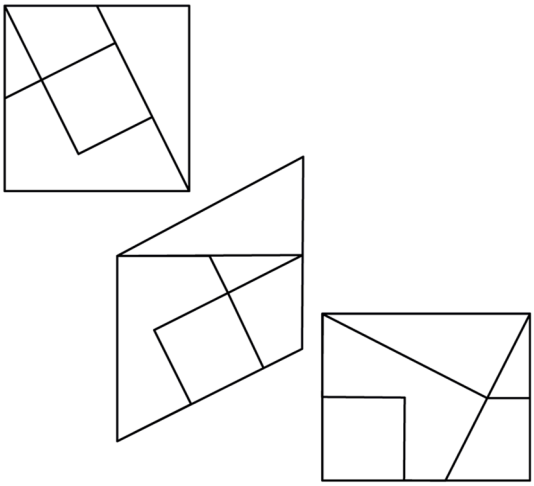
Hoofdstuk 21 OPPERVLAKTE VWO

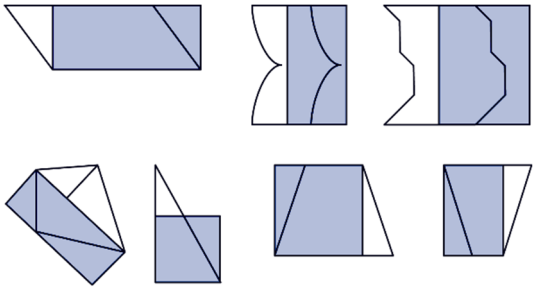
21.0 INTRO

1



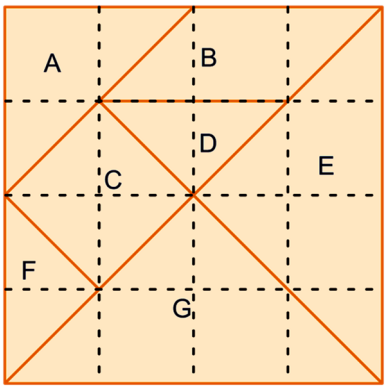
21.1 DE OPPERVLAKTE VAN EEN PARALLELLOGRAM

2



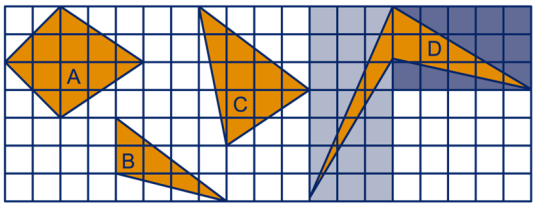
Opp. bovenste rij: 10 cm^2 ; 8 cm^2 ; 12 cm^2
Opp. onderste rij: 6 cm^2 ; 4 cm^2 ; 9 cm^2 ; 6 cm^2

3



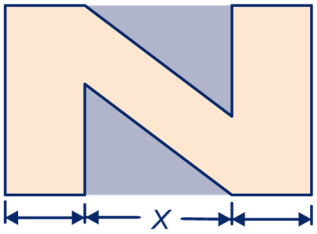
A: $\frac{1}{8}\cdot 36 = 4\frac{1}{2}$ B: $4\frac{1}{2}$ C: $4\frac{1}{2}$
D: $\frac{1}{2}\cdot 4\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$ E: $2\cdot 4\frac{1}{2} = 9$ F: $2\frac{1}{4}$
G: 9

4 *A*: 4 + 6 = 10 *B*: 4 *C*: $8\frac{1}{2}$ *D*: 8



Als voorbeeld de oppervlakte van *D*:
De donkerblauwe rechthoek heeft oppervlakte 5·4 = 20. Daar gaan twee halve rechthoeken vanaf, één met oppervlakte $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2 = 5$ en de ander met oppervlakte $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4 = 10$.
De lichtblauwe rechthoek heeft oppervlakte 7·3 = 21. Daar gaan twee halve rechthoeken vanaf, één met oppervlakte $\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5 = 7\frac{1}{2}$ en de ander met oppervlakte $\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 7 = 10\frac{1}{2}$.
De oppervlakte van *D* is:
$21 + 20 - (5 + 10 + 7\frac{1}{2} + 10\frac{1}{2}) = 8$.

