige opdrachten hebt benaderd. Een dergelijke lijn wordt een raaklijn genoemd. Deze lijn heeft in de buurt van punt C maar één punt gemeenschappelijk met de grafiek, het raakpunt. De helling van de raaklijn is dus de helling van de grafiek in het raakpunt.
Je ziet in figuur 4 hiernaast dat een lijnstukje *CP* uit opdracht 11 vrijwel op de raaklijn ligt. We spreken af dat de helling van de raaklijn (vrijwel) gelijk is aan de helling van het lijnstukje *CP* , als tenminste punt *P* maar heel dicht bij punt *C* wordt gekozen.



figuur 4

Voorbeeld

Benader met een berekening de helling van de parabool met formule $y = x^2 + 3x$ in het punt *A* met *x*-coördinaat 1.

Oplossing

Neem een punt *P* vlak bij punt *A*, bijvoorbeeld het punt *P* met *x*-coördinaat 1,001; hoe dichter je punt *P* bij punt *A* neemt, hoe beter de benadering.
Bereken de *y*-coördinaten van *A* en *P*.

$y_A = 1^2 + 3 \cdot 1 = 4$ en $y_B = (1{,}001)^2 + 3 \cdot 1{,}001 = 4{,}00501$.

De helling van *AP* is gelijk aan :

$$\frac{\text{verticale verplaatsing}}{\text{horizontale verplaatsing}} = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \frac{4{,}00501 - 4}{0{,}001} = \frac{0{,}00501}{0{,}001} = 5{,}001 .$$

De helling van de parabool in het punt *A* is dus gelijk aan 5.

14. Bereken, op de manier van het voorbeeld, de hellingen in de volgende gevallen.

a. De helling in het punt *B* met *x*-coördinaat 0 op de parabool met formule $y = x^2 + 3x$.

b. De helling in het punt *C* met *x*-coördinaat –3 op de parabool met formule $y = x^2 + 3x$.

c. De helling in het punt *D* met *x*-coördinaat 1 op de grafiek met formule $y = \frac{1}{2}x^3 - x + 4$.

d. De helling in het punt *E* met *x*-coördinaat 0 op de lijn met formule $y = 5 + 3x$.

e. De helling in het punt *F* met *x*-coördinaat 2 op de parabool met formule $y = x^2 - 4x$.

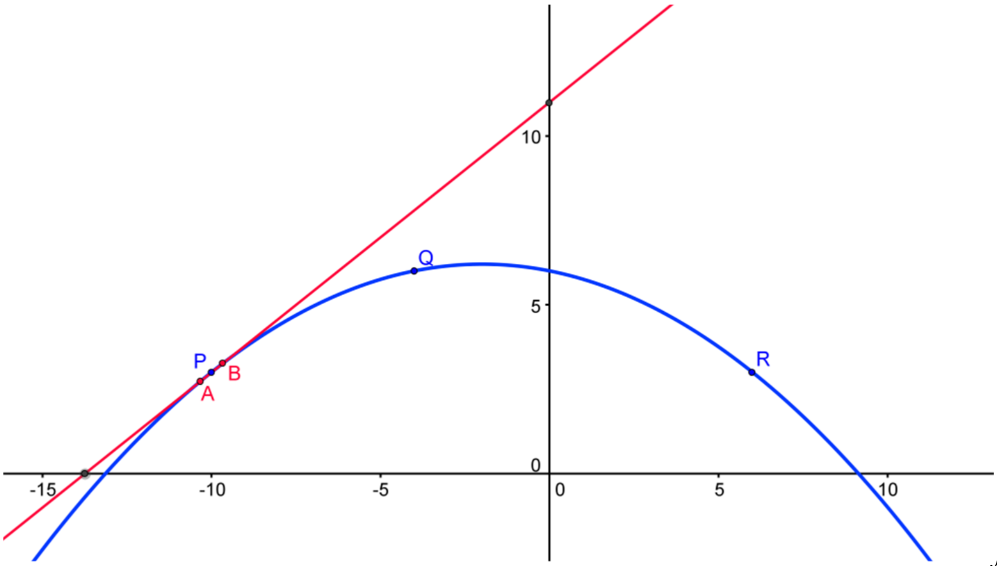
f. Had je het antwoord bij vraag **d** ook sneller kunnen zien?

15a. Als je bij vraag 14e goed gerekend hebt, heb je voor de helling in punt *F* het getal 0 gevonden. Wat betekent dit voor de raaklijn in punt *F*?

b. Je weet dat een parabool symmetrisch is. Waar ligt bij de parabool van vraag 14e de symmetrieas?

c. Gegeven is dat de helling van de parabool van vraag 14e in het punt met *x*-coördinaat 3 gelijk is aan 2. Leg uit dat je zonder een berekening zoals in het voorbeeld en in opgave 14, kun je zeggen hoe groot de helling is in het punt met *x*-coördinaat 1. Hoe groot is die helling?

16. Wat kun je zeggen over de helling van een grafiek op een interval waarop de grafiek stijgend is? En wat als de grafiek dalend is?
Je kunt de helling in een punt op een grafiek ook op een andere manier bepalen.



figuur 5

In figuur 5 is de bergparabool met vergelijking $y = -0,05x^2 - 0,2x + 6$ getekend met de punten $P(-10, 3)$, $Q(-3, 6)$ en $R(6, 3)$. Deze figuur 5 staat ook op de bijlage. Gebruik deze voor opgaven 17 t/m 20.

Heel dicht bij punt P zijn twee punten A en B op de parabool getekend. De (rode) lijn door A en B valt vrijwel samen (ofwel is een goede benadering van) de raaklijn in punt P aan de parabool. De helling van de parabool is bij benadering dus gelijk aan de helling van de lijn door A en B. Deze helling kun je uit de figuur redelijk goed aflezen.
Kijk je bijvoorbeeld naar de snijpunten van deze lijn met de x-as en y-as dan zitten deze in de buurt van (–14, 0) en (0, 11). Dit betekent dat de helling ongeveer gelijk is aan $\frac{11}{14} \approx 0,8$.
Ga je uit van het punt P en het snijpunt met de y-as, dan volgt hieruit voor de helling $\frac{11-3}{10} = 0,8$.
Conclusie: de helling van de parabool in het punt P is ongeveer 0,8.
In de wiskunde zeg je dat de helling **grafisch** (met behulp van de grafiek) is benaderd.

17. Laat met een berekening, zoals in opgave 14, zien dat de helling in punt P inderdaad 0,8 is.

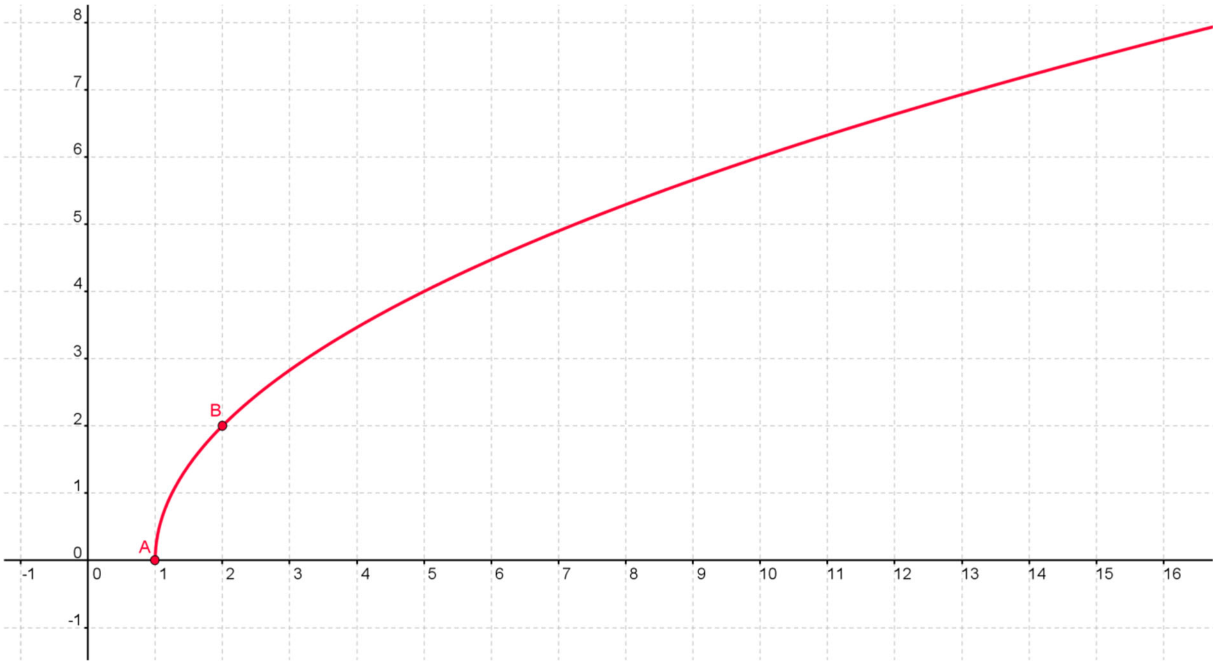
18. Benader grafisch de helling van de parabool in de punten Q en R. Rond je antwoorden af op één decimaal.

19a. Leg uit waarom de helling van de lijn door de punten (–5, 0) en (0, 5) gelijk is aan 1.
b. Wat weet je van lijnen die dezelfde helling hebben?
c. Onderzoek grafisch in welk punt de helling 1 is.
d. Onderzoek grafisch in welk punt de helling –1 is.

20. Bepaal grafisch de coördinaten van het punt waarin de helling nul is. Rond de coördinaten van dit punt af op één decimaal nauwkeurig.

21. Plot op je rekenmachine de grafiek van $y = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ en teken deze grafiek zo nauwkeurig mogelijk in je schrift. Gebruik hierbij de tabelfunctie van je rekenmachine.
a. Benader grafisch de helling van de grafiek in het punt $P(1, 4)$.
b. Bepaal de coördinaten van het punt waarin de helling de helft is van de helling in punt P.
c. De grafiek is afnemend dalend. Wat betekent dit voor de helling?
d. Bepaal met een berekening de helling van de grafiek in het punt $Q(16, 1)$.

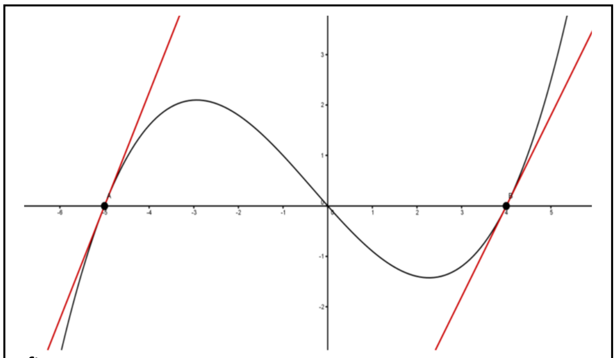
22. Gegeven is de formule $y = 2\sqrt{x-1}$.



figuur 6

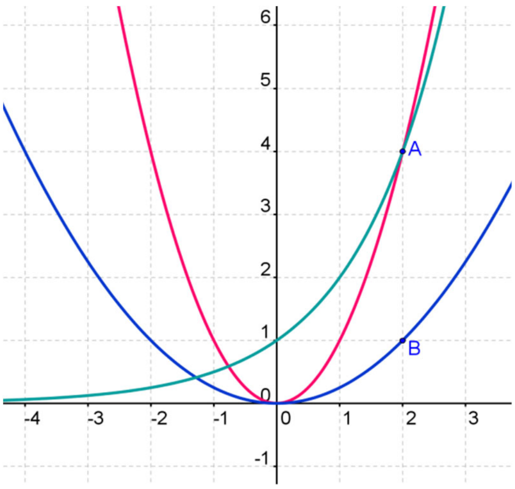
De bijbehorende grafiek die je ziet in figuur 6, snijdt de x-as in het punt $A(1, 0)$.
a. Benader grafisch de helling van de grafiek in punt $B(2, 2)$.
b. De grafiek is afnemend stijgend. Onderzoek grafisch in welk punt de helling nog maar de helft is van de helling in punt B.
c. Controleer met een berekening hoe nauwkeurig je grafische benadering van de helling van vraag a is.
d. Bepaal grafisch de coördinaten van het punt waarin de helling gelijk is aan 2.

23. Gegeven is de formule
$y = 0,05x(x-4)(x+5)$.
In figuur 7 is de bijbehorende grafiek getekend.
In de punten $A(-5, 0)$ en $B(4, 0)$ zijn de raaklijnen getekend.
De formules van de beide raaklijnen zijn bij benadering:
$y = 2,25x + 11,25$ en $y = 1,80x - 7,2$
De helling in punt A is groter dan de helling in punt B.


figuur 7

a. Bereken met behulp van de twee gegeven formules, in twee decimalen nauwkeurig, hoeveel de helling in A groter is dan die in B.
b. De kromme lijkt in de buurt van de oorsprong bijvoorbeeld voor $-1 \le x \le 1$ nagenoeg rechtlijnig te zijn. Benader hiermee de helling in de oorsprong.
c. Laat in gedachten een mier kruipen over de kromme, te beginnen bij punt A en te eindigen bij punt B. Beschrijf de veranderingen van de hellingen in de afgelegde route. Vanaf waar zijn de hellingen negatief en waar is de helling op zijn kleinst?

In figuur 8 (ook op de bijlage) zijn drie grafieken getekend: twee parabolen: $y = x^2$ en $y = 0,25x^2$ en een derde grafiek die hoort bij een exponentieel verband met formule $y = 2^x$.



figuur 8

24a. Bepaal met de figuur op de bijlage grafisch de hellingen van de parabolen in de punten A en B.
b. Leg uit waarom de helling van de grafiek $y = 2^x$ in punt A kleiner is dan van de parabool $y = x^2$.

Van de drie grafieken worden in acht punten de hellingen onderzocht. De hellingen van $y = 2^x$ zijn op vier decimalen afgerond. In de tabel hieronder zijn voor een deel die hellingen gegeven.

	x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3
helling	$y = x^2$	–8	–6		–2				
helling	$y = 0,25x^2$	–2			–0,5				1,5
helling	$y = 2^x$	0,0433	0,0867	0,1734	0,3467	0,6934	1,3868	2,7735	5,5471

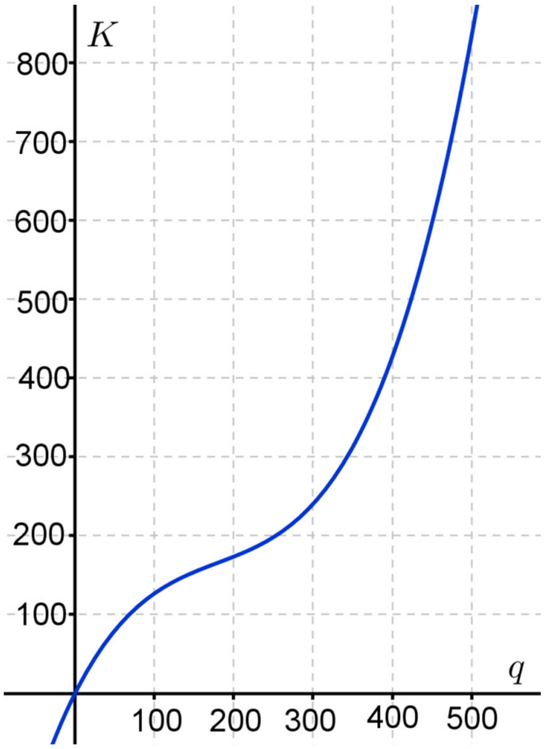
25a. Neem de tabel op de vorige bladzijde over en vul deze verder in. Maak o.a. gebruik van lijnsymmetrie van parabolen.
b. Welk vermoeden heb je als je de hellingen van de beide parabolen vergelijkt in punten met dezelfde x-coördinaat?
c. Welke regelmaat bij stapgrootte 1 zie bij de hellingen van $y = 2^x$?
d. Hoe groot is vermoedelijk de helling in het punt met $x = 7$ in de grafiek van $y = 2^x$?

Opmerking
Je kunt de helling van een grafiek in een punt ook op je rekenmachine via een rechtstreekse toetsencombinatie berekenen. Welke toetsencombinatie je moet gebruiken hangt af van het merk en type rekenmachine dat je gebruikt. Vraag je docent hoe dat op jouw rekenmachine in zijn werk gaat.

Herhalingsopgaven

26. Kurketrekkers

Bij een bedrijf worden kurketrekkers gemaakt. De productiekosten K hangen af van het aantal kurketrekkers q dat geproduceerd wordt. Hiernaast zie je de grafiek van dit verband. In de economie noem je de toename van de productiekosten als je één kurketrekker meer maakt, de marginale kosten. Deze marginale kosten mag je benaderen met behulp van de helling van de grafiek.



a. Hoe volgt uit de grafiek dat in deze situatie de marginale kosten positief zijn?

b. Geef een benadering van de marginale kosten bij $q = 100$.

c. Bij welk aantal geproduceerde kurketrekkers zijn de marginale kosten even groot als bij $q = 100$?

d. Bij welk aantal geproduceerde kurketrekkers zijn de marginale kosten op zijn kleinst? Licht je antwoord toe.

27. Tellerstand

In allerlei situaties worden video opnamen gemaakt. In de vorige eeuw werden deze opnamen opgeslagen op videobanden. Deze banden waren bij het opnemen en afspelen voorzien van een tellerstand. Voor het verband tussen de tijd t in minuten en de tellerstand n geldt het verband $n = 250\sqrt{16t + 225} - 3750$.

a. Laat met een berekening zien dat uit de formule volgt dat bij het begin van de band de teller op 0 staat.

b. De totale afspeeltijd van een bepaalde videoband is 3 uur. Bereken de tellerstand aan het einde van zo'n band.

c. Laat zien dat bij het begin van afspelen de tellerstand sneller toeneemt dan aan het eind.

d. De snelheid waarmee de tellerstand verandert is gelijk aan de helling van de grafiek die bij de formule hoort. Laat met berekeningen zien dat deze snelheid na 30 minuten ongeveer anderhalf keer zo groot is als na 90 minuten afspeeltijd.

28. Kavels

In polders wordt overtollig water afgevoerd via sloten. In een nieuwe polder moeten de sloten nog worden gegraven. Er wordt een rechthoekig patroon van recht op elkaar staande sloten aangehouden. Een rechthoekig, door sloten omgeven, stuk polder wordt een kavel genoemd.

De kosten K voor het graven hangen onder andere af van de lengte L van de kavels. Voor kavels met een grootte van 30 hectare heeft men berekend dat de volgende formule geldt: $K = \frac{21270}{L} + 233L$.

Hierin zijn de kosten in euro's en de lengte in hectometer.

De grafiek van K staat hiernaast.

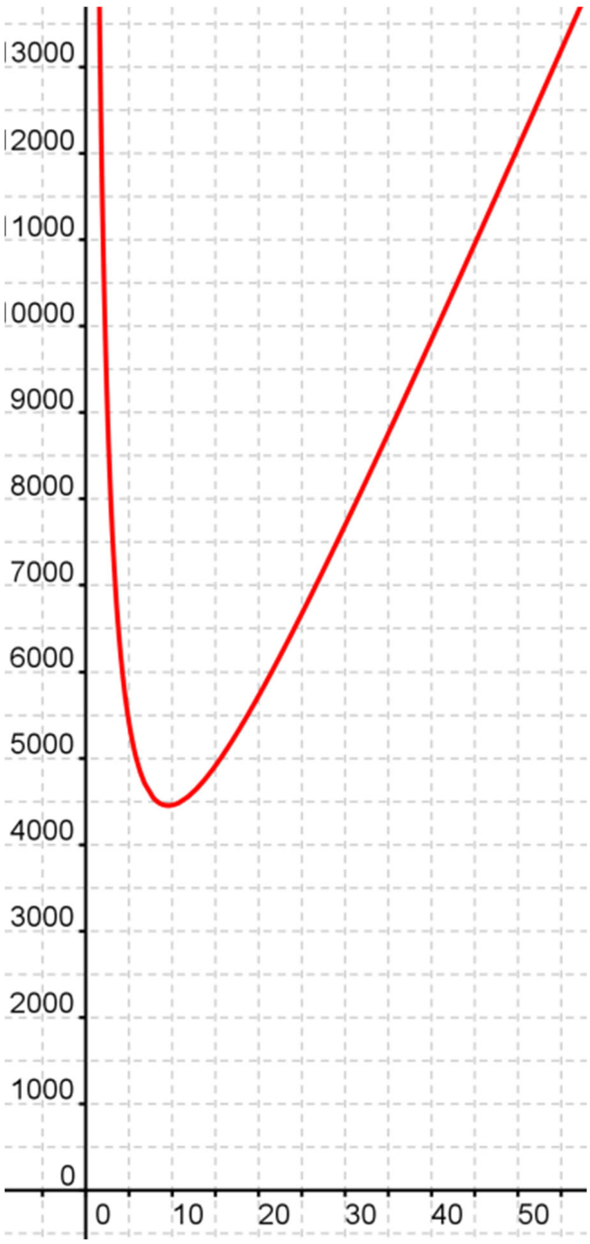
a. Bereken de kosten als de kavellengte 20 hectometer is.

b. Benader met een berekening de helling van de grafiek in het punt met $L = 15$.

c. Benader grafisch de helling van de grafiek in het punt met $L = 5$. Wat is de betekenis van dit getal?

d. Voor grote waarden van L blijken de kosten vrijwel lineair toe te nemen. Met hoeveel nemen de kosten dan toe per hectometer?

