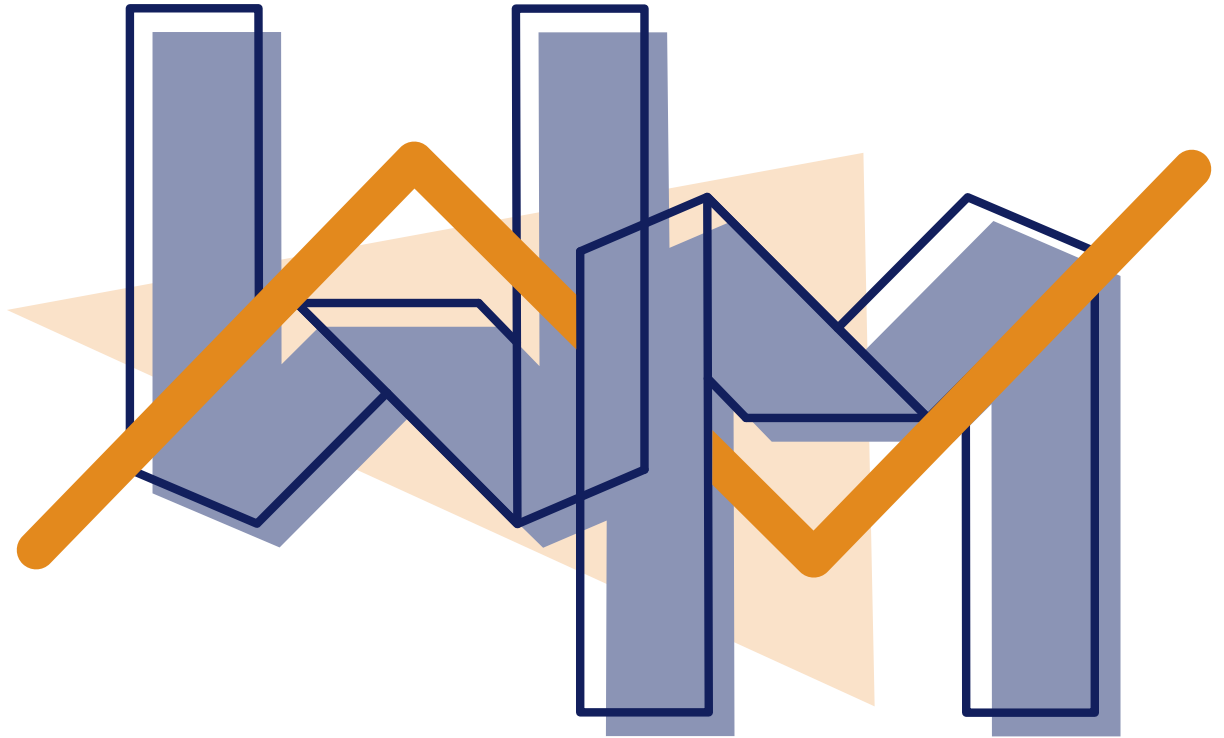
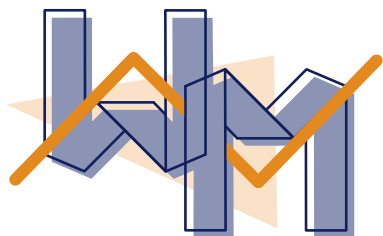




vwo wiskunde d
Conflictlijnen

de **Wageningse**
Methode



Copyright	© 2020 Stichting de Wageningse Methode
Auteurs	Leon van den Broek †, Ton Geurtz, Maris van Haandel, Erik van Haren, Dolf van den Hombergh, Peter Kop, Henk Reuling, Daan van Smaalen
Homepage	www.wageningse-methode.nl
ISBN	xxx
Illustraties	Wilson Design Uden
Distributie	Iddink Voortgezet Onderwijs BV, Postbus 14, 6710 BA Ede

Niets uit deze uitgave mag verveelvuldigd en/of openbaar gemaakt worden door middel van druk, fotokopie, microfilm of op elke andere wijze ook, zonder voorafgaande toestemming van de houder van het copyright.