5 a

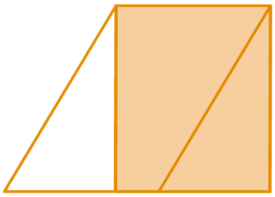


x berekenen in een blauwe driehoek:
$x = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$, de totale breedte is dus 20 + 2·10 = 40 cm.

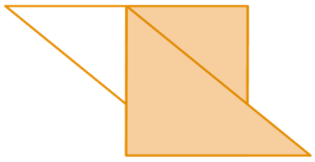
b Oppervlakte is 40·25 – 15·20 = 700 cm^2.

6 a Nee.
b In het begin: 1,5·5 = 7,5 cm^2,
in het andere geval: 0,5·5 = 2,5 cm^2.

7 Alledrie 20 cm^2, het eerste:



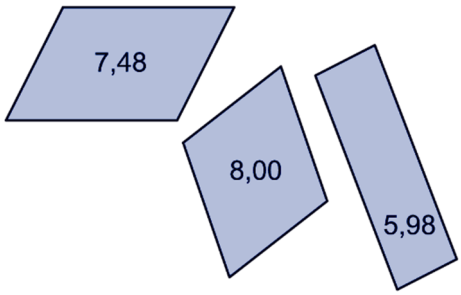
het derde:



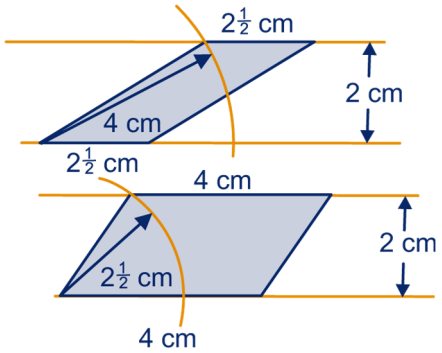
na de eerste keer

na de tweede keer

8



9 a

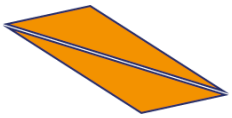


b Oppervlakte bovenste parallellogram is $2\frac{1}{2} \cdot 2 = 5$ cm^2.
Oppervlakte onderste parallellogram is $2 \cdot 4 = 8$ cm^2.

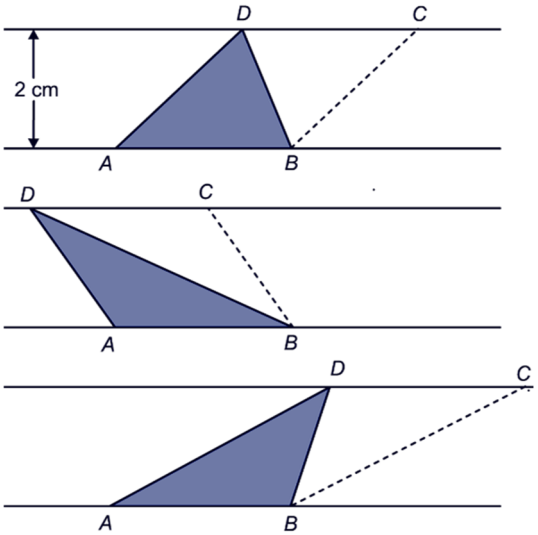
10 19,2 : 4 = 4,8 cm of 19,2 : 6 = 3,2 cm.

21.2 DE OPPERVLAKTE VAN EEN DRIEHOEK

11 a
b 20 cm^2 en 15 cm^2



12 a

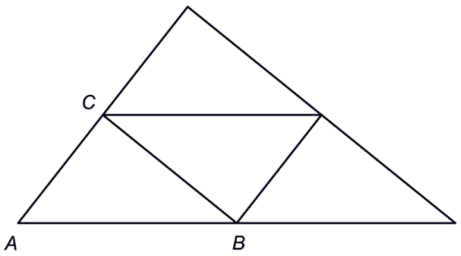


b oppervlakte van een parallellogram = 6 cm^2 ; oppervlakte van een driehoek = 3 cm^2

13 Oppervlakte *ABC* is $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 = 7\frac{1}{2}$ cm^2.

14 a Oppervlakte *ABC* is $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$.
b De oppervlakte is ook $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot AC$.
Dus $10 \cdot AC = 96$, dus AC = 9,6.