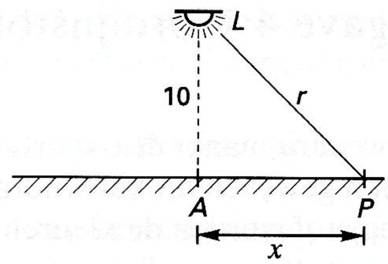
e. Beredeneer met behulp van de formule dat het antwoord van opgave **d.** gelijk is aan 233.



29. Lamp

Voor straatverlichting gebruikt men lampen volgens het model in de figuur hiernaast. De lamp hangt 10 meter boven de grond en het licht kan zich in alle richtingen verspreiden. De afstand van de lamp tot een punt *P* op het wegdek noemen we *r* (in meters) en de verlichtingssterkte (in lux) noemen *S*.

Punt *A* bevindt zich recht onder de lamp en *x* is de afstand tussen *A* en *P*.



De volgende formules zijn geldig: $r = \sqrt{x^2 + 100}$ en $S = \dfrac{100\,000}{r^3}$.

a. Laat met een berekening zien dat in *A* de lichtsterkte gelijk is aan 100 lux.

b. Naarmate *P* verder van *A* afligt neemt de lichtsterkte af. Beredeneer dat met behulp van de formules.

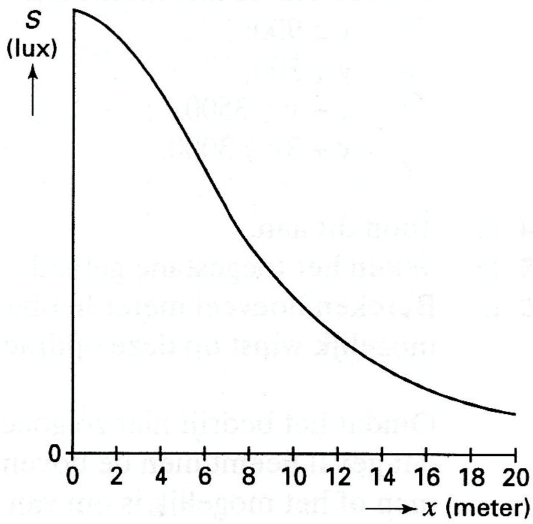
c. Is de grafiek van *S* als functie van *r* toenemend dalend of afnemend dalend? Licht je antwoord toe.

In de figuur hiernaast is de grafiek van *S* als functie van *x* getekend.

d. Beschrijf het verloop van de grafiek. Gebruik hierbij de woorden stijgend-dalend-toenemend-afnemend.

De helling van de grafiek komt overeen met de verandering van de lichtsterkte (in lux/meter)

e. Iemand vraagt zich af of er een punt is waarin deze verandering van de lichtsterkte kleiner is dan –8 lux/meter. Leg met de figuur hiernaast uit dat er inderdaad zo'n punt bestaat.



Paragraaf 8: Exponentiële groei

Waar gaat deze paragraaf over?
Hoe verloopt de groei van de wereldbevolking? Hoe zouden we de groei van de wereldbevolking graag willen hebben? En is dat verstandig? Wat is geremde en begrensde groei en welke vorm heeft de bijbehorende grafiek?
De verschillende groeivormen zullen we soms vergelijken met lineaire groei.

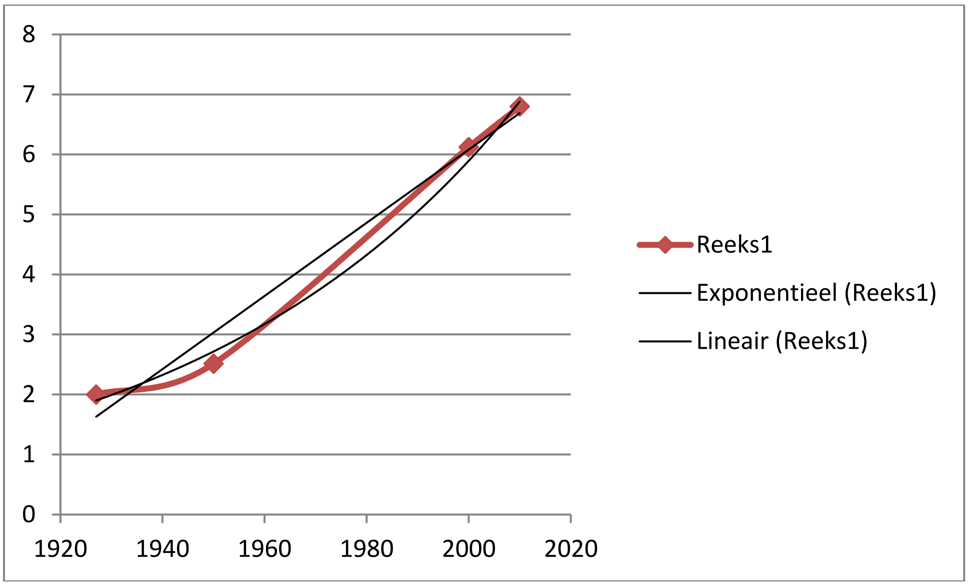
Uit het televisieprogramma "Eén Vandaag" van 7 mei 2010:

> **Waarom is 'Overbevolking' een taboe?**
> *Overbevolking is tegenwoordig een heel actueel thema. Volgens de laatste cijfers lopen er nu al meer dan 6,8 miljard mensen rond op de aarde. En dit aantal blijft maar groeien. We evolueren langzamerhand naar een kritische grens: Overal ter wereld slinken drinkwaterreserves en de hoeveelheid landbouwgrond krimpt elke dag.*

Je gaat de groei van de wereldbevolking nader onderzoeken.

Jaar	1927	1950	2000	2010
Aantal bewoners in miljarden	2	2,515	6,121	6,8

Bij deze tabel is met behulp van Excel bij deze tabel een vloeiende grafiek gemaakt passend bij de tabelwaarden. Verder zijn twee trendlijnen getekend een rechte en een kromme. Zie figuur 1.



figuur 1

De rechte trendlijn gaat o.a. door de punten met coördinaten (1948, 3) en (1983, 5). Bij deze trendlijn hoort een lineaire formule van de vorm $B = a \cdot t + b$ waarin B het aantal bewoners is in miljarden en t de tijd in jaren. Neem voor $t = 0$ het jaar 1927.
1. Stel met behulp van de gegeven twee punten deze formule op voor de rechte trendlijn.

Ga er vanuit dat bij de kromme trendlijn een exponentiële formule van de vorm $B = b \cdot g^t$ hoort.
B is hierin weer de grootte van de wereldbevolking in miljarden en t het aantal jaren waarbij $t = 0$ het jaar 1927 is.
De exponentiële trendlijn gaat o.a. door de punten (0, 2) en (83; 6,8).
2a. Bereken de groeifactor over deze periode van 83 jaar.
b. Laat met een berekening zie dat de groeifactor per jaar ongeveer 1,015 is.
c. Geef nu de formule die bij de exponentiële trendlijn hoort.
d. Bepaal grafisch in welk jaar de groei volgens de exponentiële trendlijn even groot is als volgens de lineaire trendlijn. Controleer je antwoord met je rekenmachine.

Soms kijkt men naar een periode waarin de bevolkingsgrootte op het eind van de periode twee keer zo groot is als in het begin van deze periode. Zo'n periode wordt de **verdubbelingstijd** genoemd.

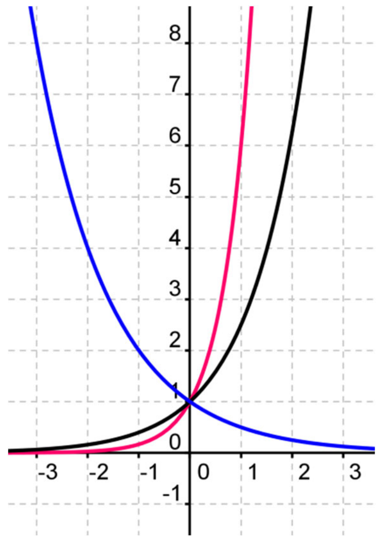
3. Bij een exponentieel verband is de verdubbelingstijd constant en hangt niet af van de hoeveelheid waarmee je begint. Laat zien of leg uit dat dit bij een lineair verband niet het geval is.

4a. Bereken hoelang de verdubbelingstijd is die bij de exponentiële trendlijn hoort. Is dit alarmerend?
b. Geef bij beide trendlijnen een voorspelling van de grootte van de wereldbevolking voor 2050 en geef het verschil van beide voorspellingen.

De groeifactor van de wereldbevolking over een periode van 10 jaar is ongeveer 1,16.
c. Ga dat met een berekening na.
d. Bereken met hoeveel procent de bevolking in tien jaar toeneemt.

5a. Lees zo nauwkeurig mogelijk de groeifactoren af bij de drie grafieken in figuur 2.
b. Bepaal zo nauwkeurig mogelijk de verdubbelingstijd van de twee stijgende grafieken van figuur 2.
c. Bepaal grafisch het verschil tussen de hellingen in het punt (0, 1) van de twee stijgende grafieken in figuur 2.

In oktober 2013 was in het nieuws dat sommige regio in Nederland te maken met bevolkingskrimp: het aantal inwoners van die regio neemt af. Als dit op exponentiële wijze gebeurt kijkt men vaak naar de periode waarin de bevolkingsgrootte op het eind van de periode de helft is van die aan het begin van deze periode. Zo'n periode wordt de **halveringstijd** genoemd.



figuur 2

De blauwe grafiek komt steeds dichter bij de horizontale as, ofwel de waarde komt steeds dichter bij 0 als t steeds groter wordt. Je zegt dan dat 0 de **grenswaarde** is.

6. Bepaal de halveringstijd van de blauwe grafiek in figuur 2.

7. Gegeven zijn de volgende exponentiële formules:

I $N = 25 \cdot 1{,}2^t$

II $W = 280 \cdot 0{,}75^t$

III $K = 8 \cdot 1{,}02^t$

Onderzoek met je rekenmachine hoe groot bij deze formules de verdubbelingstijd of halveringstijd is.

Je hebt gezien dat grafieken van exponentiële verbanden stijgend kunnen zijn, maar ook dalend.
Dit hangt af van de groeifactor.

- Is de groeifactor groter dan 1, dan stijgt de grafiek. Als je namelijk een hoeveelheid vermenigvuldigt met een getal groter dan 1, krijg je een grotere hoeveelheid dan je eerst had. Dus stijgt de grafiek.
- Aan de andere kant zie je dan ook dat een groeifactor tussen 0 en 1 hoort bij een afname. Een hoeveelheid wordt kleiner als je met een getal tussen 0 en 1 vermenigvuldigt.
- Met negatieve groeifactoren rekenen we niet.

Professor Bartlett uit Boulder, Colorado, geeft colleges, waarvan een filmpje is te vinden op: http://www.youtube.com/watch?v=9znsuCphHUU.
Het filmpje zelf is interessant maar zijn stelling is interessanter:

"*De grootste tekortkoming van de mensheid is dat zij niet in staat is te begrijpen wat exponentiële groei inhoudt*."

In het filmpje legt professor Bartlett nog eens uit waar voortdurende groei toe zal leiden.

In wikipedia lezen we: De zonnebloem (*Helianthus annuus*) is een tot 3 m hoge, eenjarige plant uit de composietenfamilie (*Asteraceae*). Zonnebloemen van meer dan 3,5 meter hoog kunnen echter wel voorkomen bij bijvoorbeeld speciale wedstrijden bij tuinliefhebbers.
Zonnebloemplantjes worden uit een potje in de tuin gepoot als ze één decimeter hoog zijn.
Iemand meent dat bij de groei na het poten voor de hoogte h van een zonnebloem bij benadering de volgende formule geldt: $h = 3{,}7 - 3{,}6 \cdot 0{,}8^t$.
Hierin wordt h uitgedrukt in meters en t is het aantal weken na het verpoten van een plantje.

Hoewel in de formule een exponentiele vorm zit ($3{,}6 \cdot 0{,}8^t$), verloopt de toename van de hoogte niet volgens een exponentieel proces.
8a. Laat dit met berekeningen zien.
b. Plot en schets de grafiek van deze formule.
c. Je ziet aan de plot dat bij dit groeimodel afnemende stijging hoort. Leg aan de hand van de formule uit dat er sprake is van afnemende stijging.
d. Leg uit hoe uit de formule volgt dat bij het poten van een zonnebloem de hoogte van het zonnebloemplantje één dm is.

Omdat na ongeveer 15 weken een zonnebloem is uitgegroeid is de gegeven formule na die periode niet meer geldig.
e. Veronderstel dat een zonnebloem wel maar door zou groeien. Beredeneer met behulp van de formule hoe hoog een zonnebloem volgens dit model dan kan worden.
f. Bereken met je rekenmachine na hoeveel dagen de zonnebloem hoger is dan 3 meter.

De snelheid (in m/week) waarmee de zonnebloem op een bepaald moment groeit is gelijk aan de helling van de grafiek in het overeenkomstige punt. De snelheid waarmee een zonnebloem bijvoorbeeld groeit na precies twee weken is gelijk aan de helling van de grafiek van h in het punt met $t = 2$.
9a. Benader met je rekenmachine de groeisnelheid (in m/week) van de zonnebloem op het moment $t = 2$.
b. Hoe groot is de groeisnelheid van vraag a in cm/dag?
c. Na één week is de groeisnelheid ongeveer 0,8 m/week. Na hoeveel weken is de groeisnelheid nog maar 10% van wat deze groeisnelheid na één week is.

10. Gegeven is de formule $W = 24 - 3,2 \cdot 1,05^t$ met $0 \le t \le 40$.
a. Maak met je rekenmachine een tabel met stapgrootte 4 en teken zo nauwkeurig mogelijk de grafiek van W in een assenstelsel.
b. Leg aan de hand van de formule uit dat er sprake is van toenemende daling. Leg ook uit hoe je dit aan de formule kunt zien.
c. Bepaal de daalsnelheid van de grafiek in het punt met $t = 20$.

11. Gegeven is de formule $P = 13 + 44 \cdot 0,65^t$ met $0 \le t \le 20$.
a. Maak met je rekenmachine een tabel met stapgrootte 2 en teken zo nauwkeurig mogelijk de grafiek van W in een assenstelsel.
b. Leg aan de hand van de formule uit dat er sprake is van afnemende daling.
c. Bepaal de daalsnelheid van de grafiek in het punt met $t = 6$.

12. In de visserijbiologie heeft men op grond van onderzoek modellen opgesteld die het verband aangeven tussen leeftijd en gewicht van een aantal vissoorten. Zo geldt bij haringen bij benadering de formule $H = 800 - 1041 \cdot 0,7^t$ met H in grammen en t in jaren.
a. Bereken met hoeveel procent het gewicht is toegenomen tussen 1 en 5 jaar.
b. Onderzoek met berekeningen of de grafiek van H toenemend of afnemend stijgend is.
c. Beredeneer hoe zwaar haringen op grond van de formule kunnen worden.
d. Benader met een berekening de snelheid van de gewichtstoename op het moment dat de haring twee jaar wordt.

Een ander soort groeiproces dat verwantschap heeft met exponentiele groei zie je bijvoorbeeld bij de groei van eendenkroos in een vijver. In een periode van bijna vier weken met gelijkmatig weer heeft men vastgesteld welk percentage van het vijveroppervlak bedekt is met eendenkroos. De resultaten zie je in de tabel hieronder.

Tijd *t* in dagen	2	4	8	12	16	19	26
Percentage *P* begroeid met eendenkroos	5	8	21	45	72	85	97

13a. Verwerk de tabelgegevens in een grafiek in een assenstelsel met *t* langs de horizontale as en *P* langs de verticale as.
b. Voorspel op grond van de grafiek van vraag a na hoeveel dagen de vijver voor 90% bedekt zal zijn met eendenkroos.

Wiskundigen hebben van dit groeiproces een model gemaakt met behulp van de formule $P = \dfrac{100}{1+35\cdot 0,756^t}$, waarin *P* het percentage van het vijveroppervlak is dat begroeid is met eendenkroos en waarin *t* de tijd in dagen is met $0 \le t \le 28$.

14a. Onderzoek of de tabelwaarden goed aansluiten bij deze formule.
b. Hoeveel procent van het vijveroppervlak is begroeid met eendenkroos aan het begin van de periode van drie weken?
c. Bereken met behulp van de formule na hoeveel dagen de vijver voor de helft bedekt is met eendenkroos.
d. Beredeneer met behulp van de formule dat het percentage op den duur naar 100% gaat.
e. Plot de grafiek die bij de formule hoort voor de periode van drie weken.

De grafiek van vraag 13a lijkt de eerste twaalf dagen vrijwel exponentieel te verlopen.
f. Laat met berekeningen zien dat dit inderdaad het geval is. Geef de groeifactor per dag.

15. Vakanties

In het najaar van 2003 is een enquête gehouden onder 3000 Nederlanders waarin gevraagd werd op welke wijze zij hun vakantie hadden geboekt in de jaren 2002 en 2003.
Men onderscheidde daarbij drie mogelijkheden:
− boeken via reisbureau;
− boeken via internet;
− boeken op een andere manier.
In tabel 1 zijn enkele resultaten uit deze enquête weergegeven.

tabel 1
Vakantieboekingen

manier van boeken in 2002	aantal boekingen in 2002	overgangspercentages naar manier van boeken in 2003		
		reisbureau	internet	anders
reisbureau	1200	70%	24%	6%
internet	940	5%	90%	5%
anders	860	20%	30%	50%

Uit de tabel kun je bijvoorbeeld aflezen dat 24% van de mensen die in 2002 hun vakantie via een reisbureau hadden geboekt, dit in 2003 via internet deden. En ook dat 90% van de mensen die in 2002 via internet hadden geboekt, dit in 2003 weer deden.
Het aantal geënquêteerden dat via internet de vakantie had geboekt, was in 2003 groter dan in 2002.
a. Bereken met hoeveel procent dit aantal was toegenomen.

Niet alleen bij de 3000 geënquêteerden nam het aantal internetboekingen toe, ook landelijk was dit het geval. Uit het onderzoek ‘Consumer’s Choice of Channels’ van Deloitte bleek namelijk dat in 2004 in Nederland de helft van alle reizen via internet was geboekt. In 2003 was dit nog maar 35%. Mede op grond van deze uitkomsten heeft men een formule opgesteld, die het percentage internetboekingen goed benadert. Deze formule ziet er als volgt uit:

$$P(t) = \frac{222}{3 + 43 \cdot (0,43)^t} \ .$$

In deze formule is t in jaren, waarbij $t = 0$ overeenkomt met het jaar 2000. P is het percentage van alle vakanties dat in dat jaar is geboekt via internet.
b. Onderzoek hoeveel procent van de vakanties volgens de formule voor P op den duur via internet zal worden geboekt.

Uit het onderzoek werd de conclusie getrokken dat het percentage internetboekingen in de loop van de jaren steeds verder zal toenemen. De formule van P moet dus een stijgende grafiek opleveren.
c. Beredeneer met de formule van P dat de grafiek van P stijgend is.
d. Plot de grafiek van P voor $0 \le t \le 10$. Het lijkt alsof de grafiek de eerste jaren exponentieel stijgt. Onderzoek met berekeningen of dat inderdaad het geval is en zo ja geef de groeifactor in één decimaal nauwkeurig.
e. Benader met behulp van een berekening de groeisnelheid (%/jaar) op het moment $t = 4$.

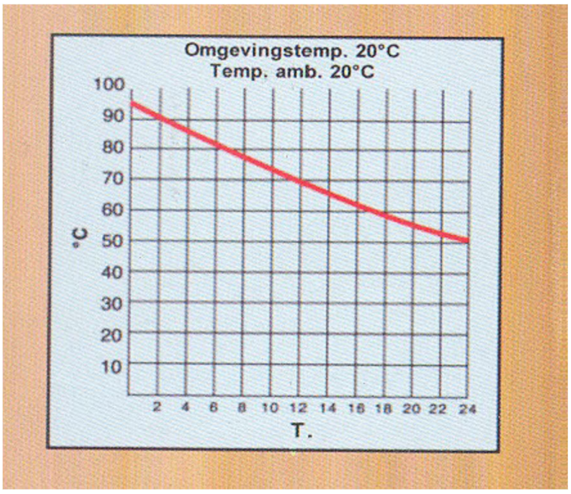
Herhalingsopgaven

16. Bij een bepaald groeiproces geldt de formule $G = 214 \cdot 2^{0{,}083t}$. Hierin is *G* een gewicht in grammen en *t* de tijd in dagen.
a. Ga na hoe groot bij dit proces de verdubbelingstijd is.
b. Laat met een berekening zien dat per dag het gewicht met ongeveer 6% toeneemt.