Inhoudsopgave

10	Conflictlijnen	5
10.1	Gelijke afstand	6
10.2	Naastebuurpleincipe	14
10.3	Ellips, hyperbool, meer parabool	25
10.4	Anders bekeken	31
10.5	De raaklijneigenschap	37
10.6	Gemengde opgaven	44
10.7	Eindpunt	49
10.8	Extra opgaven	54
10.9	Computerpracticum	57
	Antwoorden	61
10	Conflictlijnen	61
	Hints	91
10	Conflictlijnen	91
	Index	92

Dit hoofdstuk behandelt het onderwerp Conflictlijnen.

Het is onderdeel van het vak 456 vwo wiskunde d.

Het onderwerp heeft meetkundige en analytische kanten.

Je leert onder andere parabolen van een andere kant kennen. De laatste paragraaf doe je op de computer.

Het is handig maar niet noodzakelijk als je hoofdstuk 4 Hoeken en bogen eerst gedaan hebt.

In dit boek worden iconen gebruikt. De blauwe iconen geven de structuur van een paragraaf aan. Hierdoor zie je direct waar bijvoorbeeld een stuk theorie wordt behandeld of waar een historische wetenswaardigheid de revue passeert. De groene iconen vertellen je iets over een specifieke opgave, bijvoorbeeld dat de opgave lastig is of dat er een werkblad bij de opgave hoort. Een overzicht van de gebruikte iconen vind je op de volgende pagina.

Tijdens het ontwikkelen van dit boek is op 8 december 2013 geheel onverwacht onze zeer gewaardeerde vriend Leon van den Broek overleden. Leon zette zich op ongekende wijze in voor motiverend en activerend wiskundeonderwijs. Hij was wars van het aanleren van onbegrepen routines. Leon wilde dat leerlingen de schoonheid van wiskunde gingen zien en beleven — wiskunde als een onuitputtelijke bron van interessante onderwerpen en prachtige problemen. Actief met wiskunde bezig zijn — zelf ontdekken en inzichtelijk leren — stond daarbij voor Leon centraal. Het was zijn overtuiging dat wiskunde op die manier een goed te begrijpen vak wordt en dat het leerproces dat de leerlingen doormaken hen blijvend vormt.



Het wegvallen van Leon betekent een zeer groot gemis voor de Wageningse Methode: hij was de geestelijk vader en drijvende kracht. We zijn Leon zeer dankbaar voor zijn uitzonderlijke inzet voor de Wageningse Methode en het wiskundeonderwijs. We zullen zijn creativiteit, gedrevenheid, idealisme en inspiratie enorm missen.

De auteurs van de Wageningse Methode

Deze versie is van 13 juni 2019.

Overzicht iconen . . .



Theorie

Hier wordt iets benadrukt, samengevat of nader toegelicht. Lees de theorie goed door en stel vragen als je iets niet begrijpt. Theorie die je moet kennen, staat in rode letters. Belangrijke woorden zijn vetgedrukt. Je vindt deze woorden terug in de index achterin het boek.



Voorbeeld

In een voorbeeld zie je hoe de theorie gebruikt wordt om een vraag op te lossen. Zorg dat je het voorbeeld kunt volgen en stel vragen als je het voorbeeld niet begrijpt.



Opmerking

Let op, er wordt iets opmerkelijks behandeld of je wordt ergens op geattendeerd. Een opmerking bestudeer je aandachtig, maar hoeft je niet te leren.



Historie

Hier vind je historische feiten en wetenswaardigheden.



Werkblad

Bij deze opgaven hoort een werkblad. Je vindt het werkblad op de site www.wageningse-methode.nl.



Computer

Bij deze opgaven of uitleg maak je gebruik van de computer en/of de digitale versie van de Wageningse Methode.



Echt, moet kunnen

Deze opgaven zijn standaardopgaven die je zonder veel moeite op moet kunnen lossen.



Puzzelen

Bij deze opgaven moet je even puzzelen. Geef niet te snel op.