15 ab



21.3 ALLERLEI OPPERVLAKTES

16 Verdeel het trapezium in twee driehoeken: de kleine driehoek heeft oppervlakte $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4\frac{1}{2}$ en de grote $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$.
De oppervlakte van het trapezium is $4\frac{1}{2} + 9 = 13\frac{1}{2}$.

17 $\frac{3}{4}$ deel van 20 = 15

18 a $BC = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$
b Oppervlakte *ABC* is $\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 15 = 150$
c $\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD = 150$, dus $BC \cdot AD$ = 300,
dus AD = 300 : BC = 12
d $\angle ADC = \angle BAC$ en $\angle DBA = \angle CBA$
e De vergrotingsfactor van groot naar klein is: $\frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$, dus $AD = \frac{4}{5} \cdot AC$ = 12.

19 a Een hellende kant is 20 bij $\sqrt{8^2 + 15^2} = 17$
Oppervlakte voorkant: $\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 15 = 120$
Oppervlakte hellende kant: 17·20 = 340
Totaal: 2·120 + 2·340 = 920 dm^2
b Inhoud tent is $\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 15 \cdot 20 = 2400$ dm^3.

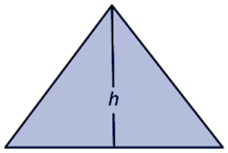
20 a Zie plaatje voor letters.

$x = \sqrt{52^2 - 20^2} = 48$
$y = \sqrt{29^2 - 20^2} = 21$
Dus het andere latje is 48 + 21 = 69 cm.
b Oppervlakte papier is 40 · 69 = 2760 cm^2.
c Oppervlakte vlieger is 2760 : 2 = 1380 cm^2.
d Oppervlakte vlieger is 50 · 80 : 2 = 2000 cm^2.

21 Oppervlakte kleine driehoek is
$\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 20 = 250$ cm².
Oppervlakte grote driehoek is
$\frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 20 = 500$ cm².
Oppervlakte trapezium is 250 + 500 = 750 cm².

22 a Lange diagonaal is $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.
b Oppervlakte van een van de driehoeken is:
$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$, dus oppervlakte vlieger is 60.
Dus het halve oproduct van de diagonalen is 60, de korte diagonaal is $2 \cdot 60 : 13 = 9\frac{3}{13}$.

23 Noem de hoogte van de driehoek: *h*.
$h = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$
Oppervlakte is
$\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$



21.4 RECHTHOEKEN MET DEZELFDE OMTREK

24 b

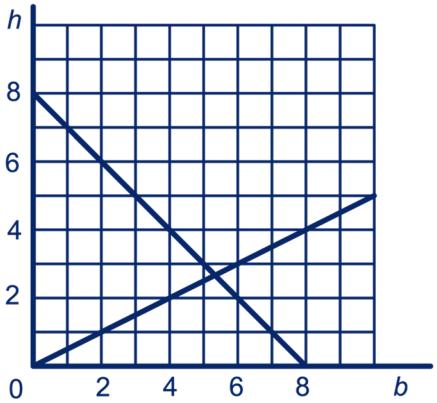
40	30	25	35	45	48
10	20	25	15	5	2
400	600	625	525	225	96

c 25 bij 25 m
d $h + b = 50$

25 b Ze liggen op één lijn.

26 a $BR = RQ = OP$ en $AP = PQ = OR$ want de driehoeken *BRQ* en *PAQ* hebben twee hoeken van 45°, dus ze zijn gelijkbenig.
b $OR + RQ = OR + RB = OB$ en
$OP + PQ = OP + PA = OA$
Dus: $OR + RQ + OP + PQ = OA + OB$

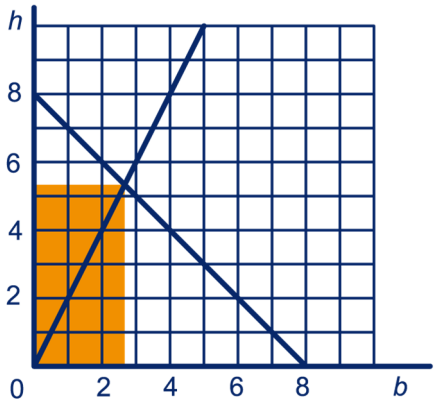
27 ac



b $h + b = 8$
d $2h = b$

28 a De omtrek is 2 · 9 = 18.
b $h : b = 1\frac{1}{4} : 1 = 5 : 4$
c $2\frac{1}{4}b = 9 \Leftrightarrow b = 4$
De breedte is 4 en de hoogte 5.