De snelheid waarmee het gewicht toeneemt is gelijk aan de helling van de grafiek van *G*.
c. Benader met een berekening deze groeisnelheid op het moment *t* = 10.

17. Isoleerkan

Een isoleerkan (ook wel thermosfles genoemd) wordt bijvoorbeeld gebruikt om koffie warm te houden.
Hiernaast zie je een afbeelding van twee isoleerkannen.
We gaan uit van net gezette koffie met een temperatuur van 95 °C.
Nadat deze warme koffie in de isoleerkan is geschonken, koelt de koffie langzaam af.
Op de verpakking van een isoleerkan staat een grafiek die het verloop van deze afkoeling weergeeft.
Zie de figuur hiernaast.
Horizontaal is de tijd uitgezet (in uren) en verticaal de temperatuur (in °C).
Er is daarbij uitgegaan van een inschenktemperatuur van 95° en een omgevingstemperatuur van 20 °C.
Op de uitwerkbijlage staat deze grafiek nauwkeuriger en groter weergegeven.



In de grafiek is te zien dat koffie met een inschenktemperatuur van 95 °C na 24 uur in de isoleerkan een temperatuur heeft van 50 °C.
a. Na hoeveel uur heeft koffie waarvan de inschenktemperatuur niet 95 °C is, maar 80 °C, een temperatuur van 50 °C? Licht je antwoord toe met behulp van de grafiek op de uitwerkbijlage.

We gaan in de rest van de opgave uit van een omgevingstemperatuur van 20 °C.
Op de lange duur zal de koffie in de isoleerkan dezelfde temperatuur aannemen als de omgeving waarin de isoleerkan staat. We kijken naar het **verschil** tussen de temperatuur van de koffie in de isoleerkan en de omgevingstemperatuur.
Uit de natuurkunde is bekend dat er een exponentieel verband bestaat tussen dit verschil en de tijd. Bij de hier gebruikte isoleerkan is per 24 uur de groeifactor van dit verschil 0,4.

b. Toon dit aan met behulp van de gegevens in de figuur.

c. Bereken de temperatuur van koffie met een inschenktemperatuur van 95 °C nadat deze 48 uur in de isoleerkan heeft gezeten.

Je kunt in de grafiek aflezen dat koffie met een inschenktemperatuur van 95 °C na 16 uur in de isoleerkan nog een temperatuur van ongeveer 60 °C heeft. Om deze temperatuur nauwkeuriger te weten te komen, is een berekening nodig.
d. Bereken de temperatuur van de koffie na 16 uur in de isoleerkan in tienden graden Celsius nauwkeurig.

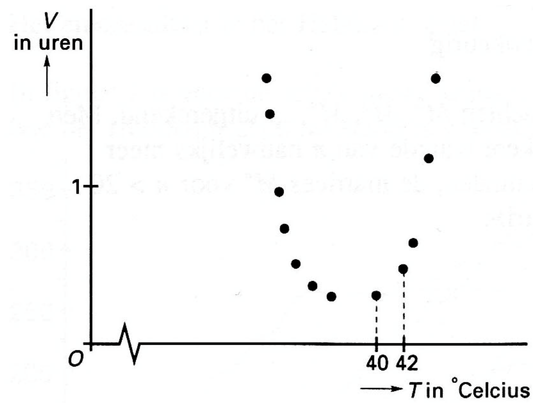
e. Bepaal de halveringstijd van het verschil tussen de temperatuur van de koffie in de isoleerkan en de omgevingstemperatuur. Licht je antwoord toe.

De isoleerkan kan ook worden gebruikt om bijvoorbeeld melk koel te houden. Nadat koude melk in de isoleerkan is geschonken, warmt deze langzaam op
Op de verpakking stond geen grafiek voor de opwarming van koude drank in de isoleerkan. Dat hoeft ook niet, want uit de natuurkunde is bekend dat het verloop in de tijd van afkoelen en opwarmen op dezelfde wijze gaat. Dit betekent::
− Het verschil tussen de temperatuur van de melk in een isoleerkan en de omgevingstemperatuur neemt exponentieel af. Bij de hier gebruikte isoleerkan is per 24 uur de groeifactor van dit verschil 0,4.
− Op de lange duur zal de melk in de isoleerkan dezelfde temperatuur aannemen als de omgeving waarin de isoleerkan staat.

Iemand schenkt melk met een inschenktemperatuur van 5 °C in de isoleerkan. Na 24 uur heeft de melk een temperatuur van 14 °C.
f. Teken op de uitwerkbijlage de grafiek van het temperatuurverloop

18. Colibacteriën

Bij het verteren van voedsel spelen colibacteriën een belangrijke rol in de darmen. In laboratoria wordt veel onderzoek gedaan naar de groei van populaties van deze bacteriën. Daarbij gebruikt men een kweekvloeistof waarmee men de omstandigheden zoals die in de darmen voorkomen, zoveel mogelijk nabootst. Bij een constante temperatuur blijken deze populaties exponentieel te groeien. Men meet de verdubbelingstijd V in uren bij verschillende temperaturen. Uit het onderzoek blijkt dat V afhangt van de ingestelde temperatuur T in graden Celsius. Zie de figuur hiernaast.



a. Leg met behulp van de figuur uit dat de groei van de populatie bij 40 °C sterker is dan de groei bij 42 °C.
Men blijkt het verband tussen T en V redelijk te kunnen benaderen met de formule $V = \dfrac{16{,}9}{-T^2 + 75T - 1350}$.
b. Laat met een berekening zien dat volgens de formule bij een temperatuur van 34 °C de verdubbelingstijd ongeveer 23 minuten is.
c. Bereken met je rekenmachine bij welke temperatuur de groei volgens de formule het sterkst is.

Soms raakt drinkwater besmet met colibacteriën. Omdat het drinken van dergelijk besmet water zeer gevaarlijk is, zal een drinkwaterbedrijf in zo'n geval het drinkwater gaan zuiveren. Als bij het begin van de zuivering er per liter water 1800 bacteriën zijn, geldt de formule $N = 1800 \cdot 0{,}86^t$, waarbij N het aantal colibacteriën per liter water is na t uren.

d. Bereken het aantal colibacteriën na 3 uren.

e. Bereken de halveringstijd van het aantal colibacteriën.

f. Benader de snelheid waarmee het aantal colibacteriën afneemt op het moment dat $t = 2$.

Paragraaf 9: Machtsverbanden en leesbare grafieken

Deze paragraaf is deels een herhaling van stof uit de module Ontwikkelen. Waar gaat deze paragraaf over?
Wat zijn machtsverbanden en hoe herken je machtsverbanden?
Hoe wordt in de praktijk gebruik gemaakt van machtsverbanden? Bijvoorbeeld bij wat is de relatie tussen hersengewicht en lichaamsgewicht van zoogdieren? Of: wat is de relatie tussen lengte van diersoorten en het aantal diersoorten met die lengte?
Hoe kun je gegevens(data) transformeren(omzetten) zodat je duidelijke(leesbare) grafieken krijgt van machtsverbanden?

Waarom heeft een olifant zulke grote oren?Waarom heeft een baby in bed een kruikje nodig?


Foto 1


Foto2 - Afrikaanse olifant

In de column in de Volkskrant van zaterdag 12 juni 2010 (zie ook www.wiskundemeisjes.nl) vraagt een van de wiskundemeisjes Ionica Smeets, die zwanger is, zich af:
(verkorte versie van haar column)

Waarom heeft een baby een kruikje nodig? Het is toch lekker warm onder een dekentje, ook zonder een fles met warm water?Een dag later schoot het juiste antwoord me te binnen: baby's koelen natuurlijk veel sneller af dan volwassenen, omdat ze in verhouding een veel groter huidoppervlak hebben dan wij. Dat komt doordat bij groei het volume sterker toeneemt dan het oppervlak.
Denk even aan een kubus (met excuses aan mijn toekomstige baby, die hopelijk meer op zijn vader lijkt dan op een kubus). Vergelijk een kleine kubus met zijden van één centimeter met een iets grotere kubus met zijden van tien centimeter. De kleine kubus heeft zes zijvlakken met elk een oppervlakte van één vierkante centimeter, in totaal dus een oppervlakte van zes vierkante centimeter. Vanzelfsprekend is de inhoud één kubieke centimeter. De grote kubus heeft een totale oppervlakte van zeshonderd vierkante centimeter en een inhoud van duizend kubieke centimeter!

Heeft een kubus ribben met lengte x dan geldt:
- de totale oppervlakte O van een kubus kun je berekenen met de formule $O = 6x^2$.
- de inhoud I van een kubus kun je berekenen met de formule $I = x^3$

We gaan een kubus nader onderzoeken naar oppervlakte en volume.

1. We kijken naar haar uitspraak: *Bij groei neemt inhoud sterker toe dan het oppervlak.*
We bepalen daarvoor de totale oppervlakte en de inhoud van een kubus bij verschillende ribbelengtes. Zie tabel 1.

Tabel 1

x	1	2	3	6	10
Totale oppervlakte O	6				
Inhoud I	1				

a. Neem de tabel over en vul de tabel verder in.
b. Je neemt een kubus A waarvan elke ribbe lengte x heeft. En je neemt een kubus B waarvan de ribbelengte twee keer zo groot is.
Hoeveel keer zo groot is de totale oppervlakte van kubus B als die van kubus A?
c. Beantwoord vraag b ook voor het volume.
d. Laat met tabel 1 zien dat de inhoud sneller groeit dan de totale oppervlakte. Geef hier ook een verklaring voor.

De formules $O = 6x^2$ en $I = x^3$ zijn voorbeelden van ***formules bij machtsverbanden***.

De algemene vorm van een ***formule bij een machtsverband*** is: $y = c \cdot x^p$ waarbij c een constante is. Ook de exponent p is een constante.

2. Geef voor de formules $I = x^3$ en $O = 6x^2$ de waarden van c en p.

We gaan proberen om een formule te vinden voor het verband tussen de totale oppervlakte O van een kubus en de inhoud I van de kubus.
Dit lukt via de lengte x van een ribbe. Eerst ga je x uitdrukken in I.

3. Voor de inhoud van een kubus geldt $I = x^3$. Van een aantal kubussen zijn de inhouden gegeven in tabel 2. Neem de tabel over en vul de tabel verder in.

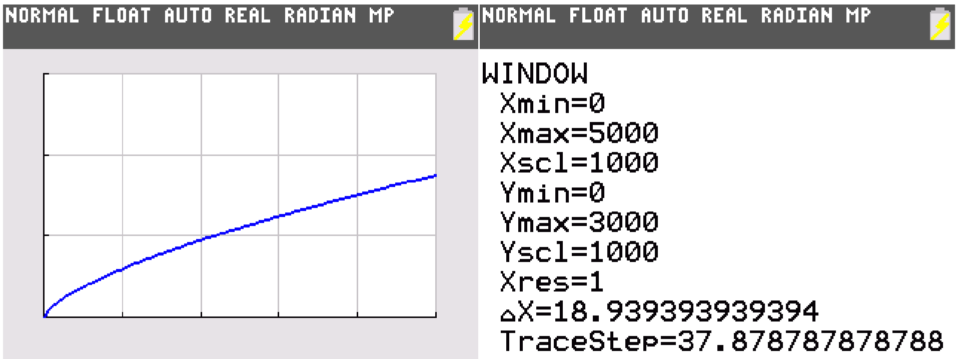
Tabel 2

Inhoud I	1000	64	729	...	I
Lengte ribbe x	...	...	...	$\sqrt[3]{100}$	$\sqrt[3]{....}$

Voor het getal $\sqrt[3]{100}$ schrijven we ook wel $100^{\frac{1}{3}}$. Het is dus een macht van 100, 100 is het grondtal en $\frac{1}{3}$ is de exponent.

4a. Schrijf nu $\sqrt[3]{I}$ als een macht.
b. Schrijf x als een macht van I.

5. Terug naar de formule $O = 6x^2$ van de totale oppervlakte van een kubus met ribbelengte x.
Je weet nu dat $x = I^{\frac{1}{3}}$ (vraag 4b). In de formule $O = 6x^2$ komt de factor x^2 voor.
Maar x^2 kun je ook uitdrukken in I.
a. Vul de volgende regel verder aan: $x^2 = x \cdot x = I^{\frac{1}{3}} \cdot I^{\frac{1}{3}} = I^{\cdots}$
b. Stel nu de formule op van het verband tussen de totale oppervlakte O van de kubus en de inhoud I van de kubus waarbij je O uitdrukt in I.



Figuur 1

6. In figuur 1 is de plot van de machtsformule van vraag 5b te zien.
Vergelijk de gemiddelde verandering op de intervallen [0, 1] en [4999, 5000] met elkaar om na te gaan of de grafiek afnemend stijgend of toenemend stijgend is.

7. Stel de inhoud van een kubus wordt 1000 keer zo klein. Ga met behulp van de formule na hoeveel keer zo klein de oppervlakte van de kubus wordt.

Je bekijkt nu hoe de totale oppervlakte en de inhoud van een kubus zich tot elkaar verhouden.
De formules zijn: $O = 6x^2$ en $I = x^3$.
De verhouding van oppervlakte tot de inhoud noemen we *f*.
Dit kun je weergeven met $O : I$ ofwel als $\frac{O}{I}$.
Dit kun je herleiden tot de formule $f = \frac{O}{I} = \frac{6}{x}$.

8. Leid deze verhoudingsformule af uit de twee formules $O = 6x^2$ en $I = x^3$.

9. Door de verhoudingsformule $f = \frac{6}{x}$ anders te schrijven kun je laten zien dat het een formule is van een machtsverband.
a. Laat dat zien.
b. Laat ook zien dat $f = \frac{6}{x}$ een voorbeeld is van een omgekeerd evenredig verband.

Het gewicht van een mens is evenredig met zijn volume (inhoud). We vergelijken de huidoppervlakte van een volwassene van 80 kilogram met een baby van 5 kilogram.

10. Leg uit dat de baby naar verhouding een veel groter huidoppervlak heeft.

11. We komen nu terug op de vraag in het begin van deze paragraaf: "*Waarom heeft een baby in bed een kruikje nodig?*" Beantwoord deze vraag en leg je antwoord uit.

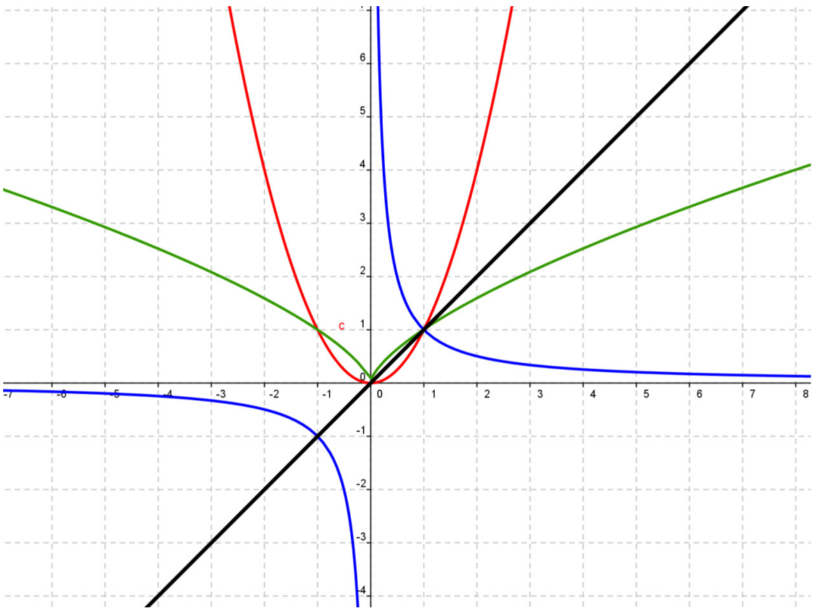
Je hebt nu een aantal voorbeelden bekeken van formules bij machtsverbanden. Je hebt daarbij gezien dat de oppervlakte van een kubus is uit te drukken in de inhoud: $O = 6 \cdot I^{\frac{2}{3}}$.
De algemene vorm van een machtsformule is $y = c \cdot x^p$.
Bij deze oppervlakteformule geldt dus $c = 6$ en $p = \frac{2}{3}$.

Veel verschijnselen zijn met machtsverbanden te beschrijven. Inzicht in dergelijke formules helpt bij begrijpen van en redeneren over die verschijnselen.

Je onderzoekt nu eerst formules van machtsverbanden $y = c \cdot x^p$ waarbij de constante c gelijk is aan 1.
De grafieken hiervan (c = 1) gaan altijd door het punt (1, 1).

12. Leg dat met een berekening uit.

In figuur 2 zijn vier van dergelijke grafieken van machtsfuncties afgebeeld.



figuur 2

13. Gegeven zijn de volgende formules:
- $y = x^{-1}$
- $y = x$
- $y = x^{\frac{1}{2}}$
- $y = x^{\frac{2}{3}}$
- $y = x^2$

Welke van deze formules is hierboven niet in een grafiek getekend?

Gegeven zijn de formules $y = x^2$ en $y = 2^x$.
14a. Plot de bijbehorende grafieken in één figuur en noem een paar verschillen tussen de verbanden bij deze formules.
b. Leg uit waarom de formule $y = 2^x$ geen machtsverband genoemd wordt. Hoe heet het verband dat hier wel bij hoort?

In de volgende opdracht onderzoek je formules van machtsverbanden waarvan de exponent een positief geheel getal is. Je gaat de situaties waarbij de exponent even of oneven is met elkaar vergelijken. In tabel 3 op de volgende bladzijde worden een aantal van die formules genoemd en een aantal mogelijke eigenschappen bekeken.

Tabel 3

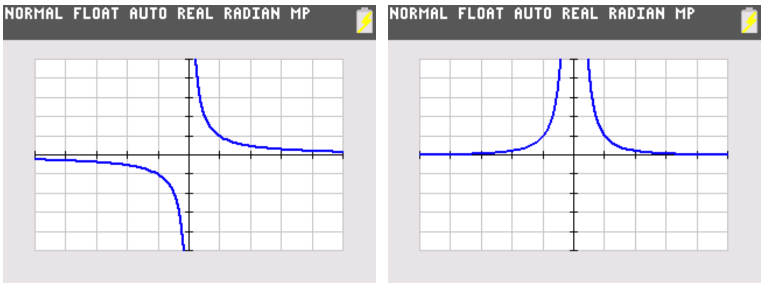
$y =$	grafiek gaat door (0, 0)?	door (–1, –1)?	door (1, 1)?	door (–1, 1)?
x^2	ja	nee	ja	ja
x^3				
x^4				
x^5				
x^6				

15a. Onderzoek, eventueel met behulp van het plotten van deze formules, of de formules in de tabel deze mogelijke eigenschappen hebben. Neem de tabel over en vul deze verder in.
b. Ga na dat de volgende bewering waar is.

Als de exponent p in de formule $y = x^p$ *even is, geldt altijd dat*
- *de grafiek door (–1, 1), (0, 0) en (1, 1) gaat*
- *de grafiek toenemend stijgend is voor x > 0 en afnemend dalend voor x < 0.*

c. Probeer zelf een dergelijke bewering te formuleren die waar is voor oneven exponenten.

Je kunt ook kijken naar machtsformules waarbij de exponent een negatief geheel getal is. In figuur 3 staat links een plot van $y = x^{-1}$ en rechts een plot van $y = x^{-2}$.



figuur 3

De formules hierboven zijn machtsformules met exponenten –1 en –2, maar je kijkt ook nog naar machtsformules waarvan de exponent telkens één minder wordt. Zie tabel 4. Zoals je in opgave 14 zag, gaan de grafieken van deze formules niet door de oorsprong.

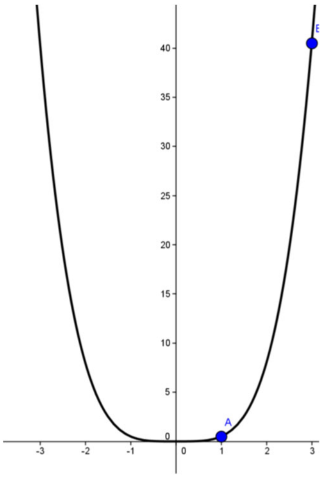
tabel 4

$y =$	grafiek gaat door (–1, 1)	door (–1, –1)	door (1, 1)	afnemend dalend voor $x > 0$
x^{-1}				
x^{-2}				
x^{-3}				
x^{-4}				
x^{-5}				

16a. Neem de tabel over en vul deze verder in. Maak zo nodig gebruik van een plot.
b. Formuleer een paar ware beweringen voor machtsformules met negatieve even exponenten.
c. Formuleer eveneens een paar ware beweringen voor machtsformules met negatieve oneven exponenten.
d. Ga na welke van deze machtsformules toenemend dalend zijn en op welk interval.

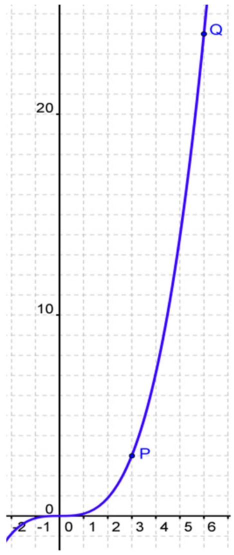
Je bekijkt nu machtsverbanden waarbij de constante c niet perse gelijk aan 1 hoeft te zijn. Zie de grafieken in figuur 4 en figuur 5.