Pittig

Deze opgaven zijn wat moeilijker.



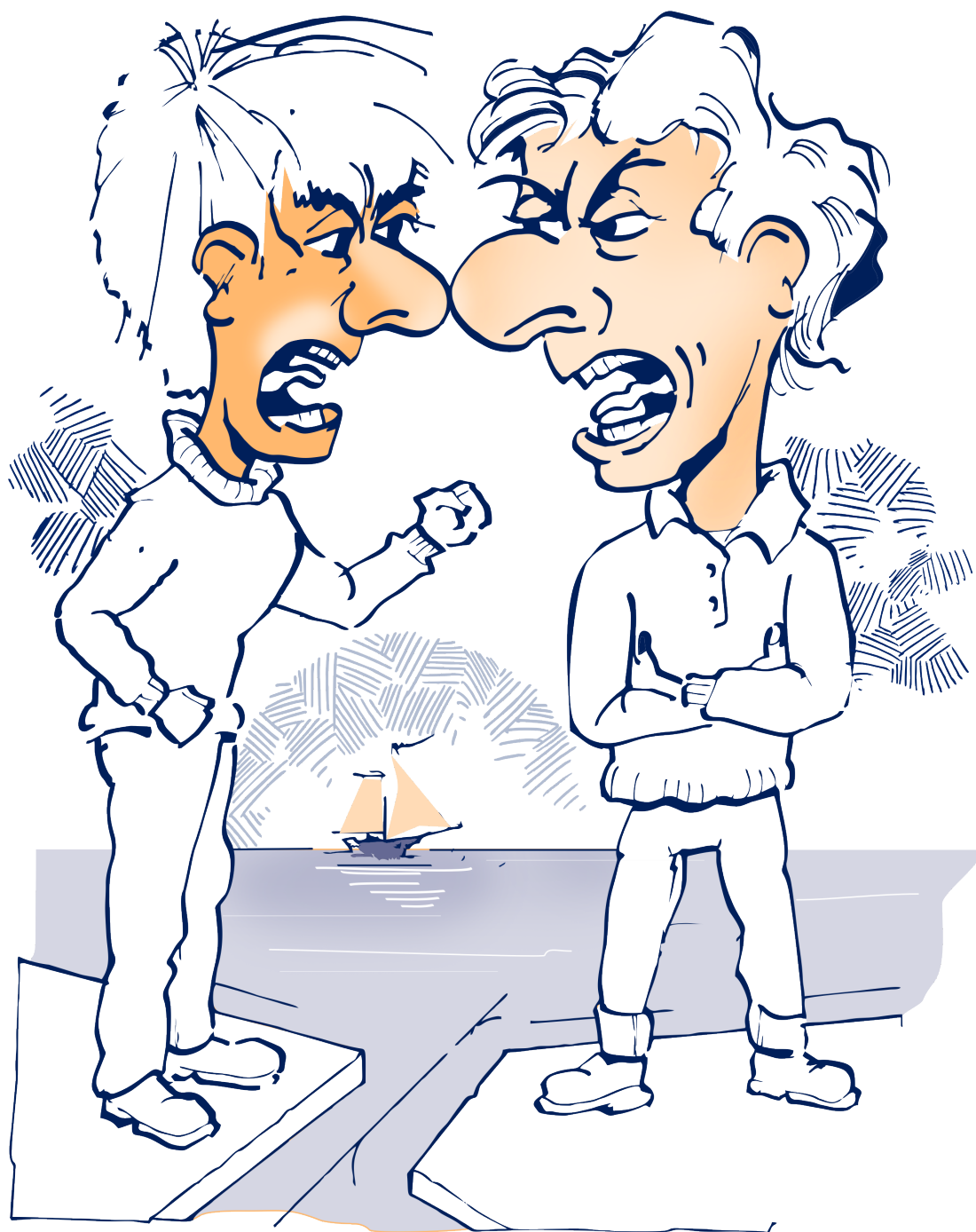
Hint

Er wordt een hint gegeven die je kan helpen bij het oplossen van de opgave. Je vindt de hints achterin het boek.