29 abc



d $h + b = 8$ en $h = 2b$
e $2b + b = 8$
$3b = 8$
$b = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$, dan
$h = 2 \cdot 2\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}$

21.5 OPPERVLAKTE EN OMTREK VAN EEN CIRKEL

30 a Oppervlakte kleine vierkant is $2r^2$ en oppervlakte grote vierkant is $4r^2$.
c Oppervlakte als straal is 2 cm: $2\pi \cdot 2 = 4\pi$ cm²
Oppervlakte als straal is 5 cm: $5\pi \cdot 5 = 25\pi$ cm²

31 Wateroppervlakte is $50^2 \cdot \pi - 25^2 \cdot \pi =$
$2500\pi - 625\pi = 1875\pi \approx 5890$ m²

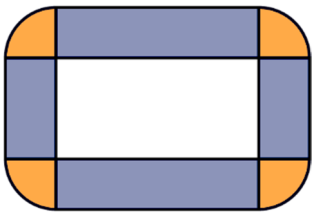
32 Oppervlakte ster is $4^2 - \pi \cdot 2^2 = 16 - 4\pi \approx 3{,}43$ cm²

33 a Inhoud is $2 \cdot \pi \cdot 1{,}5^2 = 4{,}5\pi \approx 14{,}1$ dm³, dus ongeveer 14 liter.
b Oppervlakte zijkant is $\pi \cdot 15 \cdot 2 \cdot 20 = 600\pi$ cm².
Oppervlakte onderkant is $\pi \cdot 15^2 = 225\pi$ cm².
Oppervlakte totaal is $825\pi \approx 2592$ cm².

34 Oppervlakte is $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2 = \pi \approx 3{,}14$ cm².
Omtrek is $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2 - 2 \cdot \pi \cdot 1 = 4\pi \approx 12{,}6$ cm.

35 Gewicht pijp is
$(\pi \cdot 0{,}15^2 - \pi \cdot 0{,}13^2) \cdot 10 \cdot 8{,}9 \approx 1{,}57$ kg

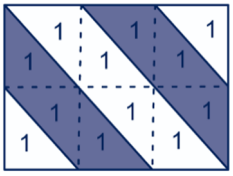
36 De vier oker stukken vormen een cirkel met straal 50.
De vier blauwe stukken zijn twee rechthoeken van 50 bij 100 en twee van 50 bij 200.



De totale oppervlakte van de atletiekbaan is:
$\pi \cdot 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 100 + 2 \cdot 50 \cdot 200 =$
$2500\pi + 30.000 \approx 37.854$ m^2.

SUPER OPGAVEN

8 donkere banen: 3
lichte banen: 1, 1 en 4



9 a $DE = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,
oppervlakte = 10·3 = 30.
b oppervlakte parallellogram = 5·*BF*,
dus *BF* = 30:5 = 6.
c Ze hebben beide een rechte hoek en beide hoek *A*.
d De vergrotingsfactor van driehoek *ADE* naar *ABF* is *AB* : *AD* = 2, dus *BF* = 2·*DE* = 6.

16 a Als je als hoogte *h* van de twee driehoeken de afstand van de evenwijdige zijden neemt, dan:
oppervlakte ΔABD : oppervlakte ΔBCD =
$\frac{1}{2} \cdot h \cdot AB \ : \ \frac{1}{2} \cdot h \cdot CD = AB : CD = 2 : 1$
b Driehoek *ASB* krijg je uit driehoek *CSD* door met centrum *S* met -2 te vermenigvuldigen.
Dus de oppervlakten verhouden zich als 4:1.