Figuur 4



In figuur 4 zie je de grafiek van een machtsverband. Op de grafiek liggen de roosterpunten $A(1; 0{,}5)$ en $E(3\ ;\ 40{,}5)$.

Figuur 5



In figuur 5 zie je de grafiek van een machtsverband. Op de grafiek liggen de roosterpunten $P(3,3)$ en $Q(6,24)$.

17a. Voor het machtsverband $y = c \cdot x^p$ in figuur 4 gelden de volgende twee vergelijkingen: $0{,}5 = c \cdot 1^p$ en $40{,}5 = c \cdot 3^p$. Laat zien hoe die twee vergelijkingen zijn opgesteld.
b. Met behulp van de eerste vergelijking kun je de waarde van c berekenen. Hoe groot is c?
c. Vul de gevonden waarde van c in de tweede vergelijking in en bereken de waarde van p.
d. Geef nu de formule die bij de grafiek van figuur 4 hoort.

18a. Voor het machtsverband $y = c \cdot x^p$ in figuur 5 gelden de volgende twee vergelijkingen: $3 = c \cdot 3^p$ *en* $24 = c \cdot 6^p$. Laat zien hoe die twee betrekkingen zijn opgesteld.

b. Deze twee vergelijkingen kun je anders schrijven, namelijk als $c = \dfrac{3}{3^p}$ en $c = \dfrac{24}{6^p}$. Leg uit waarom dat kan.

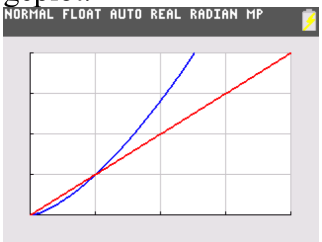
c. Uit de twee vergelijkingen $c = \dfrac{3}{3^p}$ en $c = \dfrac{24}{6^p}$ volgt $\dfrac{3}{3^p} = \dfrac{24}{6^p}$. Leg dit uit.

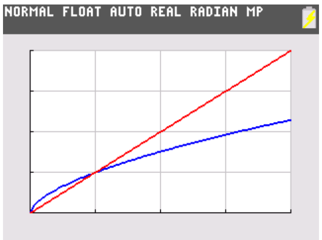
d. Bepaal met $\dfrac{3}{3^p} = \dfrac{24}{6^p}$ en met behulp van je rekenmachine de waarden van c en p en stel de formule van het machtsverband op.

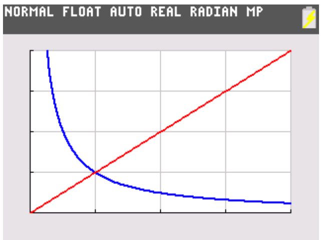
19. Stel een formule op van het machtsverband waarvan de grafiek gaat door (1, 6) en (2, 96).

20. Stel een formule op van het machtsverband waarvan de grafiek gaat door de punten met coördinaten (2, 40) en (4, 60).

Machtsformules zijn van de vorm $y = c \cdot x^p$.
In toepassingen zijn de waarden van x en c meestal groter dan 0.
Voor $c = 1$ en $p > 0$ gaan de grafieken door de punten (0,0) en (1,1).
Hieronder zijn voor drie verschillende waarden van p de grafieken samen met die van $y = x$ geplot.







$p > 1$ $\quad$ $0 < p < 1$ $\quad$ $p < 0$

Je gaat hieronder een paar toepassingen bekijken. Met kennis over machtsverbanden kun je bepaalde verschijnselen, die zich bijvoorbeeld in de natuur afspelen, beter begrijpen.

21. Diersoorten
Uit onderzoek is gebleken dat er een verband bestaat tussen de lengte van diersoorten en het aantal diersoorten met die lengte. Met de lengte van een diersoort wordt bedoeld de gemiddelde lengte van volwassen dieren van die soort. Het blijkt dat er weinig lange diersoorten zijn en veel korte diersoorten. Uit gegevens die de Amerikaanse onderzoeker Andrew P. Dobson verzamelde, blijkt dat bij benadering de volgende formule geldt:

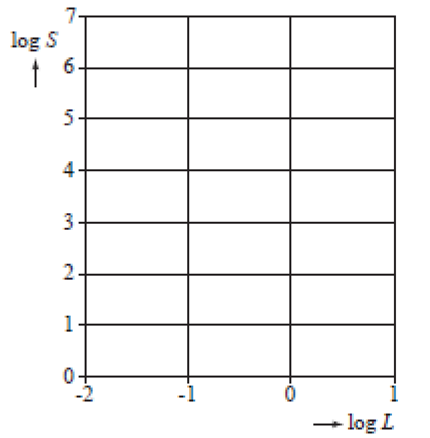
$$S = \frac{700}{L^2}$$

Hierin is L de lengte in meter en S het aantal diersoorten met die lengte. Deze formule geldt voor $0{,}01 \leq L \leq 10$.
a. Leg uit waarom deze formule een machtsformule is.
b. Het aantal diersoorten van 10 cm lang is veel groter dan het aantal diersoorten van 50 cm lang. Bereken met behulp van de bovenstaande formule hoeveel keer zo groot.

22. Voor diersoorten met een lengte tussen 10 en 50 cm blijkt er ook een verband te bestaan tussen het gemiddelde gewicht van de volwassen dieren van een diersoort en het aantal diersoorten met dit gemiddelde gewicht.
Bij benadering geldt: $D = \dfrac{8500}{G^{\frac{2}{3}}}$.
Hierin is G het gemiddelde gewicht in kilogram en D is het aantal diersoorten met dit gemiddelde gewicht.
Volwassen huiscavia's zijn gemiddeld 28 cm lang en hebben een gemiddeld gewicht van 1,1 kg. Iemand beweert dat er uit de gegeven formules volgt dat er 7000 diersoorten *zouden kunnen zijn* met dezelfde gemiddelde lengte en met hetzelfde gemiddelde gewicht als de huiscavia.
Heeft deze persoon gelijk? Licht je antwoord met berekeningen toe.

De grafiek van $S = \dfrac{700}{L^2}$ is op het scherm van een grafische rekenmachine lastig in beeld te brengen vanwege de enorme verschillen in S-waarden.
Het is wél mogelijk om de grafiek van $\log(S)$ als functie van $\log(L)$ goed in beeld te krijgen. (Voor het werken met logaritme zie het boekje (ont)wikkelen.)

Als een assenstelsel wordt gebruikt waarin $\log(S)$ verticaal is uitgezet en $\log(L)$ horizontaal , wordt de grafiek een **rechte lijn**. In figuur 6 is een dergelijk assenstelsel getekend. Deze figuur staat vergroot op de bijlage.



Figuur 6

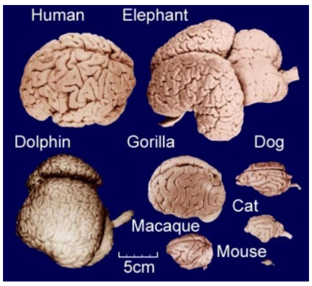
Met behulp van de bovenstaande formule kun je de volgende tabel verder invullen.

L	S	$\log(L)$	$\log(S)$
0,01			
0,1			
1	700	0	2,85
10			

23a. Ga na dat de al ingevulde waarden voor S, $\log(L)$ en $\log(S)$ kloppen.
b. Vul de tabel verder in.
c. Teken in de figuur op de bijlage de grafiek van $\log(S)$ als functie van $\log(L)$.

Is het gewicht van de hersenen een maat voor de intelligentie?

24. In tabel 5 is voor een aantal zoogdieren zowel het hersengewicht als het lichaamsgewicht weergegeven. Uiteraard gaat het om gemiddelden.



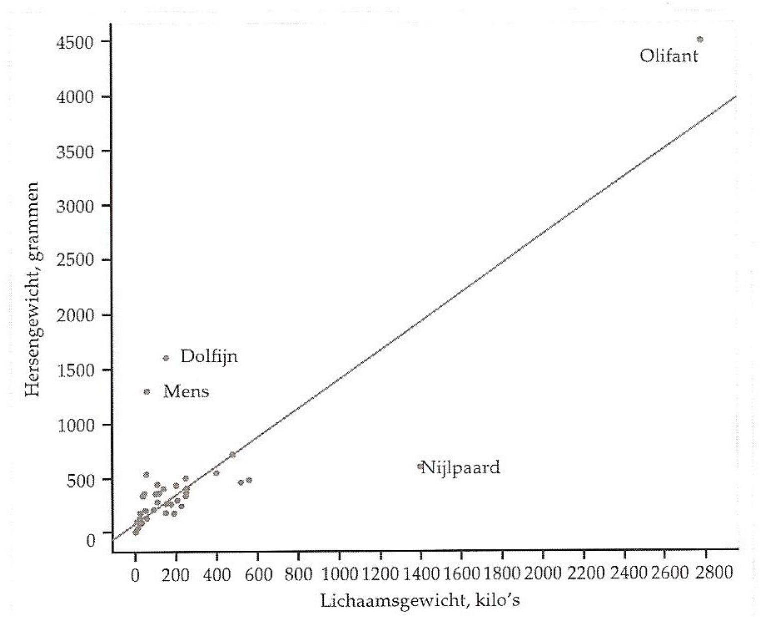
Tabel 5

Zoogdier	muis	dolfijn	mens	olifant	walvis
Hersengewicht in gram	0,4	840	**1500**	7500	7800
Lichaamsgewicht in kilogram	0,012	110	**70**	5000	37000

Als het hersengewicht een maat is voor intelligentie, dan is in tabel 5 af te lezen dat de walvis en de olifant ongeveer vijf keer zo intelligent zijn dan de mens.
a. Bereken volgens deze methode hoeveel keer de mens zo intelligent is als de muis.
b. Een veel gebruikte methode is om intelligentie uit te drukken als percentage hersengewicht ten opzichte van het lichaamsgewicht.
Laat met een berekening zien dat het intelligentie getal van de olifant ongeveer gelijk is aan 0,15.
c. Als je deze methode hanteert, welk zoogdier uit tabel 5 zou dan het meest intelligent zijn?

Noch het absolute gewicht noch de verhouding tussen hersengewicht en lichaamsgewicht zijn dus acceptabele criteria voor de bepaling van intelligentie. De relatie tussen hersengrootte en intelligentie is er niet, en dat komt waarschijnlijk doordat hersengrootte van zoveel andere factoren afhankelijk is: geslacht, lichaamsgrootte, leeftijd, voeding, omgeving, bezigheden en doodsoorzaak. De meeste onderzoekers zijn van mening dat het gewicht van de hersenen wel gezien moet worden in relatie tot het lichaamsgewicht. Maar welke relatie is er dan?
In figuur 7 is een puntenwolk te zien van het hersengewicht uitgezet tegen het lichaamsgewicht van een groot aantal soorten zoogdieren. Er is ook een trendlijn getekend.

25. Er zijn vier uitschieters. Punten die wat verder van de trendlijn liggen.
a. Noem die vier uitschieters.
b. Geef bij het nijlpaard aan hoeveel het hersengewicht 'achterblijft' bij wat je op grond van de trendlijn zou mogen verwachten.



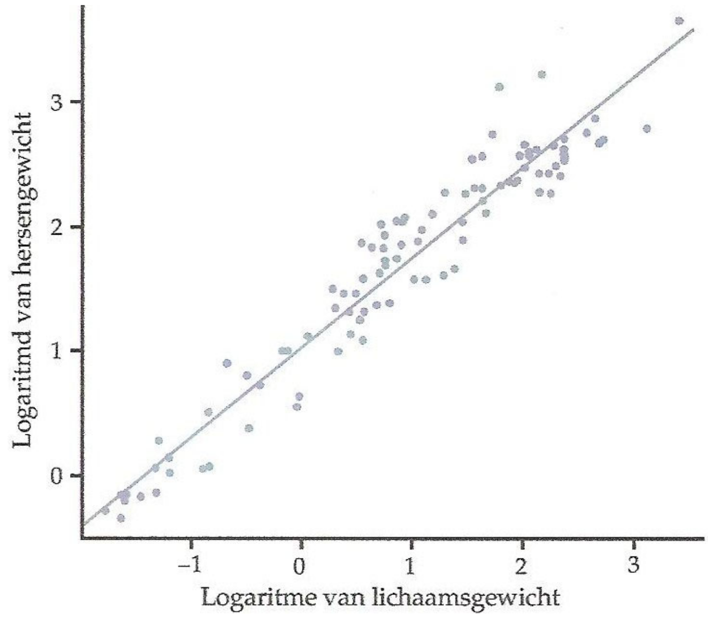
figuur 7

We laten de vier uitschieters even buiten beschouwing. Je zou kunnen zeggen dat er dan er sprake is van een 'buiging naar rechts' van de puntenwolk naarmate het lichaamsgewicht toeneemt. Biologen weten dat als je de gewichten slim omzet je dan betere analyses kunt maken. Zoiets heet ook wel transformeren van gegevens.

Intermezzo:
Het transformeren van gegevens kennen we bijvoorbeeld bij het meten van temperaturen. We kunnen kiezen tussen graden Fahrenheit of graden Celsius.
Het aantal graden Celsius kunnen we omzetten (transformeren) in Fahrenheit volgens de lineaire formule: $F = 1,8 \cdot C + 32$

Dat omzetten van de gegevens gebeurt door de logaritme te nemen van zowel de hersengewichten en de lichaamsgewichten. Zie figuur 8 op de volgende bladzijde.

Het effect is bijna wonderbaarlijk. Er is geen sprake meer van extreme uitschieters of afbuigingen naar rechts. Het patroon is vrijwel lineair.
De Zwitserse onderzoeker R.D. Martin, die zelfs gebruik maakte van de gegevens van 477 zoogdiersoorten vond door gebruik te maken van de trendlijn een machtsformule.
Tegenwoordig is de meest gangbare formule $H = 12 \cdot G^{\frac{2}{3}}$.
Hierin is H het hersengewicht in gram en G het lichaamsgewicht in kilogram.
Deze formule heet de formule van Martin.



figuur 8

Als de getransformeerde gegevens worden gepresenteerd in een nieuw assenstelsel zoals in figuur 8, zegt men in de wiskunde wel dat er een **herschaling** heeft plaats gevonden.

26. In tabel 5 staat dat een mens van 70 kilo een hersengewicht heeft van 1500 gram.
a. Controleer dat dit niet overeenkomt met de formule van Martin.
Op grond hiervan kun je dus concluderen dat het punt, dat hoort bij de mens, niet op de trendlijn ligt.
b. Ligt het er boven of er onder? Leg uit.
c. Bereken hoeveel gram hersengewicht een mens meer heeft dan je op grond van de trendlijn zou kunnen verwachten.

27a. Bereken met behulp van de formule van Martin het hersengewicht van een dolfijn van 110 kg.
b. Bereken met behulp van de formule van Martin zonder je rekenmachine het lichaamsgewicht van een zoogdier dat een hersengewicht heeft van 35 gram.
c. De formule van Martin is te herleiden tot de formule van de vorm $G = p \cdot H^q$.
Laat dat met algebra zien en geef aan hoe groot de getallen p en q zijn.

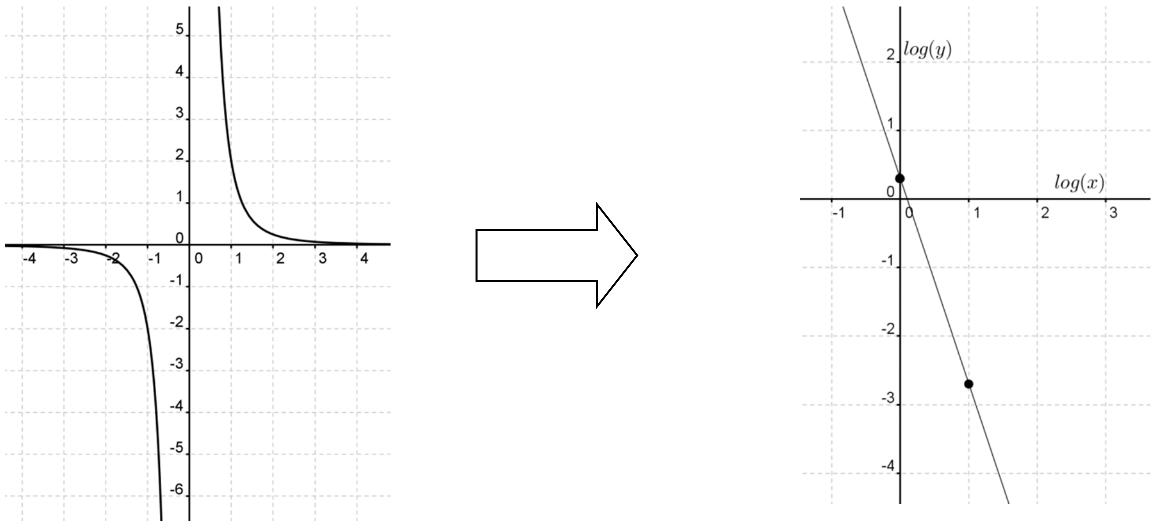
Voorbeeld
Grafieken van machtsfuncties zijn soms lastig in beeld te brengen. Door een tabel te maken en de gegevens om te zetten in logaritme krijg je een rechte lijn als grafiek.
Voorbeeld: $y = 2 \cdot x^{-3}$ We kiezen twee waarden voor *x*. Zie onderstaande tabellen:

x	1	10
y	2	0,002

$\Rightarrow$

$\log(x)$	0	1
$\log(y)$	0,3	–2,7

Hieronder zie je hoe de oorspronkelijke grafiek van $y = 2 \cdot x^{-3}$ wordt herschaald naar een assenstelsel met $\log(x)$ langs de horizontale as en $\log(y)$ langs de verticale as. De grafiek is in dit nieuwe assenstelsel een rechte lijn.



Beide assen zijn *logaritmisch*. Grafiekpapier met twee logaritmische schalen heet *dubbellogaritmisch papier en is bij je docent te krijgen.*

28. Gegeven zijn de volgende formules: $y = x^2$, $y = x^3$ en $y = 30x^{-3}$.
In deze opdracht ga je de drie bijbehorende grafieken herschalen via logaritmes zoals in het voorbeeld. Langs de horizontale as zet je $\log(x)$ uit en langs de verticale as zet je $\log(y)$ uit.
a. Maak bij $y = x^2$ een tabel met voor *x* de waarden 1, 10 en 20.
b. Zet de tabel van vraag a om in een tabel met $\log(x)$ en $\log(y)$.
c. Teken de grafiek van $y = x^2$ in een assenstelsel met $\log(x)$ langs de horizontale as en $\log(y)$ langs de verticale as.
d. Doe de opgaven a, b en c ook voor de twee andere formules. Krijg je steeds een rechte lijn?

29. Gegeven zijn de formules $y = x^2$ en $y = 2^x$.
a. Ga met een berekening na dat de grafieken elkaar snijden in $x = 2$ en $x = 4$.
b. Plot de grafieken van beide formules. De grafieken zijn voor $x > 0$ beide stijgend. Maar de manier van stijgen is niet het zelfde. Gebruik deze grafieken voor de volgende opdrachten.
c. Geef een interval waarop de grafiek van $y = x^2$ sneller stijgt dan die van $y = 2^x$.
d. Geef twee intervallen waarop de grafiek van $y = x^2$ minder snel stijgt dan die van $y = 2^x$.
e. Bereken het verschil in helling tussen de beide grafieken in het punt met $x = 2$.

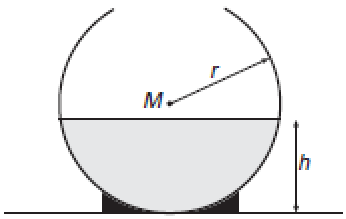
Herhalingsopgaven

30. Goudvissen

Bij goudvissen doet zich een bijzonder verschijnsel voor. Een goudvis in een kleine vissenkom blijft kleiner dan een goudvis die in een grote vissenkom leeft.
De grootste lengte *L* die een goudvis in een kom kan bereiken, hangt af van de hoeveelheid water in de kom. Het verband wordt beschreven met de formule: $L = 2,6 \cdot V^{0,47}$.
Hierin is *L* de grootste lengte van de goudvis (in centimeter) en *V* de hoeveelheid water in de vissenkom (in liter).

Een goudvis kan in een kom met 8 liter water een bepaalde lengte bereiken. Deze goudvis kan een grotere lengte bereiken als hij zou leven in een kom van 13 liter.
a. Bereken hoeveel procent langer hij dan kan worden. Rond je antwoord af op een geheel getal.
b. Maak op je rekenmachine een tabel met stapgrootte 1 bij deze formule voor $0 \leq V \leq 10$.
c. Teken zo nauwkeurig mogelijk met behulp van de tabel van vraag **b** de grafiek bij de gegeven formule.
d. Benader grafisch de helling van de grafiek in het punt met $V = 2$.
e. Beschrijf de betekenis van het antwoord op vraag **d**.