Facultatief

Deze opgaven/paragraaf kun je overslaan zonder de draad kwijt te raken.



10.1 Gelijke afstand

1

In 1961 werd bekend dat er in de bodem van de Noordzee aardgas te vinden was. Toen werd het dus van belang uit te maken welk deel van de Noordzee bij welk land hoort. In 1970 kwam hierover een verdrag tot stand. Uitgangspunt daarbij was dat elk stukje van de zeebodem hoort bij het land waar het het dichtst bij ligt.

Dat noemen we het *naastebuurprincipe*.



- a Hoe ver ligt het 'drielandenpunt' van Noorwegen, Denemarken en Groot-Brittannië van de drie landen af?
- b Ga na dat Duitsland meer heeft gekregen dan waar het volgens het naastebuurprincipe recht op had.

Anneke woont in Lobith, waar de Rijn de grens Nederland- Duitsland passeert. Ze wil een dagje gaan zwemmen in de Noordzee.

- c Hoe ver woont Anneke (hemelsbreed) van de Noordzee?
- d Hoever liggen Duitsland en Engeland van elkaar af?
- e Hoe meet je eigenlijk de afstand tussen een punt en een gebied, of tussen twee gebieden?

Afstand meet je langs een kortst recht verbindingslijnstuk.



10.1 Gelijke afstand



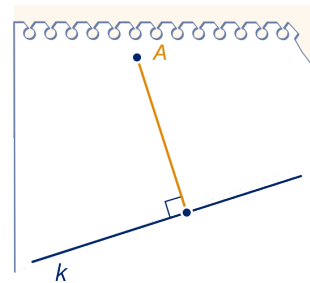
Stelling

De kortste verbinding van een punt A met een lijn k is een loodlijnstuk vanuit A op k .

Bewijs

Neem aan: de loodrechte projectie van A op k is S en P is een ander punt dan S op lijn k .

Dan is $|AS| < |AP|$ volgens de stelling van Pythagoras.



2



Bewijs de stelling met de driehoeksongelijkheid.



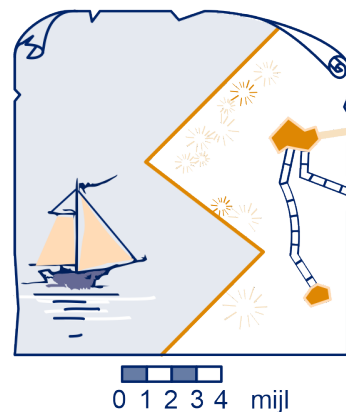
Hint 1.

Een kustlijn maakt twee scherpe hoeken: een landinwaartse en een zee-inwaartse. Het plaatje staat ook vergroot op het werkblad. De punten die op afstand 3 mijl uit de kust liggen, vormen de driemijlslijn.

- a Teken de driemijlslijn. Pas op: hij loopt bij de landinwaartse hoek heel anders dan bij de zee-inwaartse hoek.

De driemijlslijn bestaat uit drie rechte stukken en één cirkelboog.

- b Geef op het werkblad precies aan waar de cirkelboog aansluit op twee van de rechte stukken.



4



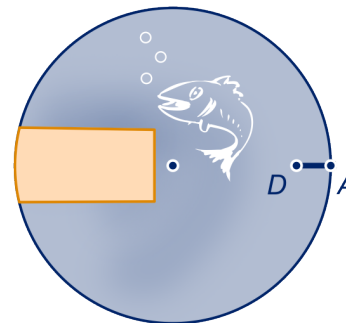
In een perfect rond meertje staat een aanlegsteiger.

Anneke vist in het meertje op forel. Ze kan elke plek aan de rand van de vijver en op de steiger kiezen. In de figuur zie je Anneke op een bepaalde plaats A staan. Als ze haar hengel zo ver mogelijk over de vijver steekt, komt de dobber op plek D .

- a Kleur op het werkblad het gebied waar de forellen geen gevaar lopen door Anneke te worden verschalkt.