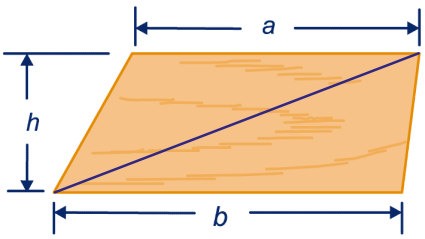
17 a Noem de afstand van *C* tot zijde *AB* = *h*.
Dan is de
oppervlakte van driehoek *ADC* = $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot h = h$
en van driehoek *BDC* = $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot h = 3h$.
Dus oppervlakte driehoek *ADC* = $\frac{1}{4} \cdot 16 = 4$
en oppervlakte driehoek *BDC* = 12.
b oppervlakte driehoek *AXC* = $\frac{1}{2} \cdot AX \cdot h$
oppervlakte driehoek *BXC* = $\frac{1}{2} \cdot BX \cdot h$

18 Oppervlakte *AXC* = $\frac{2}{3} \cdot 60 = 40$ en oppervlakte *BXC* = 20.
Het snijpunt van *MN* en *CX* noemen we *S*.
Dan zijn *CAX* en *CBX* uitvergrotingen van *CMS* en *CNS* met factor 2, dus:
oppervlakte *CMS* = $\frac{1}{4}$ · oppervlakte *CAX* = 10
en oppervlakte *CNS* = $\frac{1}{4}$ · oppervlakte *CBX* = 5
oppervlakte *AXSM* = 30 en
oppervlakte *XBNS* = 15.

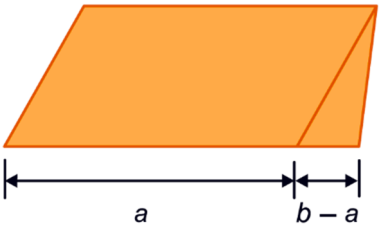
19 Als je *AB* als basis neemt, dan hebben de driehoeken *ABD* en *ABC* dezelfde hoogte, dus dezelfde oppervlakte. Als je van beide driehoek *ABS* weglaat, krijg je weer twee figuren met dezelfde oppervlakte.

20 Oppervlakte vierhoek is $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$ cm^2.

21 a De oppervlakte van de:

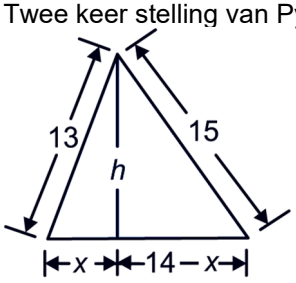


linker driehoek is $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h$ en van de rechter $\frac{1}{2} \cdot b \cdot h$.
b De oppervlakte van het parallellogram is $a \cdot h$ en van de driehoek $\frac{1}{2} \cdot (b - a) \cdot h$.



c $\frac{1}{2} \cdot (b - a) \cdot h + a \cdot h =$
$\frac{1}{2}bh - \frac{1}{2}ah + ah =$
$\frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}ah$
d In formulevorm zegt Joris: oppervlakte trapezium is: $\frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$. Als je in deze formule de haakjes wegwerkt krijg je weer: $\frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh$.

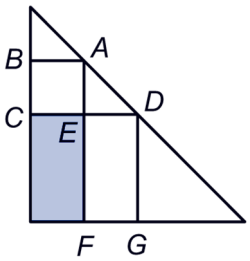
22 Twee keer stelling van Pythagoras:



$h^2 = 13^2 - x^2$ en $h^2 = 15^2 - (14 - x)^2$
Dus: $13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$
$169 - x^2 = 225 - (196 - 28x + x^2)$
$169 - x^2 = 225 - 196 + 28x + x^2$
$140 = 28x$
$x = 5$, dus $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$
Oppervlakte driehoek is $\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 12 = 84$.

29 a Omtrek is $2a$.

b De rechthoek en het vierkant hebben het grijze deel gemeen. Het restant van de rechthoek *ABCD* heeft een kleinere oppervlakte dan het restant van het vierkant *DEFG*, want *AE* = *ED*.

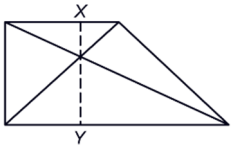


(driehoek *AED* is gelijkbenig: 45-45-90-graden driehoek) en *CE* is kleiner dan *EF* (want *EF* = *CD*).

21.7 EXTRA OPGAVEN

1 Noem het vierde hoekpunt *D* en noem *AB* = *x*, dan *BC* = 27 – *x*.
Oppervlakte *ABCD* = (27 – *x*)·8, maar ook: oppervlakte *ABCD* = *x* · 10
Dus:
$10x = (27 - x) \cdot 8$
$10x = 216 - 8x$
$18x = 216$
$x = 12$
Dus *x* = *AB* = 12 m en *BC* = 27 – 12 = 15 m.