Veel goudvissen zwemmen hun rondjes in een bolvormige vissenkom. De hoeveelheid water *V* in een bolvormige vissenkom hangt af van de straal *r* van de bol en van de waterhoogte *h*. Zie de figuur hiernaast.
M is het middelpunt van de bol.
De tabel hieronder geeft voor een aantal waarden van *r* en een hoogte *h* = 15 cm de hoeveelheid water *V* in een bolvormige vissenkom.



r	10	15	20	25	30
V	3,53	7,07	10,60	14,14	17,67

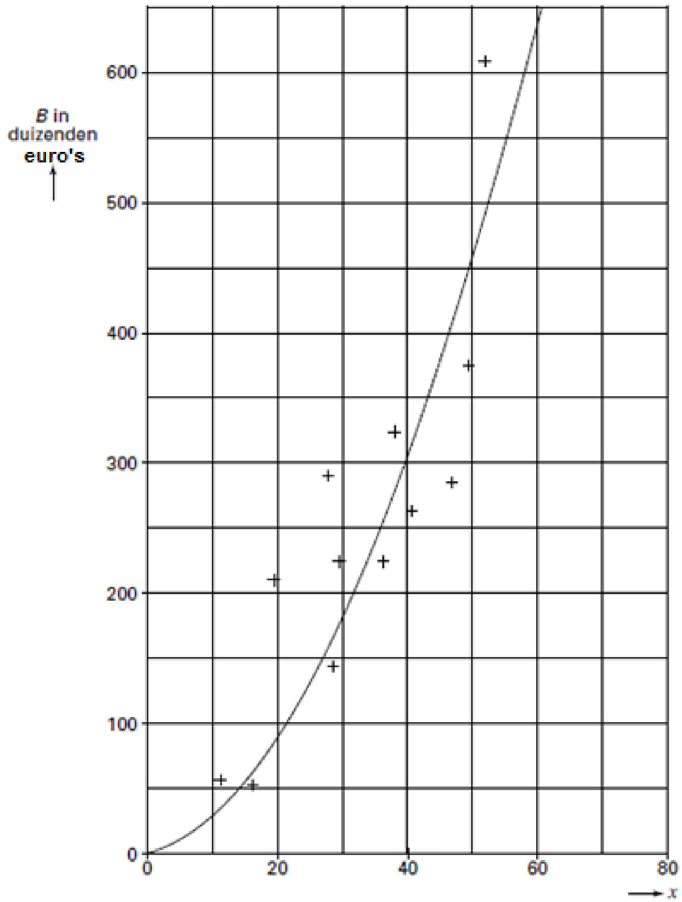
Er is bij deze getallen sprake van een lineair verband tussen *V* en *r*.
Dat verband kunnen we schrijven als $V = a \cdot r + b$
f. Bereken *a* en *b*. Rond je antwoorden af op twee decimalen.

31.

Een gemeente wil uitbreiden door het bouwen van een nieuwe wijk. De plaats waar de nieuwe wijk gebouwd zal worden, is vastgesteld. Voordat de gemeente het uitbreidingsplan laat uitvoeren, doet de gemeente onderzoek naar de kosten van het plan. Er zijn twee soorten kosten voor de gemeente:

• de kosten van aankoop van de grond.
In deze situatie bedragen de kosten 170 000 euro per hectare (1 hectare = 10 000 m^2).

• de kosten van het bouwrijp maken.
Dit betreft kosten voor de aanleg van bijvoorbeeld wegen, rioleringen en groenvoorzieningen. Deze kosten zijn hoger naarmate het aantal woningen dat per hectare gebouwd zal worden groter is.



In de figuur hiernaast zijn kosten van diverse vergelijkbare projecten door middel van plusjes weergegeven. Hierbij is x het aantal woningen per hectare. B stelt de kosten per hectare voor van het bouwrijp maken in duizenden euro's. Op grond van de plusjes in de figuur is een kromme getekend die het verband tussen B en x weergeeft.

De formule die bij dit verband tussen B en x hoort, is van de vorm $B = c \cdot x^{1,8}$.

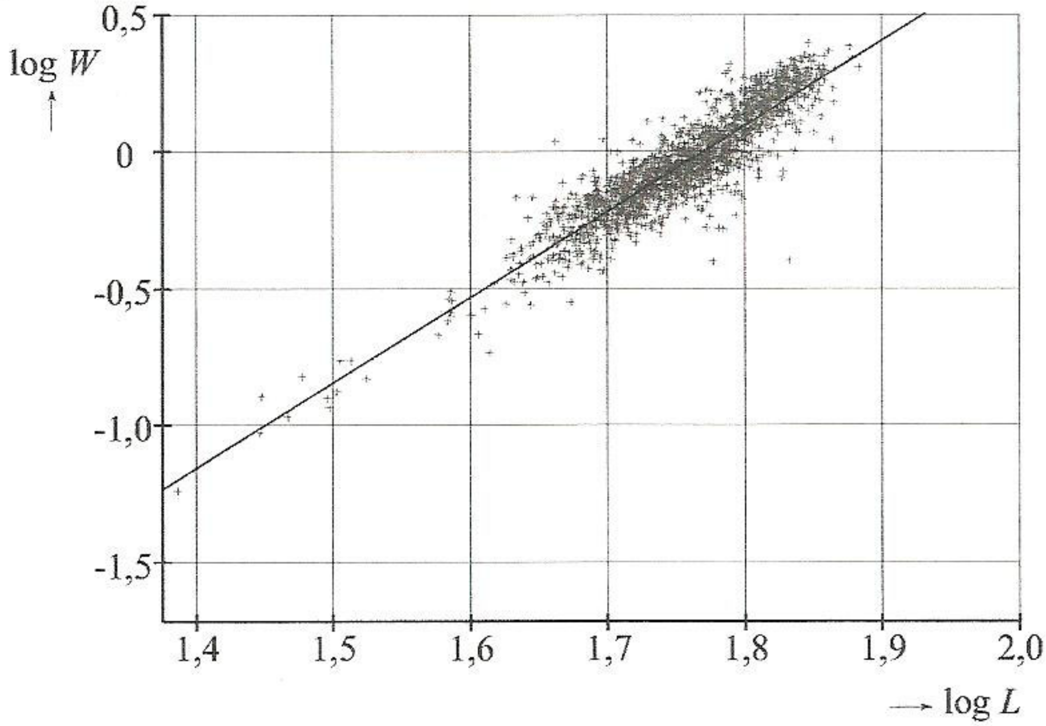
a. Gebruik het punt (40, 300) van de grafiek in de figuur hierboven om aan te tonen dat c ongeveer gelijk is aan 0,4.
b. Bij het grootste aantal woningen wijken de werkelijke kosten nogal af van de volgens de formule berekende kosten. Bereken hoeveel procent de werkelijke kosten afwijken van de berekende kosten op grond van de formule.
c Er is bij een ander aantal woningen een nog grotere procentuele afwijking van de kosten volgens de formule. Bij welk aantal is dat het geval en leg je antwoord uit zonder berekeningen te maken.
d. Benader op twee manieren de helling van de grafiek in het punt met $x = 20$. Wat is de betekenis van dit getal?
e. Vul de tabel op de volgende bladzijde in en teken de grafiek van de geven formule in een assenstelsel met log(x) langs de horizontale as en log(B) langs de verticale as.

x	B	$\log(x)$	$\log(B)$
1			
20			
40			
60			
80			

32. Mosselen

Een mossel bestaat voor een deel uit schelp en voor een deel uit vlees. Er bestaat een verband tussen de schelplengte L (in mm) en het gewicht van het vlees W (in grammen) van mosselen. Elk jaar wordt een onderzoek gedaan naar het verband tussen de schelplengte en het gewicht van het vlees van de gewone mossel in de Waddenzee. Hiervoor worden van een groot aantal van deze mosselen de schelplengte en het gewicht van het vlees gemeten. De resultaten voor het jaar 2005 zijn in figuur 9 weergegeven. In de figuur is ook een lijn te zien die een benadering geeft van het verband tussen log W en log L.

figuur 9



Deze lijn kan gebruikt worden om het gewicht van het vlees van een gewone mossel te schatten als je de schelplengte van die mossel hebt gemeten.

a. Bepaal met behulp van figuur 9 het gewicht van het vlees van gewone mosselen met een schelplengte van 65 mm. Geef je antwoord in grammen op één decimaal nauwkeurig.

Het verband tussen W en L wordt bij benadering gegeven door de formule $W = \frac{1}{316628} \cdot L^{3,1}$.

b. Bereken met behulp van deze formule het gewicht van het vlees van een mossel met een schelplengte van 50 cm.

c. Bereken met vanaf welke lengte het gewicht van het vlees van een mossel meer is dan 1 gram.

Paragraaf 10: Rijen

Waar gaat deze paragraaf over?
Wat wordt er bedoeld met getallenrijen? Wat was er al heel lang geleden bekend over rijen en wat waren enkele vermoedens van grote wiskundigen? Hoe ga je met vermoedens om? Hoe maak je zelf een rij van getallen? Wat is een directe formule?

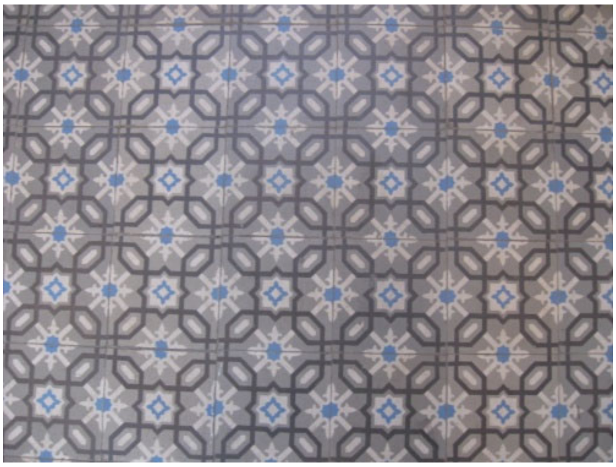


Foto 1

Foto 2
bron:Annelies Rademakers, beeldend kunstenares

Rijen of patronen van voorwerpen ben je waarschijnlijk al vaak tegen gekomen. In foto 1 zie je een stuk van een tegelvloer. Deze vloer bestaat uit rijen tegels. Alle tegels hebben dezelfde afdruk. In foto 2 zie je vier figuurtjes die gemaakt zijn uit eenzelfde ijzeren plaat. Het kleinste figuurtje is ontstaan uit het tweede figuurtje. Het tweede figuurtje is gehaald uit het derde figuurtje, enzovoort. Je kunt deze rij van vier figuurtjes op deze manier in theorie eindeloos voortzetten.

Er bestaan veel patronen. Denk maar bijvoorbeeld aan de kunst, muziek en ontwerpen van kleding.
In het vervolg kijken we vooral naar rijen van getallen.

Hans Magnus Enzensberger (Kaufbeuren, 11 november 1929) is een Duits schrijver, dichter, vertaler en redacteur. Hij schreef, gemotiveerd door zijn kleinzoon, het boek "De telduivel". Een hoofdkussenboek voor iedereen die bang voor wiskunde is. Voor veel mensen is wiskunde een warboel van getallen en onbegrijpelijke berekeningen. Zo ook voor de hoofdpersoon Robert uit het boek. Robert moet niks van wiskunde hebben. Tot hij bezoek krijgt van de telduivel en twaalf nachten lang met getallen aan het goochelen is.

Citaat:

***De negende nacht**. Wat Robert toen droomde was heel zonderling. Naast hem op bed zat de telduivel. De telduivel laat heel veel getallen in Robbert' s slaapkamer binnenkomen. De getallen lijken wel wielrenners, want ze dragen hun nummers op verschillend gekleurde truitjes en maken een hoop kabaal.*
De telduivel roept: Opgelet! Eerste rij aantreden. Vervolgens: tweede rij. Zo gaat hij nog even door. Robert sperde zijn ogen, die al dicht wilden vallen, open en zag zeven verschillende soorten getallen in witte, rode, groene, blauwe, gele, zwarte en roze truitjes ordelijk achter elkaar opgesteld in zijn eindeloos uitgerekte kamer staan (Zie figuur 1).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	
1	2	6	24	120	720	5040	40320		362880		3628800		39916800	

figuur 1

Er ontstaat een discussie tussen Robert en de telduivel:

De eerste rij zijn de natuurlijke getallen. Eerst het oneven getal 1 dan het even getal 2. Vervolgens het oneven getal 3 en dan het even getal vier. Enz.
Raad eens hoeveel oneven getallen er zijn? Dat is toch duidelijk zegt Robert. Er zijn dubbel zoveel natuurlijke getallen als oneven getallen.
De telduivel keert zich naar de getallen en brult: eerste en tweede rij: handdruk!

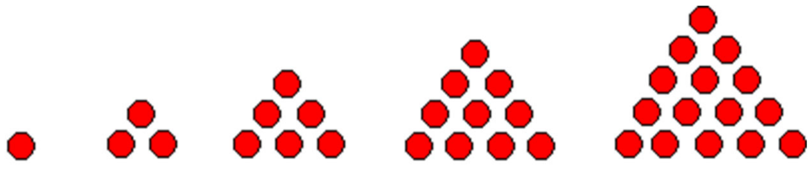
1. Leg uit dat de bovenste twee rijen even lang zijn. Kijk bijvoorbeeld naar een mogelijk verband tussen de tweede en eerste rij.

De getallen van de derde rij van figuur 2 worden in het boek de prima getallen genoemd. Het zijn de priemgetallen. Getallen die precies twee verschillende delers hebben. Het getal 1 en zichzelf.
Bij de eerste rij, behalve het eerste getal, geldt dat elk getal in de rij verkregen is door de waarde van zijn voorganger te vermeerderen met 1.
Zoiets geldt ook voor de tweede rij. Nu moet je elk getal met twee vermeerderen om het volgende getal te verkrijgen.
De getallen in de vierde rij komen bijvoorbeeld voor in het boek van Dan Brown "De Da Vinci Code".

2a. Beschrijf de regelmatigheden in de vier laatste rijen van figuur 2.
b. Met welke formule kun je de zesde en zevende rij ook opschrijven?

Eén eigenschap hebben de getallenrijen gemeen. Ze bestaan elk uit oneindig veel getallen. Elke rij heeft andere eigenschappen.

Terug naar de telduivel en notaties bij rijen
In de vijfde rij, zie figuur 1, zien we 1, 3, 6, 10, 15, 21,.... Deze getallen worden *driehoeksgetallen* genoemd. Je hebt hier al eens mee kennis gemaakt.


1 3 6 10 15

Eigenlijk staat hierboven **1 - (1+2) - (1+2+3) - (1+2+3+4) -....**

4. Bereken de waarde van het tiende driehoeksgetal.

Het berekenen van het 20^e of, nog erger, het 100^e driehoeksgetal zou heel wat rekenwerk vergen. Wiskundigen hebben, zoals wel vaker, een handige manier ontdekt.
Men ontdekte dat er een kwadratisch verband bestaat tussen de plaats van een getal in de rij van driehoeksgetallen, en de waarde van het bijbehorende driehoeksgetal. De plaats van een getal in de rij heet het ***rangnummer*** van dat getal. Dus bijvoorbeeld het 9^e getal in de rij heeft rangnummer 9.

Tabel 1

Rangnummer n	1	2	3	4	5
driehoeksgetal	1	3	6	10	15

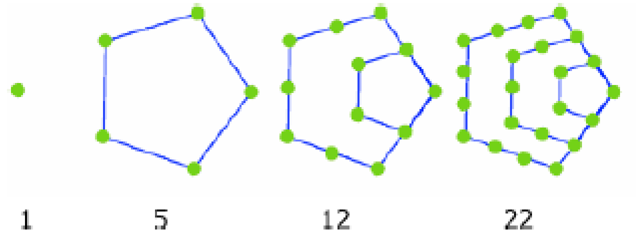
5. Het n^e driehoeksgetal is gelijk aan $0,5\cdot(n^2+n)$. Controleer deze formule voor de getallen in de tabel hierboven.

Het kwadratisch verband van de driehoeksgetallen noteren we op de volgende manier:
$u(n)=0,5\cdot(n^2+n)$ dus $u(1)=1,\ u(2)=3,\ u(3)=6,\ u(4)=10$ enzovoort.
Getallen in een rij worden ook ***termen*** genoemd: $u(2)$ is de tweede ***term*** van de rij, $u(n)$ is de n-de term van de rij.
In de wiskunde gebruik je ook de notatie met subscripts: $u_1,u_2,u_3,u_4,....$ enz. De tiende term wordt dan weergegeven door $u_{10}=55$.
De formule $u(n)=0,5\cdot(n^2+n)$ of $u_n=0,5\cdot(n^2+n)$ wordt een ***directe formule*** of rangnummerformule genoemd.

6a. Hoe komt men, denk je, aan de naam "*directe formule*"?
b. Bereken het honderdste driehoeksgetal.

7. Je kunt het idee van het maken van driehoeksgetallen (via driehoeken van stippen) uitbreiden naar vierhoeksgetallen en vijfhoeksgetallen.

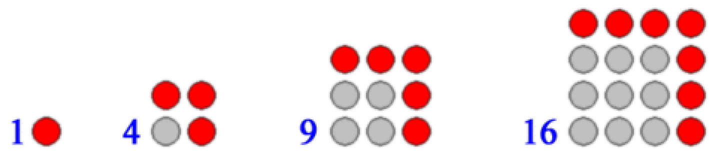
In de figuur hieronder zie de eerste vier vijfhoeksgetallen weergegeven.



a. Teken het vijfde vijfhoeksgetal en bereken de waarde ervan.

Bij deze rij vijfhoeksgetallen kun je ook een directe formule maken: $u(n) = 0,5 \cdot (3n^2 - n)$.
b. Controleer met behulp van de formule de waarde van de eerste vier vijfhoeksgetallen.
c. Controleer met de formule ook je antwoord van opdracht 7a.
d. Voer de formule in je rekenmachine in en gebruik de tabelfunctie van je rekenmachine om de rij van vijfhoeksgetallen op het scherm te krijgen.
e. Hoe groot is het 20^{e} vijfhoeksgetal?
f. Vanaf welk rangnummer is het vijfhoeksgetal meer dan 10 000?

In de figuur hieronder zie de eerste vier vierhoeksgetallen weergegeven. Het aantal stippen geeft de waarde van het vierhoeksgetal.



8a. Teken het vijfde vierhoeksgetal en bereken de waarde ervan.
b. Stel een directe formule op voor deze rij van vierhoeksgetallen.
c. Kijk naar de opeenvolgende verschillen van de vierhoeksgetallen. Stel hiervoor een directe formule op.

9. Zoek de regelmaat van de volgende rijen en bereken de 10^{e} term:
a. 7, 14, 21, 28, 35,........
b. 1, 2, 6, 24, 120, 720, ...
c. 1, –1, 1, –1, 1, –1, 1, –1, 1,.........
d. 800, 793, 786, 779, 772, ...

10a. Probeer een directe formule te maken bij de rij van opdracht 9a.
b. Probeer een directe formule te maken bij de rij van opdracht 9d.

In een volgende paragraaf komen we terug op het vinden van een directe formule bij een gegeven rij getallen.

Paragraaf 11: Recursieve formules

Waar gaat deze paragraaf over?
Hoe kun je bij sommige rijen een term vinden uit de voorgaande term(en)?
Wat zijn recursieve formules? Hoe kun je ze opstellen en gebruiken?

Groeten

Een club van acht leden komt bijeen. Ze geven elkaar allemaal een hand en spreken dan een groet uit.
Hoeveel handen worden geschud?

Uit: Pythagoras (tijdschrift voor jongeren), april 2008

1. Probeer bovenstaande vraag te beantwoorden.

Een club van een onbekend aantal leden komt bijeen.
Je kijkt weer naar de vraag: *hoeveel keer worden handen geschud?*

Bij aanwezigheid van *twee* leden is het antwoord op de vraag: één keer.
Er komt een *derde* lid binnen en deze schudt de handen van de twee al aanwezige leden. Dit geeft een totaal van drie (1+2).
Een *vierde* lid komt binnen en schudt de handen van de eerste drie leden. Dit geeft een totaal aantal keer handen schudden van 3 plus 3, dus 6.
Een *vijfde* lid komt binnen, er zijn al 6 handen geschud. Het totaal bij vier leden wordt nu dus uitgebreid met 4 omdat het vijfde lid met de vier al aanwezige leden handen schudt. Bij vijf leden worden dus 10 keer handen geschud.
Zo ontstaat de volgende rij van getallen: 1, 3, 6, 10.
Bij aanwezigheid van 2 leden wordt eenmaal de handen geschud. We noteren dan: $u(2) = 1$.

Bij aanwezigheid van 3 leden noteren we: $u(3) = 3$.
Zo verdergaand ontstaat een rij met startwaarde $u(2)$: $u(2) = 1$, $u(3) = 3$, $u(4) = 6$, $u(5) = 10$
Bij een *zesde* lid krijgen we het totaal bij vijf leden $u(5)$ dat vermeerderd wordt met 5.
We noteren dan: $u(6) = u(5) + 5 = 15$.