De diameter van het meertje is 18 meter. De steiger is 4 meter breed en is in het midden 8 meter lang.

- b Hoe lang moet Annekes hengel minstens zijn, opdat de vissen alleen nog maar onder de steiger veilig zijn?



Gegeven is een gebied.

De punten die buiten het gebied liggen, op afstand x van de rand van het gebied, vormen de zogenaamde **iso- x -afstandslijn**.

10.1 Gelijke afstand

5

- Hoe lang is de iso- x -afstandslijn bij een cirkelvormig gebied met straal 2 (uitdrukken in x)?
- Hoe lang is de iso- x -afstandslijn bij een driehoek met zijden 3, 4 en 5?
- Hoe lang is de iso- x -afstandslijn bij een rechthoek met zijden 2 en 5?

Een vierhoekig gebied heeft zijden van 2, 3, 4 en 5 en heeft geen inspringende hoeken.

- Hoe lang is de iso- x -afstandslijn? Leg uit dat je daarvoor niet de vorm van het gebied hoeft te weten.

6

Dezelfde vragen als bij opgave 5, maar nu voor de oppervlakte van de zone tussen de iso- x -afstandslijn en het gebied.

7



We bekijken een land met een V-vormige inham. De vier stukken kustlijn zijn allemaal recht. Bij het plaatje is een schaalstok getekend. De inham is een gelijkzijdige driehoek met zijde 4.

- Teken op het werkblad in zee de iso-1-afstandslijn, de iso-2-afstandslijn en de iso-3-afstandslijn. Geef nauwkeurig aan waar de rechte stukken op de cirkelbogen aansluiten.

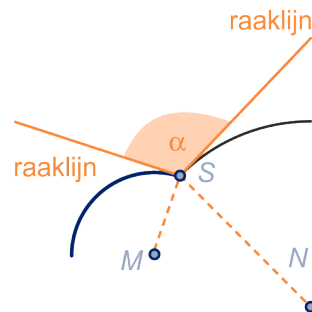
De iso-1-afstandslijn en de iso-2-afstandslijn bestaan uit twee cirkelbogen en vier rechte stukken.

De iso-3-afstandslijn bestaat uit twee cirkelbogen en twee rechte stukken.

- Bereken exact de kleinste waarde van x , waarvoor de iso- x -afstandslijn uit twee cirkelbogen en twee rechte stukken bestaat.

In de vorige opgave maken de cirkelbogen van de iso-3-afstandslijn een stompe hoek met elkaar.

Laat S een gemeenschappelijk punt zijn van twee cirkels. Bekijk op beide cirkels een boog met eindpunt S . Onder de **hoek** die deze **cirkelbogen** met elkaar maken, verstaan we de hoek die de bijbehorende halve raaklijnen met elkaar maken, in de figuur α .



Opmerking

In de figuur zijn de middelpunten van de cirkelbogen M en N . Omdat de halve raaklijnen loodrecht op de lijnen MS en NS staan geldt:

$$\alpha + \angle MSN = 180^\circ.$$

10.1 Gelijke afstand

8

Twee even grote cirkels gaan door elkaars middelpunt.

- a Hoe groot zijn de hoeken die ze maken?
- b Hoe groot zijn de hoeken die twee rakende cirkels met elkaar maken?

Het zal duidelijk zijn wat we verstaan onder de hoeken die een lijn met een cirkel maakt.

9

Een lijn snijdt een cirkel met straal 1 onder hoeken van 45° (en van 135°).