2 Zie plaatje voor letters. Driehoek *DCS* is gelijkvormig met driehoek *BSA*, vergrotingsfactor = 2. Dus *SY* = 2·*SX*, dus *SX* = 1 en *SY* = 2.



opp. driehoek *DCS*: $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = 1\frac{1}{2}$

opp. driehoek *ASB*: $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6$

opp. driehoek *ACS*: $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - 1\frac{1}{2} = 3$

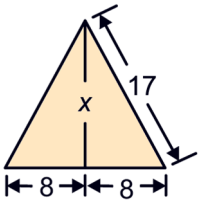
opp. driehoek *BSC*:
$\frac{1}{2} \cdot (3 + 6) \cdot 3 - 1\frac{1}{2} - 6 - 3 = 3$

3 a Als je voor beide parallellogrammen als basis *CD* neemt, dan hebben ze dezelfde hoogte.

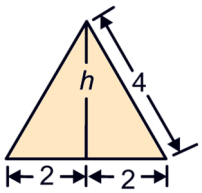
b Als je bij beide driehoek *GEF* weghaalt houdt je twee trapezia met dezelfde oppervlakte over.

4 1, 3 en 5 samen hebben dezelfde oppervlakte als 2, 4 en 6 samen. (beide de helft van een rechthoek). Verder hebben 5 en 6 dezelfde oppervlakte evenals 3 en 4 (zelfde argument).

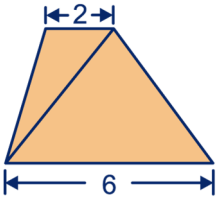
5 Noem de hoogte van de driehoek: *x*.
$x = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$
Oppervlakte driehoek is
$\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 15 = 120$.



6 Noem de hoogte van de driehoek: *h*.
$h = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$
Oppervlakte driehoek is
$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{12} = 2\sqrt{12}$

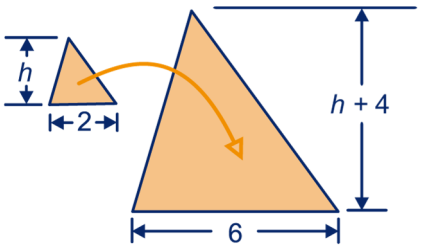


7 Verdeel het trapezium in twee driehoeken.



De kleine driehoek heeft oppervlakte
$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$ en de grote heeft oppervlakte
$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$.
De oppervlakte van het trapezium is
4 + 12 = 16.

8 a De vergrotingsfactor is 3, (vergelijk de zijden van 2 en 6), de hoogte van de grote driehoek is dus 3 keer de hoogte van de kleine.



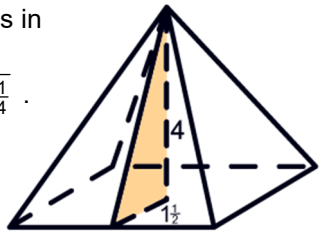
dus: $3h = h + 4$

b Dus $2h = 4 \Leftrightarrow h = 2$, dus de kleine driehoek heeft oppervlakte 2

c De oppervlakte van de grote driehoek is 9 keer de oppervlakte van de kleine, dus 18. De oppervlakte van het trapezium is dus 16.

9 Neem aan dat de kleine driehoek hoogte *h* heeft, dan heeft de grote driehoek hoogte
$\frac{20}{12} \cdot h = 1\frac{2}{3}h$, dus $2\frac{2}{3}h = 4$, dus $h = 1\frac{1}{2}$.
De kleine driehoek heeft oppervlakte
$\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 12 = 9$ en de grote $\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 20 = 25$.

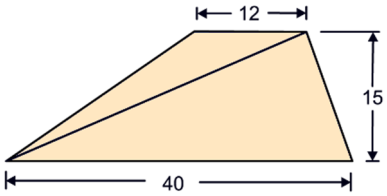
10 Stelling van Pythagoras in de oker driehoek:
$h = \sqrt{(1\frac{1}{2})^2 + 4^2} = \sqrt{18\frac{1}{4}}$.
Een zijkant heeft oppervlakte
$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{18\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{18\frac{1}{4}}$.