Met de formule $\begin{cases} u(1) = 0 \\ u(n) = u(n-1) + n - 1 \end{cases}$ kun je de getallen van de rij getallen hierboven berekenen.

2a. Leg uit waarom $u(1) = 0$.
b. Leg uit hoe $u(n) = u(n-1) + n - 1$ klopt met het verhaal van de handenschudders.
c. Bereken met de formule hoeveel handen er worden geschud bij 9 leden.

Bij sommige rijen kun je een term vinden door te rekenen met de voorgaande term(en). Dit heet ***recursie***. De bijbehorende formule heet een ***recursieve formule***. Je kunt de rij alleen maken als je naast de recursieve formule de waarde van één van de termen weet uit de rij. De eerste term van een rij wordt de ***startwaarde*** genoemd. Bij een recursieve formule wordt bijna altijd deze startwaarde vermeld.
Je kunt ook twee startwaarden hebben of zelfs meer. We bekijken ook daar voorbeelden van.

In figuur 1 zie je hoe uit een A4-tje vier figuurtjes geknipt zijn met de vorm van de letter V waarbij de afmetingen steeds gehalveerd worden. De grootste letter V heeft een omtrek van 73,5 cm. De tweede letter V heeft dan een omtrek van 36,75 cm. De derde letter V heeft dus een omtrek die precies de helft is van de tweede letter V. Deze rij van omtrekken van letters V die zo ontstaat is een voorbeeld van recursie.
Noem je $P(n)$ is de omtrek van de n^e letter V dan is dus $P(1) = 73{,}5$ en $P(2) = 36{,}75$


Figuur 1

3a. Hoe bereken je de omtrek van een letter V uit genoemde rij als je de omtrek weet van de voorgaande letter?
b. Neem over en vul in: de recursieve formule is $\begin{cases} P(1) = ... \\ P(n) = ... \end{cases}$

4. Je kunt ook naar de rij van de oppervlaktes van de letters V kijken. De grootste letter V heeft een oppervlakte van ongeveer 47,74 cm^2.
$A(n)$ is de oppervlakte van de n^e letter V.
a. Hoe bereken je de oppervlakte van een letter V uit genoemde rij als je de oppervlakte weet van de voorgaande letter?
b. Schrijf de recursieve formule op die hoort bij deze rij van oppervlakte getallen.

5a. Bereken de eerste zes termen van de rij die gegeven is door de recursieve formule
$$\begin{cases} u(1) = 8 \\ u(n) = 2 \cdot u(n-1) - 10 \end{cases}$$

b. Doe opdracht 5a ook voor de rijen gegeven door $\begin{cases} v(1) = 3 \\ v(n) = (v(n-1))^2 - 2 \end{cases}$ en

$$\begin{cases} w(1) = 4 \\ w(n) = \dfrac{20}{w(n-1)} - 1 \end{cases}$$

6. Er zijn twee rijen getallen gegeven $a(n) = 3n - 2$ en $\begin{cases} b(0) = 1 \\ b(n) = b(n-1) + 3 \end{cases}$.

a. Bereken van beide rijen de eerste vier getallen. Wat valt je op?
b. Kun je met de formule $b(n) = b(n-1) + 3$ direct uitrekenen wat de waarde is van $b(100)$?

7. Voor een rij getallen geldt $a(n+1) = 5 + 3 \cdot a(n)$ waarbij $a(49) = 101$. Bereken $a(50)$ en $a(48)$.

Terug naar de handenschudders.
We hadden al een recursieve formule, die we formule (1) noemen, voor het aantal geschudde handen: $\begin{cases} u(1) = 0 \\ u(n) = u(n-1) + n - 1 \end{cases}$ waarbij

- $u(n)$ is het aantal geschudde handen als lid n is binnengekomen en handen heeft geschud,
- $u(n-1)$ is het aantal geschudde handen tot en met het vorige lid $n-1$.

Deze recursieve formule kun je ook als volgt opstellen: $\begin{cases} u(1) = 0 \\ u(n+1) = u(n) + n \end{cases}$ waarbij

- $u(n+1)$ is het aantal geschudde handen als lid $n+1$ is binnengekomen.

We noemen deze formule voor het gemak formule (2).

8. Laat zien hoe je deze formule (2) kunt afleiden uit formule (1).

Dergelijke recursieve formules kun je invoeren in je rekenmachine.
Vraag je docent om uit te leggen hoe dat op jouw rekenmachine gaat. Dit is op elke rekenmachine weer anders.

9. Bereken met behulp van je rekenmachine het aantal geschudde handen als het zesde lid is binnengekomen en daarna voor als het honderdste lid is binnengekomen.

10a. Gegeven is een rij getallen door $\begin{cases} u(1) = 0 \\ u(n) = 5 \cdot u(n-1) + 7 \end{cases}$. Voer de formule in je rekenmachine in en gebruik de tabelfunctie van je rekenmachine om $u(15)$ te berekenen.

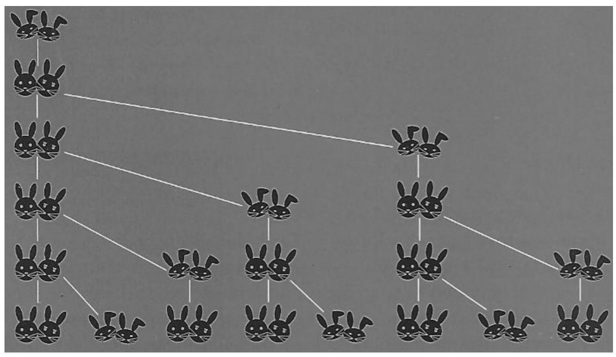
b. Doe opdracht 10a ook voor de rijen $\begin{cases} v(1) = 6 \\ v(n) = \frac{1}{2} \cdot (v(n-1) - 3) - 6 \end{cases}$ en $\begin{cases} w(1) = 200 \\ w(n) = \dfrac{10}{n} \cdot w(n-1) \end{cases}$

In sommige situaties is dus een directe formule handiger dan een recursieve formule. Maar het is niet altijd mogelijk om bij een rij getallen een directe formule te maken. Soms is het zelfs onmogelijk om een passende formule bij een rij te maken. Zo is het wiskundigen nog nooit gelukt om bijvoorbeeld bij de rij van priemgetallen een passende formule te maken.
Je weet waarschijnlijk wel dat priemgetallen getallen zijn met precies twee delers: het getal 1 en zichzelf, dus de rij priemgetallen begint als volgt:
1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 enzovoort.
De beroemde wiskundige Leonard Euler dacht dat hij een directe formule had gevonden:
$P(n) = n^2 + n + 41$.

11a. Bereken de eerste zes termen van deze rij en laat zien dat het priemgetallen zijn.
b. Zoek op internet om uit te vinden hoe je de formule van Euler onderuit kunt halen.

Fibonaccigetallen
De Fibonacci-rij is al heel lang bekend. De rij is voor het eerst beschreven in het rekenboek Liber Abaci uit 1202, van de hand van Leonardo Pisano, die beter bekend staat onder zijn bijnaam Fibonacci.

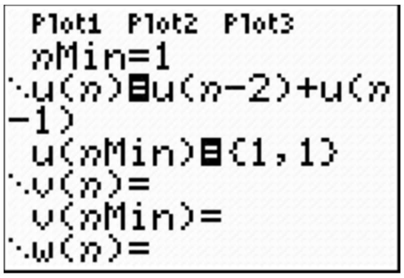
In het boek komt de volgende opgave voor (vrij vertaald):
Een man plaatst één paar konijnen in een afgesloten ruimte . Vanaf de tweede maand zijn konijnen vruchtbaar. Elk vruchtbaar paar krijgt elke maand een nieuw paar konijnen. Hoeveel konijnenparen zullen er na één jaar in het hok zitten?
In figuur 2 zie je van boven naar beneden het aantal konijnenparen voor de eerste zes maanden.


Figuur 2

12a. Ga na dat als je zo doorrekent in theorie de volgende rij van aantallen paren konijnen krijgt: 1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21 – 34 enzovoort krijgt.
b. Zie je de regelmaat in deze rij? Bereken de volgende drie getallen van deze rij.

Een directe formule maken bij deze rij is erg lastig, een recursieve formule maken is niet moeilijk.

In figuur 3 hiernaast zie je hoe de recursieve formule van de Fibonacci-rij is ingevoerd in een grafische rekenmachine. Let op er zijn **twee** startgetallen: 1 en 1.



figuur 3

13. Voer deze formule in je rekenmachine in en schrijf met behulp van de tabelfunctie de vijf getallen na het getal 34 in de juiste volgorde op.

14. Hieronder staat een deel van de Fibonacci-rij waarbij het beginstuk is weggelaten:

……………… 1597, 2584, 4181, 6765, ………………

Schrijf de volgende termen op: de term voorafgaand aan 1597 en de twee eerste termen die volgen op 6765.

15. Terug naar het boek "de Telduivel" dat we in paragraaf 10 al tegenkwamen. Zie figuur 4.
In de zesde rij staan de machten van twee.

a. Stel de recursieve formule hiervan op. Denk aan de startwaarde!

b. Stel ook de directe formule op van deze rij.

c. Bekijk de zevende rij. Welke regelmaat heeft deze rij?

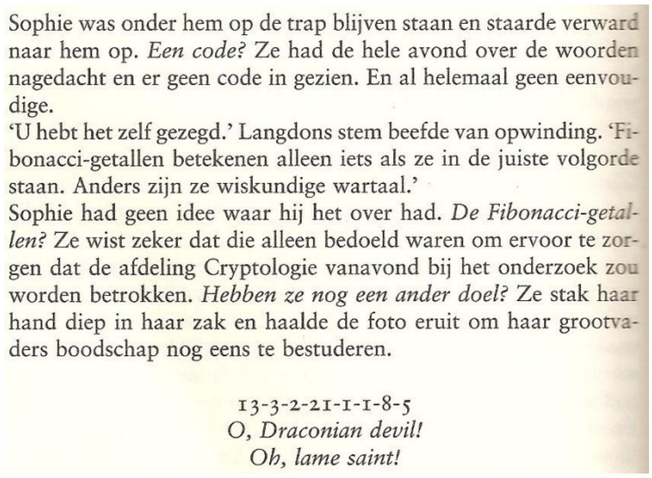
d. Bereken het volgende getal van deze zevende rij.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	
1	2	6	24	120	720	5040	40320		362880		3628800		39916800	

figuur 4- Uit de telduivel

Hier volgt een passage uit het ondertussen wereldberoemde boek **De Da Vinci Code** van Dan Brown uit 2004.

Wat is er met de getallen? De door elkaar gehusselde Fibonacci-rij is een hint, zei professor Langdon, terwijl hij de foto van agente Sophie Neveu aanpakte.



Sophie was onder hem op de trap blijven staan en staarde verward naar hem op. *Een code?* Ze had de hele avond over de woorden nagedacht en er geen code in gezien. En al helemaal geen eenvoudige.

'U hebt het zelf gezegd.' Langdons stem beefde van opwinding. 'Fibonacci-getallen betekenen alleen iets als ze in de juiste volgorde staan. Anders zijn ze wiskundige wartaal.'

Sophie had geen idee waar hij het over had. *De Fibonacci-getallen?* Ze wist zeker dat die alleen bedoeld waren om ervoor te zorgen dat de afdeling Cryptologie vanavond bij het onderzoek zou worden betrokken. *Hebben ze nog een ander doel?* Ze stak haar hand diep in haar zak en haalde de foto eruit om haar grootvaders boodschap nog eens te bestuderen.

13-3-2-21-1-1-8-5
O, Draconian devil!
Oh, lame saint!

16. In de tabel hieronder staan gegevens vermeld van vijf rijen.

Directe formule	Eerste vijf termen in rijnotatie	recursieve formule
$t(n) = 1 - 7(n-1)$ voor $n \geq 1$		$\begin{cases} t(1) = 1 \\ t(n+1) = ... \end{cases}$
$u(n) = 3 \cdot 4^n$	$u(1) = 12,\ u(2) = 48, ...$	
		$\begin{cases} u(n) = \frac{1}{2} \cdot u(n-1) \\ u(1) = 10 \end{cases}$
		$\begin{cases} v(n+1) = 6 - \dfrac{4}{v(n)} \\ v(1) = 2 \end{cases}$
	$a_1 = 3,\ a_2 = 9,\ a_3 = 27, a_4 = 81, ...$	

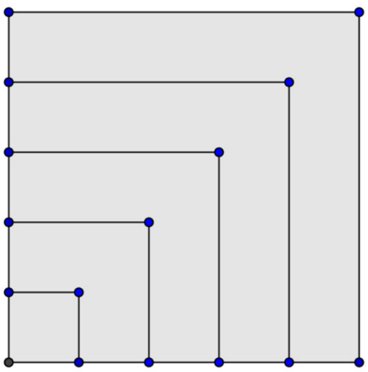
Neem tabel 1 over en vul de lege hokjes in.

Paragraaf 12: Rijen bij lineaire verbanden

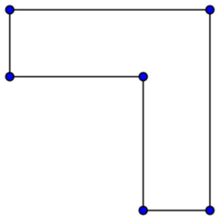
Waar gaat deze paragraaf over?
Er zijn allerlei soorten rijen. In deze paragraaf ga je rijen bij een lineair verband nader bekijken. Wat zijn de eigenschappen van deze rijen, welke formules horen erbij en hoe stel je deze op?

In figuur 1 is een vierkant van vijf bij vijf getekend dat verdeeld is in vier haken en een vierkant van 1 bij 1. Het vierkantje beschouwen we ook als een haak en wel als haak 1.
In figuur 2 is de haak 3 getekend. Je kunt zo nagaan dat in figuur 1, naast het vierkantje (haak 1 genoemd) nog vier haken zijn getekend.
We definiëren nu de rij getallen als oppervlakte van de opeenvolgende haken. Zo ontstaat de een rij getallen 1, 3, 5, 7, 9… .

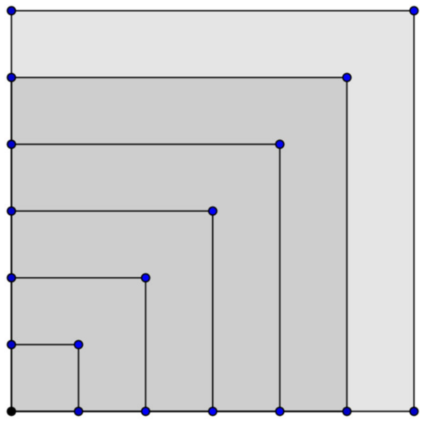
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3



1a. Beschrijf de regelmaat van deze rij.
b. Bekijk figuur 3 en laat met een berekening zien dat de oppervlakte van de grootste haak in deze figuur gelijk is aan 11.
c. Een nog groter vierkant heeft afmetingen van 20 bij 20. Hoeveel haken heeft deze figuur?
d. Bereken de oppervlakte van de dertiende haak en de oppervlakte van de grootste haak.
e. De oppervlakte van de grootste haak kun je als volgt berekenen:
vermenigvuldig de lengte van een zijde van het bijbehorende vierkant met 2 en trek van de uitkomst het getal 1 van af.
Leg uit dat dit klopt en controleer dat voor de haken in figuur 3.
f. Bereken de oppervlakte van de n^e haak.
g. Van een vierkant is de oppervlakte gelijk aan 196. Je kunt het vierkant verdelen in haken met een breedte van 1. Uit hoeveel haken bestaat het vierkant en wat is de oppervlakte van de grootste haak?

De rij 1, 3, 5, 7, 9, ... is een voorbeeld van een ***rij bij een lineair verband.***
De rij 1, 2, 3, 4, 5, ... en de rij 2000, 2100, 2200, 2300, 2400, ... zijn ook voorbeelden van dergelijke rijen.
Laten we de laatstgenoemde rij aangeven met $t(n)$ waarbij $t(1) = 2000$.
De term $t(2) = 2100$ kunnen we opvatten als $2000 + 1 \cdot 100$ en de term $t(3) = 2200$ als $2000 + 2 \cdot 100$. De negende term is 2800. We schrijven: $t(9) = 2800 = 2000 + 8 \cdot 100$.

2. Geef nu de directe formule van deze rij $t(n)$ en verklaar hiermee de naam "*rij bij lineair verband*".

3. Geef ook een recursieve formule bij deze rij.

4. Stel ook directe en recursieve formules op voor de rij 1, 2, 3, 4, 5, … en voor de rij 1, 3, 5, 7, 9, ...

De hoofdeigenschap van een ***rij bij een lineair verband*** $u(n)$ is dat iedere volgende term ontstaat uit de voorafgaande term door er een vast getal a bij op te tellen. In de drie gegeven voorbeelden op de vorige bladzijde: 1, 3, 5, 7, 9, ... 1, 2, 3, 4, 5, ... 2000, 2100, 2200, 2300, 2400, ... zijn de vaste getallen (constanten) achtereenvolgens 2, 1 en 100. De bijbehorende recursieve formule is: $u(n) = u(n-1) + a$ waarbij a het vaste getal is. De bijbehorende directe formule is: $u(n) = a \cdot (n-1) + b$ waarbij a het vaste getal is en de eerste term $u(1) = b$. Een andere naam die in de wiskunde gebruikt wordt voor dit soort rijen is *rekenkundige rij*.

5. Stel bij de volgende rijen een directe en een recursieve formule op en bereken met behulp van beide formules $u(10)$.

a. 7, 15, 23, 31, 39, 47, …

b. –13, –9, –5, –1, ...

c. 23, 17, 11, 5, –1, … .

6. Bereken met behulp van de formules van de rijen hieronder de eerste vijf termen.

a. $u(n) = \frac{1}{2}(n-1) + 2$

b. $v(n) = -3(n-1) + 16$

c. $t(n) = \dfrac{n}{7} + 1$

d. $\begin{cases} u(1) = -8 \\ u(n) = u(n-1) + 1{,}5 \end{cases}$

e. $\begin{cases} v(1) = 12 \\ v(n) = -4 + v(n-1) \end{cases}$

7. Geef van de rijen in opdracht 6^d en 6^e een directe formule.

Het **theater van Epidaurus**, het best bewaarde theater uit de Griekse Oudheid, bevindt zich in en was verbonden aan de cultusplaats voor Asclepius, god van de geneeskunde, in het antieke Epidaurus.
De marmeren zitbanken, die in een halve cirkel gebouwd zijn, vormen een architectonische voortzetting van de natuurlijke helling waarop ze geplaatst zijn. Zie de foto hieronder.

Foto - Theater van Epidaurus (omstreeks 350 voor Christus)

Dit bijzonder gaaf bewaarde theater, dat als een reusachtige schelp tegen de flank van een heuvel ligt, werd in de 4e eeuw v.Chr. gebouwd door de architect Polycletus de Jongere uit Argos, volgens zuiver wiskundige principes.
Maar wat houden die wiskundige principes dan in? Een bron geeft de volgende informatie:

> *Het theater biedt plaats aan ongeveer 14.000 toeschouwers. Er zijn 55 ringen zitplaatsen: 34 onder het middenpad en 21 ringen erboven. Aan het verschil in vorm van de onderste en bovenste ringen is duidelijk te zien dat er twee bouwfasen zijn geweest. Er waren eerst 34 ringen zitplaatsen, een eeuw later is dit met 21 ringen uitgebreid.*

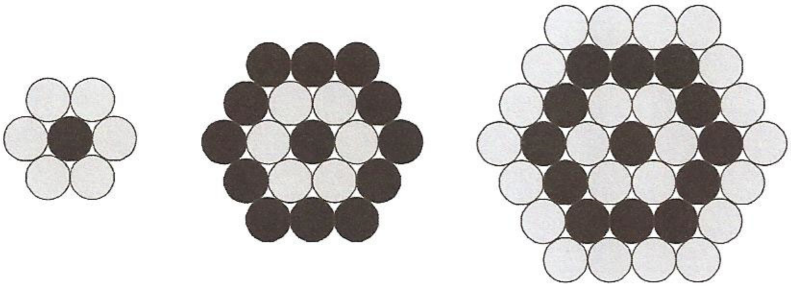
8. Er blijkt een lineair verband te bestaan tussen het rangnummer van een ring en het aantal zitplaatsen. Op de 21e ring kunnen 216 mensen zitten en op de 34e ring 294 mensen.
a. Bereken het aantal zitplaatsen op de eerste ring van het theater.
b. De rij $A(n)$ geeft het aantal zitplaatsen op de n^e ring. Geef de directe formule en de recursieve formule van $A(n)$.

Voortzetten van een rij.

9. Van een rij $a(n)$ zijn de eerste termen $a(1) = 8$ en $a(2) = 12$.
a. Weet je nu zeker hoe de rij verder gaat?
b. Geef een directe formule als je weet dat rij $a(n)$ een rij bij een lineair verband is.
c. Zet de rij met deze twee eerste termen, voort met vier getallen zonder dat er sprake is van een rij bij een lineair verband.

10. In figuur 4 zijn alle cirkels even groot.

Figuur 4



1 **2** **3**

Exemplaar 1 bestaat uit een zwarte cirkel en erom heen zes cirkels die niet alleen elkaar onderling raken maar ook de zwarte cirkel raken. De zes witte cirkels vormen een zeshoekige ring.
Exemplaar 2 is een uitbreiding van exemplaar 1. Er is een zwarte zeshoekige ring erom heen gelegd. In exemplaar 3 zien we dat er een witte zeshoekige ring is bijgekomen.