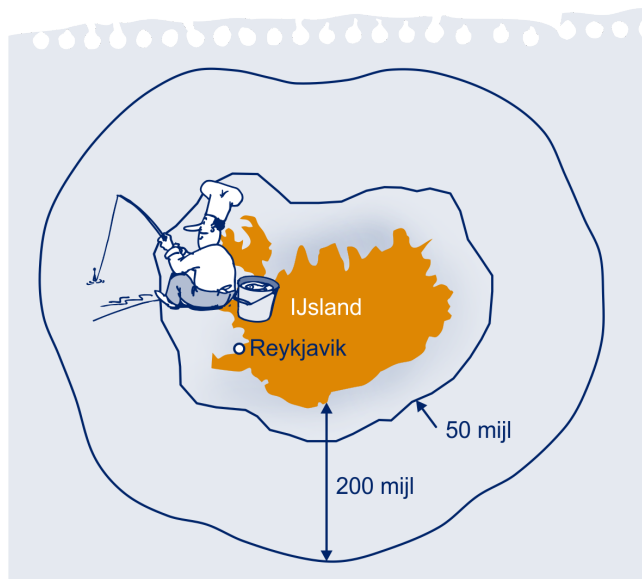
- a Hoe lang is het stuk van de lijn dat binnen de cirkel ligt?
- b Onder welke hoeken snijdt een lijn door het middelpunt een cirkel?

10

Bekijk opnieuw de cirkelbogen van de iso-3-afstandlijn van opgave 7.

- a Bereken de hoek die de cirkelbogen met elkaar maken in graden nauwkeurig.
- b Toon aan dat de twee cirkelbogen van de iso-4-afstandlijn elkaar onder een hoek van 120° ontmoeten.
- c Bereken voor welke x de twee cirkelbogen van de iso= x -afstandlijn elkaar ontmoeten onder een hoek van 170° . Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.
- d Is er een waarde van x , zo dat de iso- x -afstandlijn geen knik meer heeft?

Je ziet dat, hoe verder de iso-afstandlijn van de kust ligt, hoe kleiner de invloed van de inham op de vorm van de iso-afstandlijn wordt. Maar de invloed zal nooit helemaal verdwijnen. Dit wordt ook fraai geïllustreerd door de isoafstandslijnen om IJsland.



10.1 Gelijke afstand

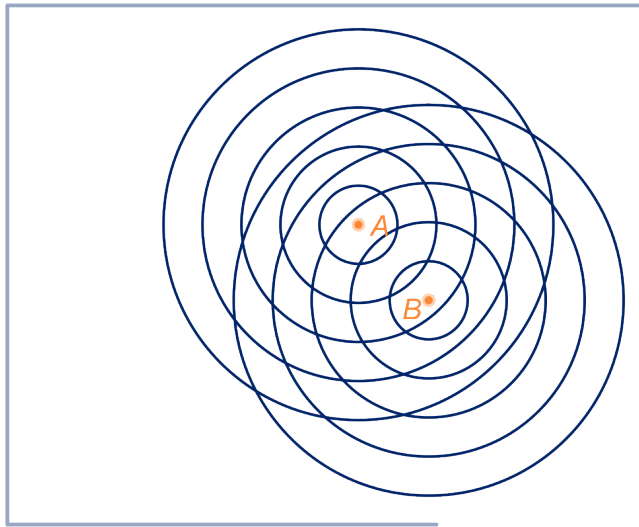
In de jaren '70 waren Engeland en IJsland in een visserijconflict verwickeld. Internationaal is vastgelegd dat een zone van 50 mijl voor de kust tot het territorium van het land behoort. IJsland had eigenmachtig die zone vergroot tot 200 mijl om zich te verzekeren van ruimere visgronden. Dit ging ten koste van Britse vissers; vandaar het conflict.

Uit: Pythagoras nr 5, april 1976

11



Gegeven zijn twee punten: A en B . De isoafstandslijnen van A zijn cirkels; zo ook van B . Die zijn hieronder getekend.

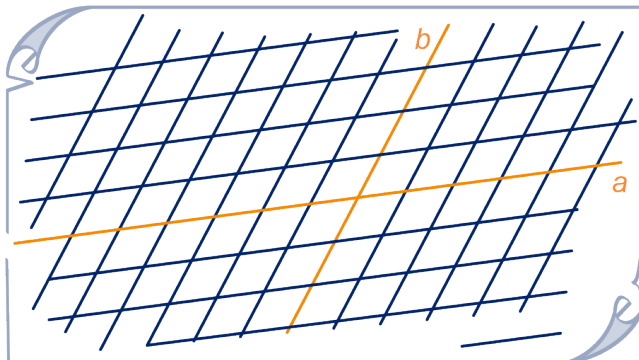


- a Hoe vind je in dit plaatje punten die even ver van A als van B af liggen?
- b Teken op het werkblad alle punten die even ver van A als van B af liggen.
Weet je een naam voor de verzameling van deze punten?