Totaal is er $4 \cdot 1\frac{1}{2}\sqrt{18\frac{1}{4}} + 3 \cdot 3 = 6\sqrt{18\frac{1}{4}} + 9$ dm^2 karton nodig.

11 a De zijde evenwijdig met die van 40 is 12. De diagonalen in het linker en rechter zijvlak van de balk zijn $\sqrt{12^2+9^2}=15$.
De andere zijden van het trapezium zijn $\sqrt{15^2+20^2}=25$ en $\sqrt{15^2+8^2}=17$.

b Oppervlakte trapezium is
$\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 15+\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 15=390$.

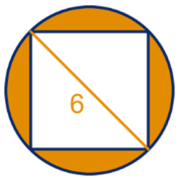


12 De driehoeken 1 en 2 samen zijn $\frac{2}{6}$ van driehoek *ABC*, dus samen 16.
Driehoek 1 is $\frac{1}{4}\cdot 16=4$ en driehoek 2 is $\frac{3}{4}\cdot 16=12$.
Driehoek 3 en 4 zijn samen 32.
Driehoek 3 is $\frac{3}{4}\cdot 32=24$ en driehoek 4 is 8.

13 Linksboven: 12 rechtsboven: 24
Linksmidden; 9 rechtsonder: 9
Linksonder: 18

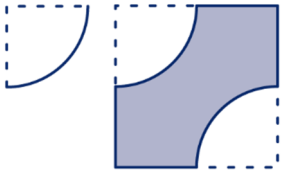
14 $CD = 2 \cdot 84 : 14 = 12$
$BD=\sqrt{15^2-12^2}=9$, $AD = 14 - 9 = 5$
$AC=\sqrt{5^2+12^2}=13$

15 De oppervlakte van het witte vierkant is het halve product van de diagonalen is $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6=18$.
De oppervlakte van het gekleurde deel is:
$\pi\cdot 3^2-6^2:2=9\pi-18=10{,}3$.

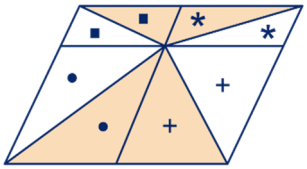


16 De oppervlakte van het parallellogram is $25 \cdot 30 = 750$.
Noem de lengte van die zijde x, dan:
$x \cdot 20 = 750$, dus $x = 37\frac{1}{2}$.

17 Oppervlakte kwartcirkel is $\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2=\pi$.
Oppervlakte figuur is $4^2-2\pi=9{,}72$ cm².

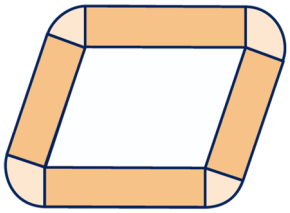


18 Zie plaatje:



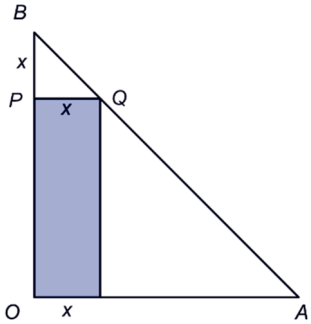
driehoeken met gelijke tekens hebben gelijke oppervlakte.

19 De vier rechthoekige stukken hebben oppervlakte
$2\cdot 4\cdot 1+2\cdot 5\cdot 1=18$
De vier lichte stukken vormen samen een cirkel met straal 1, dus oppervlakte = π.
De oppervlakte van de strook is dus 18 + π cm².



20 a Omdat $BP = PQ = x$, geldt: $OP = a - x$.

b Als je in beide vormen de haakjes wegwerkt, krijg je in beide gevallen: $ax - x^2$.



c $-(x-\frac{1}{2}a)^2+\frac{1}{4}a^2$ is voor elke x groter of gelijk aan $\frac{1}{4}a^2$, omdat $-(x-\frac{1}{2}a)^2$ voor elke x kleiner of gelijk aan 0 is (vanwege het kwadraat). Die minimale waarde $\frac{1}{4}a^2$ kun je krijgen als $(x-\frac{1}{2}a)^2=0$ en dat is als $x=\frac{1}{2}a$.