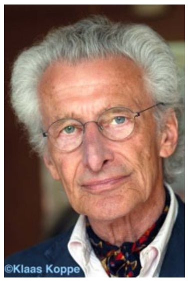
We letten eerst op de zeshoekige ringen die steeds van kleur verwisselen.
De kleinste ring bestaat uit 6 cirkels, de tweede ring bestaat uit 12 cirkels.
a. Uit hoeveel cirkels bestaat de veertigste ring?
b. Stel een directe formule op voor het aantal cirkels in de *n-de* zeshoekige ring.

We kijken en nu naar de rij getallen met de aantallen zwarte cirkels in de opvolgende ringen, dus: 12, … .
c. Geef een directe en recursieve formule van deze rij.
d. Bereken het aantal zwarte cirkels van het honderdste getal in deze rij.

Paragraaf 13: Rijen bij een exponentieel verband

Waar gaat deze paragraaf over?
Hoe herken je een rij bij een exponentieel verband? Wat zijn de eigenschappen van zulke rijen? Hoe worden sommige van dergelijke rijen gebruikt in de architectuur?
Uit een bestaande rij kun je soms nieuwe rijen maken.

Op maandag 1 november begint schrijver Ronald Giphart zijn column in de Volkskrant naar aanleiding van de dood van Harry Mulisch (1927-2010) als volgt:

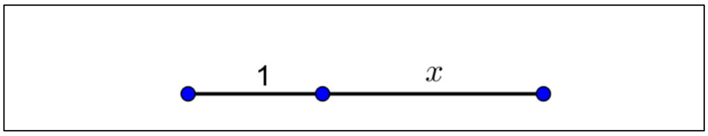


" Als ik de seconde voor mijn dood deel door twee, resteren twee halve seconden, en als ik de laatste halve seconde weer deel door twee, twee kwartseconden, en als ik dat laatste kwart weer deel door twee, en dit oneindig volhoud, dan zal ik nooit sterven", zei Harry Mulisch ooit.

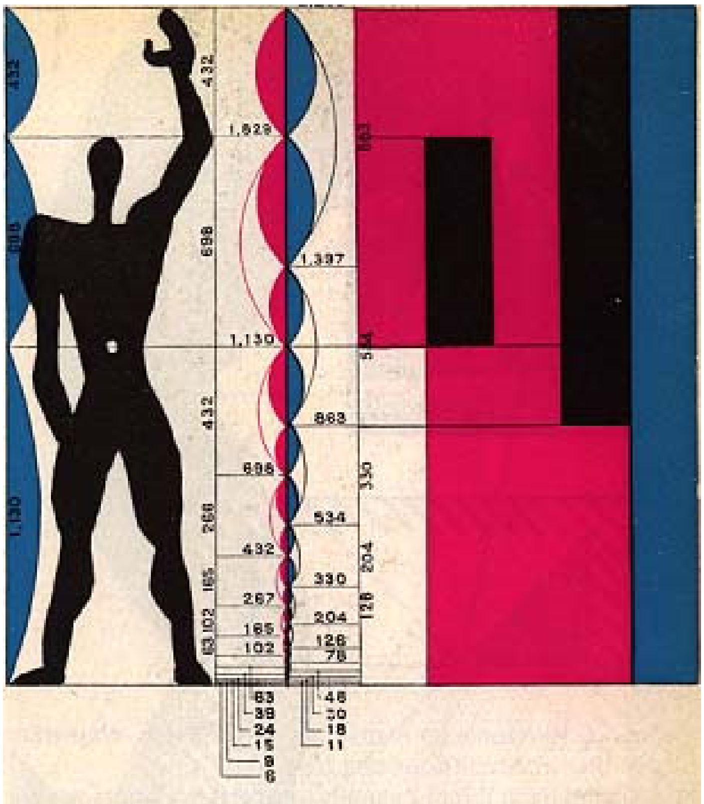
1. In bovenstaand citaat is een rij getallen opgesloten.
a. Schrijf het begin van deze rij op totdat je gekomen bent bij een term die kleiner is dan één-duizendste seconde.
b. Met behulp van een recursieve formule kun je het bijzondere van deze rij laten zien. Geef deze recursieve formule. Neem $u(1)=1$ als startwaarde.
c. Door welke Griekse filosoof was Mulisch vermoedelijk geïnspireerd? Welke passende paradox had deze filosoof bedacht? Raadpleeg zo nodig Wikipedia en/of de lesmodule Logisch redeneren.

Zoals je al eerder hebt gezien, ontwikkelde de Zwitserse architect Le Corbusier, een maatsysteem gebaseerd op de gulden snede.

De Gulden snede is de verdeling van een lijnstuk in twee delen in een speciale verhouding. Bij de gulden snede verhoudt het grootste van de twee delen zich tot het kleinste, zoals het gehele lijnstuk zich verhoudt tot het grootste. Geven we het grootste deel aan met *x* en het kleinste deel met 1, dan is de verhouding van beide zo dat $x:1=(x+1):x$



Deze verhouding, die je ook kunt schrijven als: $\frac{x}{1}=\frac{x+1}{x}$, wordt de **Gulden Snede** genoemd en aangeduid met de Griekse letter φ (phi) en is ongeveer gelijk aan $\varphi \approx 1,618$.



Het maatsysteem van Le Corbusier heeft twee schalen: de blauwe en de rode. Zie figuur 1. Uitgangspunt zijn een mannelijke figuur van 1829 mm (tot zijn kruin) en met opgeheven hand van 2261 mm. In tabel 1 staan de getallen van de rode schaal.

Hij past de verhoudingen toe in zijn bouwwerken, maar als het hem niet uitkomt, wijkt hij daar van af.

figuur 1

Tabel 1

r(1)	r(2)	r(3)	r(4)	r(5)	r(6)	r(7)	r(8)	r(9)	r(10)	r(11)	r(12)	r(13)
6	**9**	**15**	**24**	**39**	**63**	**102**	**165**	**267**	**432**	**698**	**1130**	**1829**

2a. Ga na dat elk getal uit de rij ontstaat door het voorgaande getal te vermenigvuldigen met het gulden snede getal en daarna af te ronden op een geheel getal. Kortom laat zien dat de rij is gebaseerd op de Gulden Snede.
b. Ook geldt voor deze rij: $r(n) = r(n-1) + r(n-2)$. Controleer dit in tabel 1.

3. Bekijk tabel 2.

Tabel 2

b(1)	b(2)	b(3)	b(4)	b(5)	b(6)	b(7)	b(8)	b(9)	b(10)	b(11)	b(12)	b(13)
11	**18**	**30**	**48**	**78**	**126**	**204**	**330**	**534**	**863**	**1397**	**2261**	

Laat zien dat ook de blauwe rij, zie tabel 2, gebaseerd is op de gulden snede en nagenoeg dezelfde recursieve formule geldt als bij de rode rij.

4. De rode rij en de blauwe rij kun je voortzetten naar rechts. Bereken $r(14)$ en $b(14)$.

5. Van een rij is de directe formule $u(n) = 6 \cdot 5^{n-1}$ met $n \geq 1$.
a. Bereken de eerste vijf termen en schrijf de recursieve formule op.
b. Leg uit waarom deze directe formule een exponentieel verband weergeeft.

Een rij, waarvan je een nieuwe term vindt door de vorige met een vast getal *g* te vermenigvuldigen, heet een ***rij met een exponentieel verband.*** Het wordt ook wel een *meetkundige rij* genoemd.
Dat vaste getal *g* heet de ***(groei)factor*** van de rij met een exponentieel verband.
Elke rij met een exponentieel verband heeft een directe formule en een recursieve formule.

6. Kijk nog eens naar opgave 1. Leg uit waarom de rij in het citaat van Mulisch een rij met een exponentieel verband is.

7. Geef bij de volgende rijen de recursieve formule.
a. $u(n) = 17 \cdot 0,85^{n-1}$
b. $v(n) = -1,3 \cdot 7^{n}$

8. Geef bij de volgende rijen een directe formule.
a. $\begin{cases} u(1) = 18 \\ u(n) = 3 \cdot u(n-1) \end{cases}$
b. $\begin{cases} u(1) = \frac{2}{3} \\ u(n) = -1,5 \cdot u(n-1) \end{cases}$

9. Hieronder staan acht rijen.

A: 162, 54, 18, 6, …	E: 1, −5, −11, −17, …
B: 11, 14, 18, 23, 29, …	F: 2, √8, 4, √32, 8, …
C: 4, 14, 49, 171½, …	G: 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, …
D: 1, 4, 9, 16, 25, …	H: 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, …

a. Ga na welke rijen een rij bij een exponentieel verband zijn.
b. Geef bij elke rij bij een exponentieel verband de bijbehorende directe formule.
c. Geef bij elke rij bij een exponentieel verband de bijbehorende recursieve formule.
d. Geef bij elke rij de volgende drie termen.

10. De Fibonacci-rij 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,……. is geen rij met een exponentieel verband. Laat dat zien.

Toch is er wel iets aan de hand met de verhoudingen van twee opeenvolgende termen.
Zie tabel 3, die deels is ingevuld. In de middelste rij staan de eerste 13 Fibonaccci-getallen.

Tabel 3

term	*f*(1)	*f*(2)	*f*(3)	*f*(4)	*f*(5)	*f*(6)	*f*(7)	*f*(8)	*f*(9)	*f*(10)	*f*(11)	f(12)
waarde	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55		

verhouding		1:1=1	2:1=2	3:2=1,5	1,667	1,600	1,625						

11a. Neem de tabel over en vul deze verder in.
b. Wat kun je zeggen op den duur over de waarden van de verhoudingen?

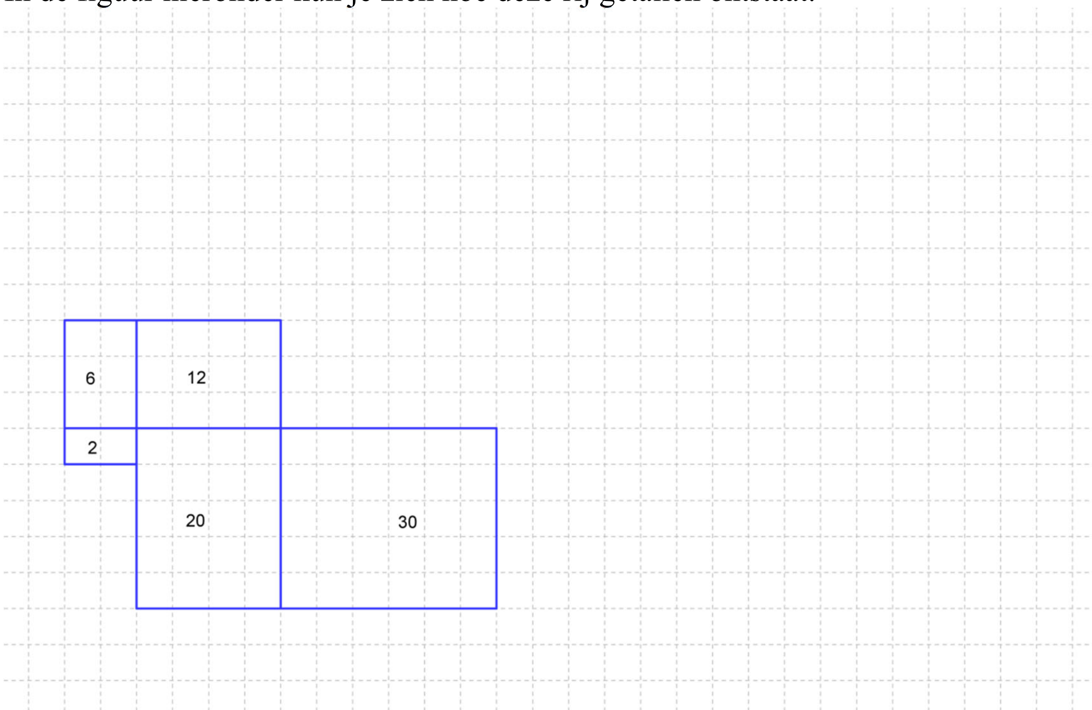
12. Bij de geboorte van Daniël op 27 november besluiten zijn vader Sander en moeder Sierou een spaarrekening voor hem te openen. Ze storten € 1000 op deze spaarrekening met een rente van 2,5% per jaar. Ga er van uit dat deze rente ongewijzigd blijft.
a. Hoeveel geld staat er na 1 jaar op de spaarrekening? En na twee jaar?
b. Geef een directe formule waarmee je het bedrag op de spaarrekening na t jaar kunt berekenen. Geef ook een recursieve formule die hierbij past.
c. Hoeveel geld staat er op de spaarrekening als Daniel 18 jaar wordt?

De ouders van Daniël vinden het te verwachten bedrag op 18 jarige leeftijd te laag en besluiten om elk jaar op de verjaardag € 500 bij te storten op de spaarrekening tot en met de 18^e verjaardag.
d. Stel een recursieve formule op waarmee je het bedrag op de spaarrekening na *t* jaar kan berekenen.

13. Van een rij met een exponentieel verband $u(0), u(1), u(2), ...$ is gegeven dat $u(2) = 152$ en $u(3) = 72$. Bereken de groeifactor en $u(0)$ en geef de bijbehorende recursieve formule.

Herhalingsopgaven rijen

1. Gegeven is de rij van zogeheten rechthoek getallen: 2 – 6 – 12 – 20 – 30 – 42 … .
In de figuur hieronder kun je zien hoe deze rij getallen ontstaat.



a. Bekijk de figuur hierboven en teken de volgende twee rechthoeken in de figuur.
b. Geef de volgende vijf getallen van deze rij.

2. Zie hieronder een kinderrijmpje uit de Engelse literatuur uit begin negentiende eeuw:
As I was going to St Ives
I met a men with seven wives,
Every wife had seven sacks,
Every sack had seven cats
Every cat had seven kits.
Kits, cats, sacks, wives,
How many were going to St Ives
a. Schrijf achtereenvolgens op het totale aantal vrouwen, totale aantal zakken, enz. en geef de kenmerken van de ontstane rij.
b. Beantwoord de vraag van het gedichtje.
c. Het kinderrijmpje is een dichterlijke manier om te laten zien hoe snel kleine getallen tot grote kunnen leiden.
In de Liber abaci van Leonardo Fibonacci uit de dertiende eeuw stond het volgend raadsel:
Zeven vrouwen zijn op weg naar Rome. Elke vrouw heeft zeven muilezels. Elke ezel heeft zeven zakken. In elke zak zitten zeven broden. Bij elk brood horen zeven foudralen. In elk foudraal zitten zeven messen.
Bereken het totaal aantal levende wezens en objecten.

3. Op een perceel staan 3000 kerstbomen. Een boomkweker moet beslissen hoeveel bomen er jaarlijks gekapt kunnen worden en hoeveel nieuwe aanplant er nodig is. Hij zal niet alle bomen in één keer kappen want dan heeft hij de eerstvolgende jaren geen opbrengst.
Hij besluit elk jaar 10% van de bomen te kappen en er dan weer 450 aan te planten. Hij plant dus meer dan hij kapt om zijn opbrengst op termijn te verhogen. Op het perceel is namelijk plaats voor 5000 bomen.
a. Hoeveel bomen staan er één jaar later op het perceel? En twee jaar later?
b. Geef een recursieve formule voor het aantal bomen $B(t)$ na t jaar die past bij bovengenoemde situatie.
c. Onderzoek hoe het aantal bomen op dit perceel zich de volgende twintig jaar ontwikkelt. Schrijf je antwoorden in een tabel en maak daarbij een grafiek.
d. Kan de boomkweker zijn beleid blijven voortzetten of staat het perceel na een tijd vol?
e. Op een gegeven moment lijkt er een evenwicht te ontstaan. Hoeveel bomen staan er dan op het perceel?

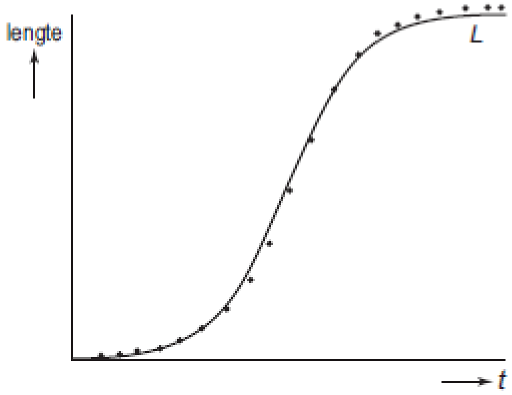
4. Stel dat je ziek bent en dat je gedurende een lange periode elke morgen een bepaald medicijn moet innemen. In de loop van de dag zal de hoeveelheid actieve bestanddelen van dat medicijn in je lichaam afnemen. Stel dat onderzoek heeft uitgewezen dat gemiddeld na 24 uur nog 50% van de actieve bestanddelen van dat medicijn in je lichaam overblijft. De hoeveelheid medicijn die jij elke morgen moet innemen, bevat 5 mg actieve bestanddelen.

a. Leg uit dat de recursieve formule die bij dit proces past is: $\begin{cases} H(1) = 5 \\ H(n) = 0,5 \cdot H(n-1) + 5 \end{cases}$.

Hierin is $H(n)$ de hoeveelheid medicijn na n perioden van 24 uur.
b. Maak met je rekenmachine een tabel bij deze formule.
c. Wat valt je op?

5. Zonnebloemen zijn snelgroeiende planten die vaak worden gebruikt voor de productie van olie. Om zicht te krijgen op het groeiproces van zonnebloemen, worden regelmatig metingen gedaan. Bij een experiment is van een zonnebloem gedurende twintig weken elke week de lengte gemeten. Het resultaat van deze metingen is hieronder in figuur 1 met stippen weergegeven.

figuur 1



In figuur 1 zie je ook een globale grafiek, die de groei van de zonnebloem goed benadert.
Bij die grafiek hoort de volgende formule: $L = \dfrac{400}{1+399\cdot(0,55)^t}$.

In deze formule is L de lengte van de zonnebloem in centimeters en t de tijd in weken vanaf het begin van de metingen.
In figuur 1 kun je zien dat de grafiek van L nadert naar een grenswaarde. Verder verloopt de groei volgens de formule van L in het begin bij benadering exponentieel. Dit noemen we de exponentiële fase. Deze exponentiële fase duurt tot L de helft van zijn grenswaarde bereikt heeft.
a. Bereken met behulp van de formule de lengte van de zonnebloem bij het begin van de metingen en de lengte na 1 week.
b. Bereken met behulp van de antwoorden van vraag a de groeifactor van de exponentiele fase van dit groeiproces en geeft de bijbehorende formule.
c. Geef de recursieve formule die past bij de exponentiele fase van dit groeiproces.

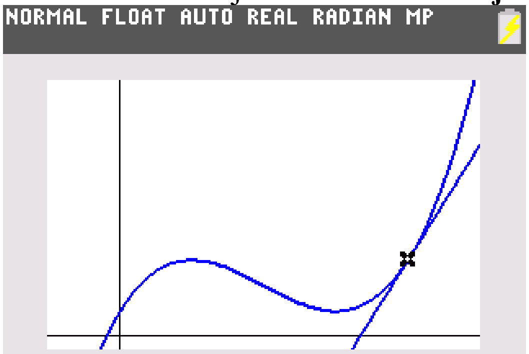
De lengte van een zonnebloem kan ook goed beschreven worden met een recursieve formule betrekking. Deze ziet er voor de lengte H van de zonnebloem als volgt uit:

$$\begin{cases} H(0) = 2 \\ H(t) = H(t-1) + 0,64\cdot H(t-1) - 0,0016\cdot\left(H(t-1)\right)^2 \end{cases}$$

Hierin is t de tijd in weken.
d. Laat met een berekening zien dat $H(0) = 2$.
De formule van L en de recursieve formule zullen voor H niet precies dezelfde uitkomsten geven.
e. Bereken hoe groot het verschil is tussen beide uitkomsten voor $t = 9$.

Samenvatting

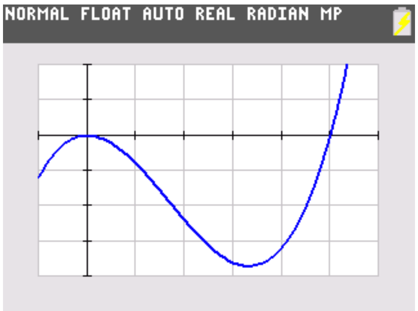
Je hebt kennis gemaakt met het begrip **helling** en hoe je de helling in een willekeurig punt van een gegeven grafiek kunt bepalen. Dit kan met een berekende benadering en op een grafische manier. Ook weet je nu wat een **raaklijn** is.



De helling van de raaklijn in een punt van de grafiek geeft aan hoe groot de helling in dat punt van de grafiek is.

Voorbeeld:
Benader met een berekening de helling in punt $S(5,0)$ van de grafiek bij de formule $y = x^2(x-5)$.