12



Gegeven zijn twee snijdende lijnen: a en b . De isoafstandslijnen van a zijn paren lijnen; zo ook van b . Die zijn hieronder getekend.



10.1 Gelijke afstand

- Hoe vind je in dit plaatje punten die even ver van a als van b af liggen?
- Teken op het werkblad alle punten die even ver van a als van b af liggen?
Weet je een naam voor de verzameling van deze punten?



De verzameling punten die even ver van twee punten A en B liggen, is de middelloodlijn van lijnstuk AB .

De verzameling punten die even ver van twee snijdende lijnen a en b aflaggen, is het tweetal bissectrices of deellijnen van de hoeken die a en b met elkaar maken. Deze staan loodrecht op elkaar.

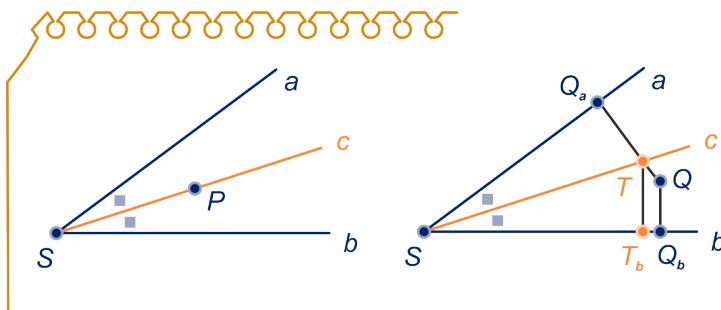
De eerste bewering hebben we onder andere in hoofdstuk 4 Hoeken en Bogen gezien.

Daar is ook bewezen dat een punt op een van de bissectrices even ver van a als van b liggen. Maar dan ben je nog niet klaar! Je moet ook nog het omgekeerde bewijzen: als een punt niet op een bissectrice ligt, dan ligt het niet even ver van a als van b .

13

In de figuur hieronder links zijn getekend de halve lijnen a en b met beginpunt S en de halve lijn c die de hoek tussen a en b middendoor deelt.

P is een punt op c .



- Toon aan dat P even ver van a als van b ligt.



Hint 2.

Q in de rechter figuur ligt niet op c .

We gaan bewijzen dat Q dichterbij b dan bij a ligt.

Q_a en Q_b zijn de projecties van Q op a en b . Het snijpunt van lijn QQ_a met c is T .

De projectie van T op b is T_b .

- Verklaar waarom geldt:
 - $|TQ| + |TT_b| > |QT_b|$
 - $|TQ| + |TT_b| > |QQ_b|$
 - $|QQ_a| > |QQ_b|$.

10.1 Gelijke afstand

14

Gegeven zijn twee evenwijdige lijnen.

- a Omschrijf de verzameling punten die op gelijke afstand van de lijnen liggen,

Gegeven zijn twee cirkels met dezelfde straal die elkaar niet snijden.

- b Omschrijf de verzameling punten die op gelijke afstand van de cirkels liggen.



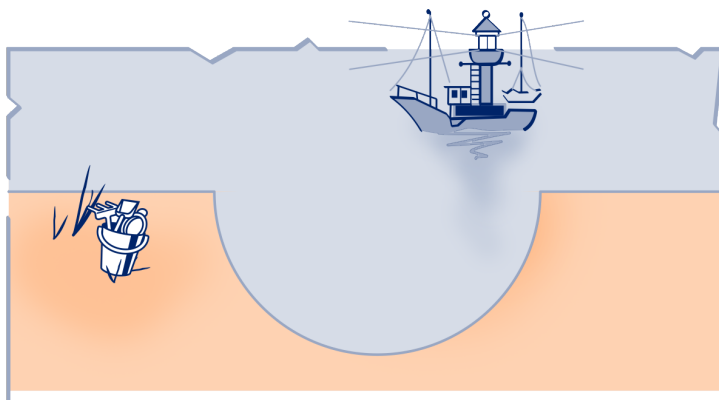
15

Gegeven zijn twee gebieden V en W . De punten die even ver van beide gebieden afliggen noemen de **conflictlijn** van V en W .