Uitwerking:
Maak een plot om alvast een inschatting te krijgen



- Neem twee punten P en Q vlakbij punt $S(5, 0)$, bijvoorbeeld het punt P met $x = 5{,}01$ en het punt Q met $x = 4{,}99$.
- Bereken de y-coördinaat van P: $y = 0{,}251001$ en bereken de y-coördinaat van Q: $y = -0{,}249001$
- Bereken de helling van lijn QP:
  $$\frac{0{,}251001-(-0{,}249001)}{0{,}02} = 25{,}0001$$
- De helling in punt S is bij benadering 25.

Opmerkingen:
1. Je kunt de helling in het voorbeeld hierboven ook grafisch benaderen: je tekent zo nauwkeurig mogelijk de raaklijn en met behulp van twee punten op deze raaklijn bereken je de helling van deze raaklijn.
2. Je kunt de helling van een grafiek in een punt ook op je rekenmachine via een rechtstreekse toetsencombinatie berekenen. Vraag je docent hoe dat op jouw rekenmachine in zijn werk gaat.

Je hebt gekeken naar **exponentiële groei** als groeimodel.
Afhankelijk van de groeifactor g is exponentiële groei van de vorm $b \cdot g^t$ met $b > 0$, toenemend ($g > 1$) of afnemend ($0 < g < 1$).
In het laatste geval nadert bij steeds groter wordende waarden van t, de waarde van $b \cdot g^t$ tot 0. Dit heet dan de **grenswaarde** van de exponentiële groei.
Exponentiële groei kent een vaste tijdsperiode waarin de hoeveelheid verdubbelt als $g > 1$: deze tijdsperiode heet de **verdubbelingstijd**.
Als $0 < g < 1$ kennen we net zoiets: de **halveringstijd** is een vaste tijdsperiode waarin de hoeveelheid halveert.

Er zijn groeimodellen die verwantschap vertonen met exponentiele groei. Je hebt hiervan enkele voorbeelden gezien. Bij dergelijke modellen kun je vanuit de basisvorm $b \cdot g^t$ beredeneren hoe het groeiproces verloopt (stijgend, dalend, toenemend/afnemend dalend of stijgend) en of er een grenswaarde is.

Voorbeelden

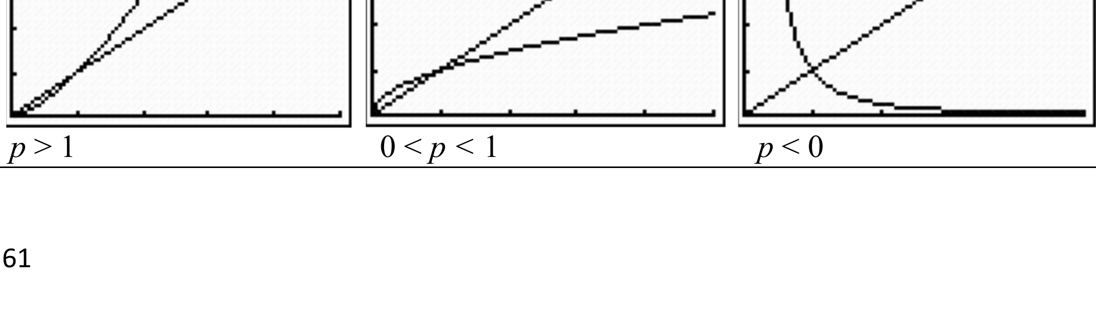
1. Gegeven het model $A = 750 - 40 \cdot 0,72^t$.

De basisvorm $40 \cdot 0,72^t$ neemt bij toenemende waarden van *t* af omdat de groeifactor 0,72 tussen 0 en 1 ligt.
Van 750 wordt dus een steeds kleiner getal afgetrokken bij groter wordende waarden van *t*.
Conclusie: de grafiek bij de formule *A* is stijgend.
Omdat $40 \cdot 0,72^t$ afnemend dalend is, is *A* afnemend stijgend. Dit kun je controleren met plots.

2. Gegeven het model $B = \dfrac{750}{30 - 20 \cdot 0,86^t}$.

De basisvorm $30 \cdot 0,86^t$ neemt bij toenemende waarden van *t* af omdat de groeifactor 0,86 tussen 0 en 1 ligt.
Van 30 wordt dus een steeds kleiner getal afgetrokken bij groter wordende waarden van *t*.
Dus $30 - 20 \cdot 0,86^t$ is stijgend.
Omdat $30 - 20 \cdot 0,86^t$ stijgend is, wordt in het model het getal 750 gedeeld door een steeds groter worden getal. Dit geeft een kleiner wordende uitkomst voor *B*.
Conclusie $B = \dfrac{750}{30 - 20 \cdot 0,86^t}$ is dalend.
Zo kun je bij dit model ook beredeneren wat er met de waarde van *B* gebeurt als *t* steeds groter wordt.
De basisvorm $30 \cdot 0,86^t$ komt steeds dichter bij 0 omdat de groeifactor 0,86 tussen 0 en 1 ligt.
De waarde van *B* komt dus steeds dichter bij $\dfrac{750}{30-0} = 25$, dit heet de grenswaarde van *B*.

Machtsformules zijn van de vorm $y = c \cdot x^p$.
In toepassingen zijn de waarden van x en c meestal groter dan 0.
Voor $p > 0$ gaan de grafieken door de punten (0,0) en (1,1).
Hieronder zijn voor drie verschillende waarden van *p* de grafieken samen met die van $y = x$ geplot.



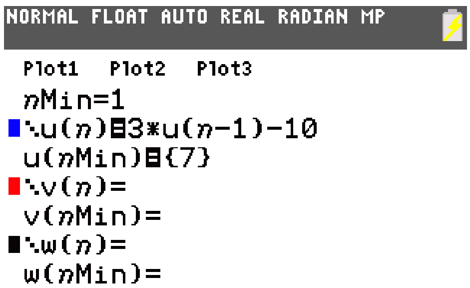
$p > 1$ $\quad$ $0 < p < 1$ $\quad$ $p < 0$

Rijen
Je hebt kennis gemaakt met het begrip "rij". De getallen die in een rij voorkomen heten **termen** van de rij. Een rij bestaat meestal uit een oneindig aantal termen.

Vaak heeft een rij een patroon, zijn er regelmatigheden aan te zien. Soms kan dat bedrieglijk zijn. De begintermen van een rij kunnen een vermoeden oproepen van een bepaalde regelmatigheid die echter verderop in de rij niet blijkt te kloppen.

Om getallen in een rij aan te wijzen zijn notaties ingevoerd. Bijvoorbeeld $u(n)$ of u_n of $t(n)$ of t_n om de n^e term van een rij aan te geven. Het getal n heet het **rangnummer** van de term $u(n)$ of u_n.
Zo is bijvoorbeeld $u(5)$ de vijfde term van een rij $u(n)$ of, anders gezegd, $u(5)$ is de term met rangnummer 5.
Met een **directe formule** kun je bij elk rangnummer direct de waarde van de term uitrekenen.
Twee voorbeelden van directe formules zijn $u(n) = n^2 - 7n + 1$ en $v_n = \dfrac{18}{\frac{1}{2}n - 4}$.
Een **recursieve formule** van een rij geeft het verband tussen twee opvolgende termen van de rij. Om alle termen van de rij te kunnen berekenen moet minstens één term van de rij bekend zijn. Meestal wordt de eerste term gegeven, deze heet de startwaarde van de rij.
Bijvoorbeeld wordt een rij $u(n)$ gegeven door $\begin{cases} u(1) = 7 \\ u(n) = 3 \cdot u(n-1) - 10 \end{cases}$.

Je moet de rekenmachine kunnen gebruiken bij rijen. In de figuur hiernaast zie hoe de rij hierboven moet worden ingevoerd op een rekenmachine. Vraag je docent hoe dat op jouw rekenmachine moet. Vervolgens moet je bijvoorbeeld tabellen kunnen maken bij rijen.



Bijzondere rijen zijn **rijen bij een lineair verband** en **rijen bij een exponentieel verband**.
Voorbeeld van een rij bij een lineair verband: $u(n) = 30 - 2n$ ofwel $\begin{cases} u(1) = 28 \\ u(n) = u(n-1) - 2 \end{cases}$.
Ga na dat beide formules de volgende rij getallen geven: 28, 26, 24, 22, 20, … .
Bij dit soort rijen ontstaat een volgende term door bij de voorgaande term steeds een vast getal op te tellen. Dit getal kan, zoals je ziet, ook negatief zijn.

Voorbeeld van een rij bij een exponentieel verband: $u(n) = 32 \cdot \frac{3}{4}^{n-1}$ ofwel $\begin{cases} u(1) = 32 \\ u(n) = \frac{3}{4} \cdot u(n-1) \end{cases}$.
Ga na dat beide formules de volgende rij getallen geven: 32, 24, 18, 13½, … .
Bij rijen bij een exponentieel verband ontstaat een volgende term door de voorgaande term steeds met een vast getal te vermenigvuldigen. Dit getal kan, zoals je ziet, ook kleiner dan 1 zijn.

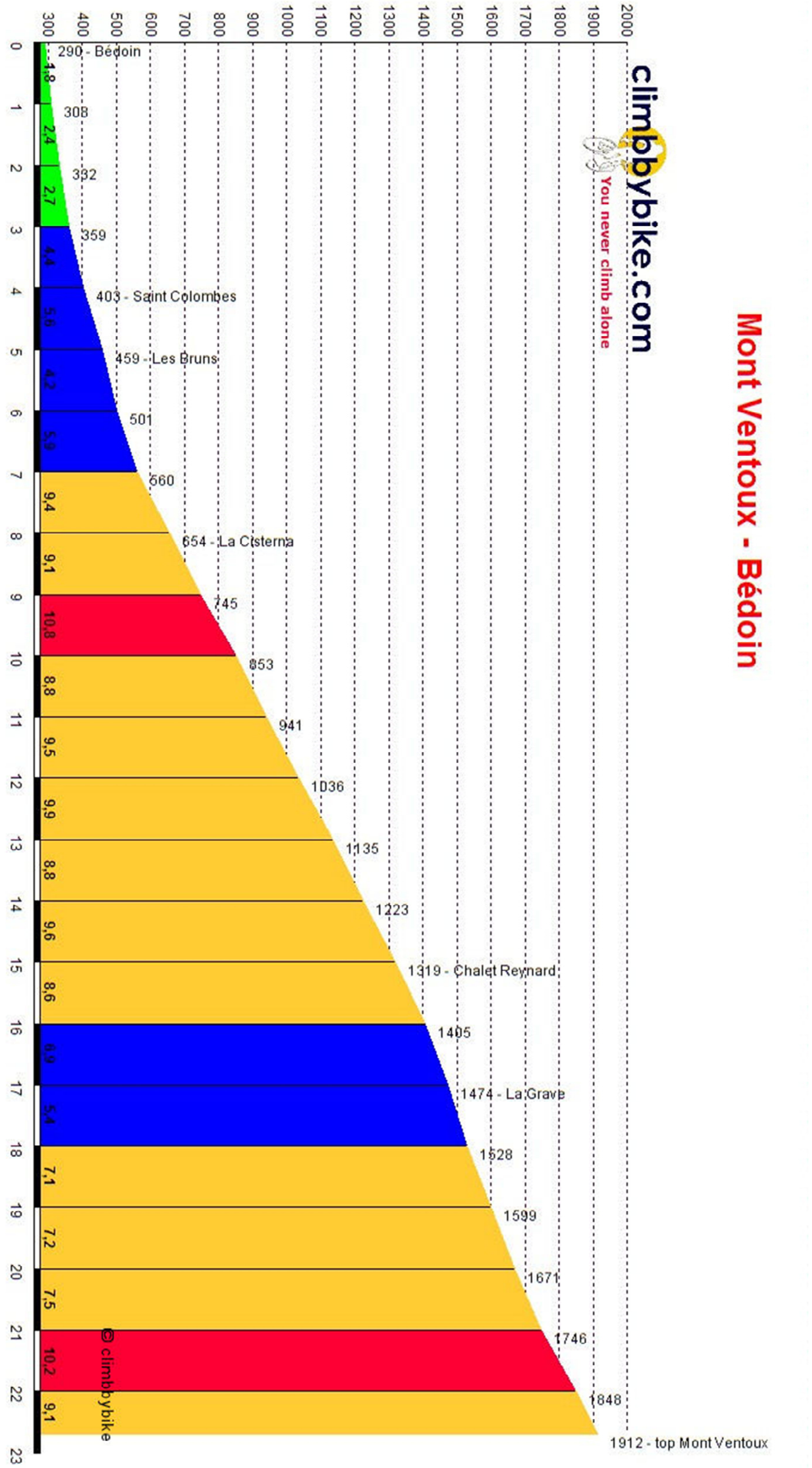
Je moet soms van een rij getallen de bijbehorende formule kunnen opstellen.

Voorbeeld:
Geef een recursieve en een directe formule van de rij $u(n)$ waarvan de eerste vijf termen zijn: 1000, 200, 40, 8 en 1,6 .
Oplossing:
Je kunt nagaan dat na de eerste term, je de volgende term krijgt door de voorgaande term door te delen door vijf ofwel te vermenigvuldigen met $\frac{1}{5}$.

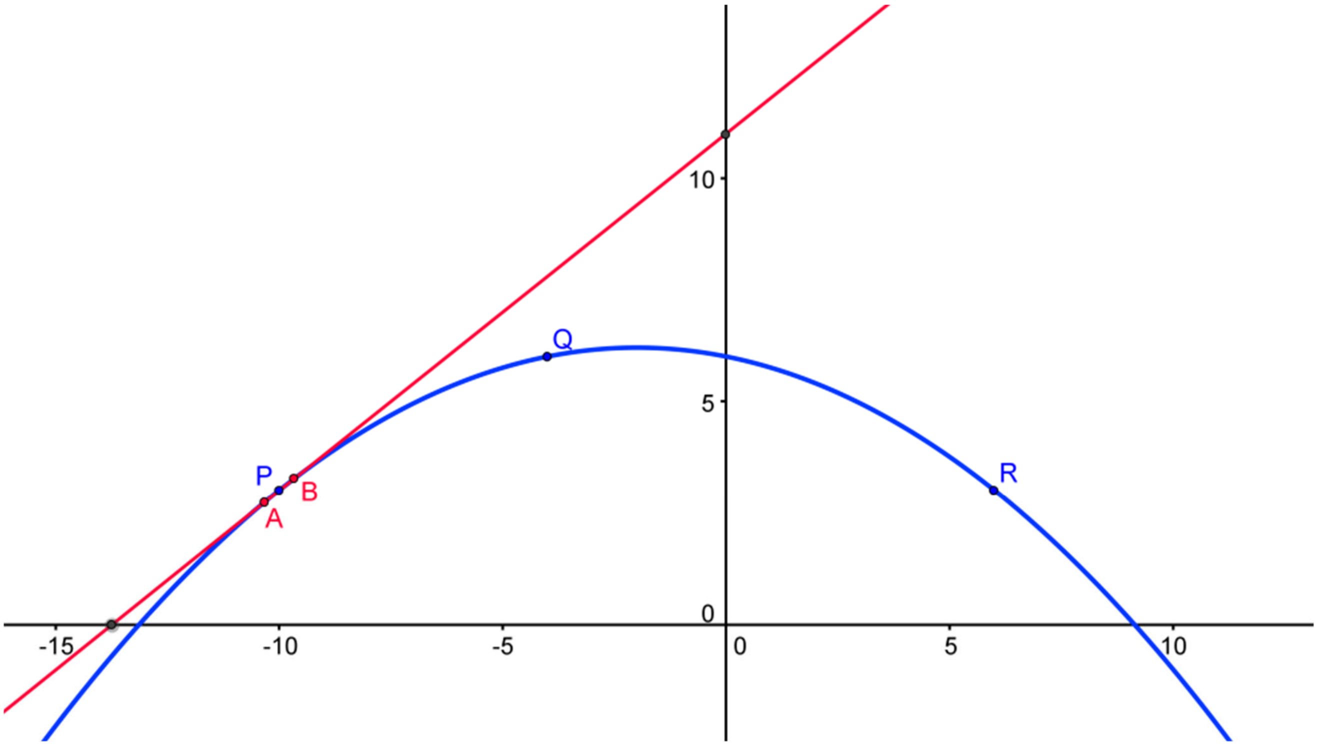
De recursieve formule is $\begin{cases} u(n) = \frac{1}{5} \cdot u(n-1) \\ u(1) = 1000 \end{cases}$ en de directe formule is $u(n) = 1000 \cdot (\frac{1}{5})^{n-1}$.

BIJLAGEN

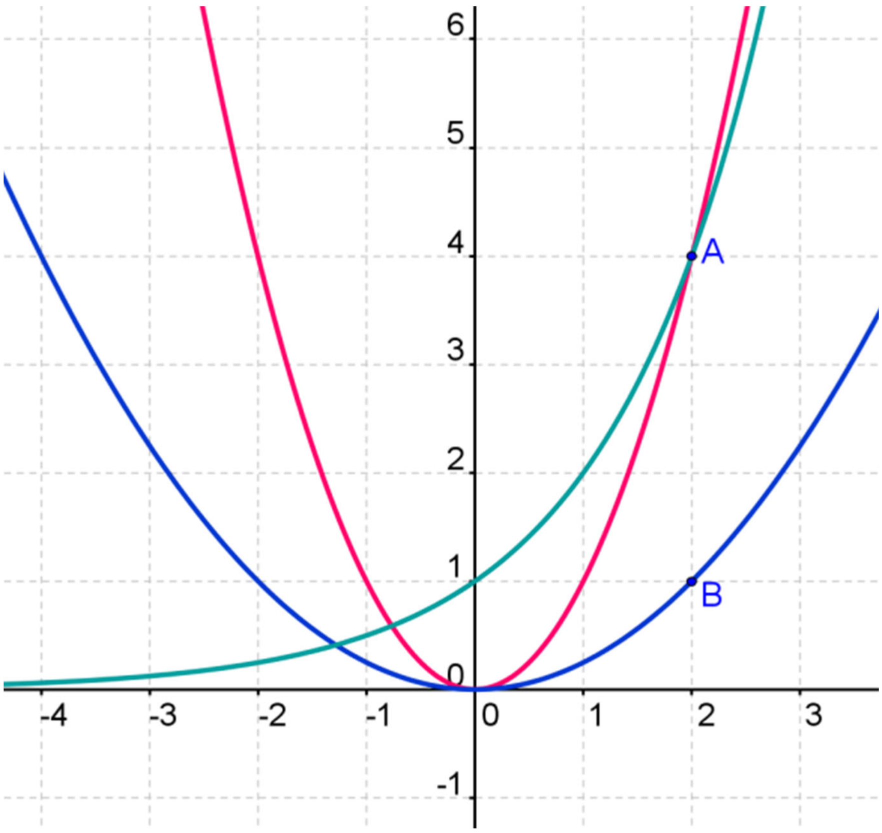
Paragraaf 7, Fig. 2, vraag 3



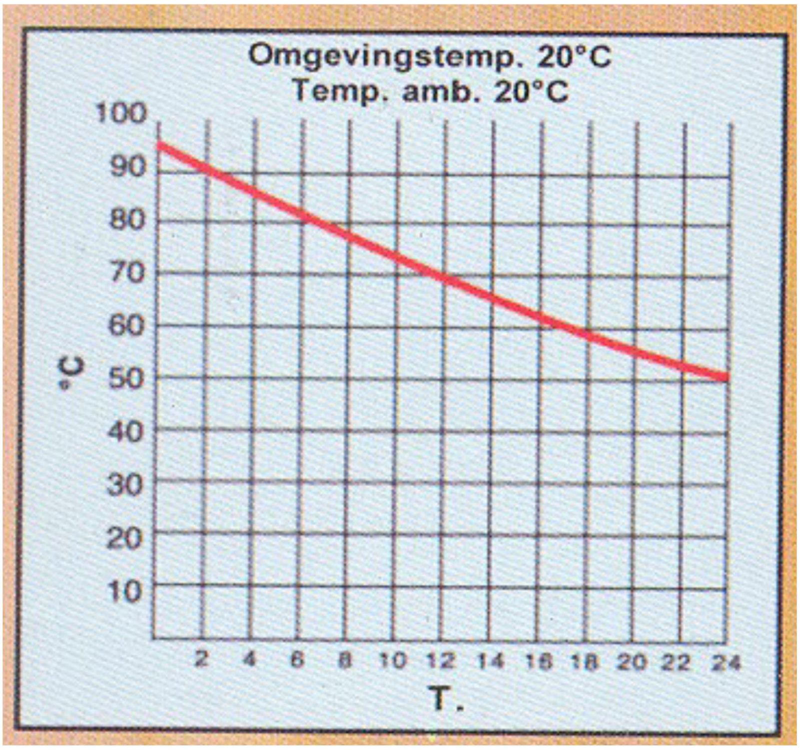
Paragraaf 7, figuur 5 vraag 17 t/m 20



Paragraaf 7, figuur 8 vraag 24



Paragraaf 8, figuur bij herhalingsopgave 17 Isoleerkan



Paragraaf 9, opgave 24