Voorbeeld

De conflictlijn van twee cirkelvormige gebieden met dezelfde straal r en middelpunten M en N is de middelloodlijn van lijnstuk MN . (We nemen aan $|MN| > 2r$.)

De kustlijn hieronder bestaat uit twee halve lijnen en een halve cirkel. De halve cirkel heeft straal 20 km. Het plaatje is getekend op schaal $1 : 10^6$.



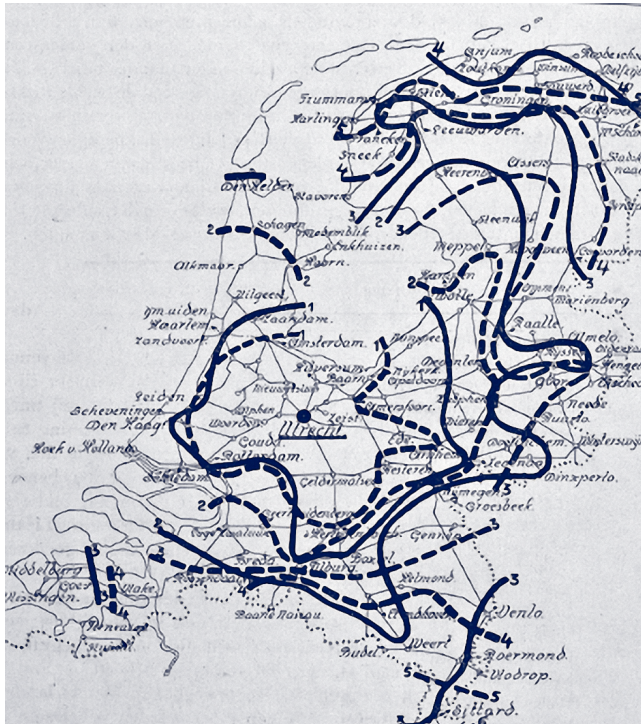
- a Neem het plaatje over en teken in zee de isoafstandslijn op 20 km uit de kust.

We bekijken bij een zeker gebied een zekere isoafstandslijn. Anneke beweert: "als de rand van het gebied geen knik heeft, heeft de isoafstandslijn ook geen knik".

- b Is dat waar? Zo ja, leg uit waarom. Zo nee, geef een voorbeeld waaruit blijkt waarom niet.

Je kunt afstanden ook in tijd meten. Op de volgende bladzijde staat een voorbeeld.

10.1 Gelijke afstand



Afstanden in 1900 en 1932 te bereiken vanuit Utrecht
in 1, 2, 3 uur enz.

Het betreft hier voorzover bekend de eerste isochronenkaart van Nederland.

Een isochronenkaart is een kaart met isolijnen, die punten verbinden die in eenzelfde reistijd vanuit een centraal punt kunnen worden bereikt. Dat centrale punt is op deze kaart Utrecht en met gebruikmaking van de dienstregelingen van 1900 en 1932 heeft men uitgerekend hoeveel tijd men nodig had om van Utrecht met de trein andere bestemmingen in het land te bereiken. Men kan bijvoorbeeld uit de kaart aflezen dat, waar men in 1900 vier uur nodig had voor de reis Utrecht-Groningen, dat in 1932 in drie uur mogelijk was.

Het is goed om te bedenken dat de kaart alleen geldt voor de bereikbaarheid van stations. Om van Groningen naar Roden te komen, ten zuidwesten van de stad, had men nog weer een uur nodig, ook al ligt Roden zuidelijk van de drie-uur lijn voor 1932.

Isochronenkaart van Nederland.

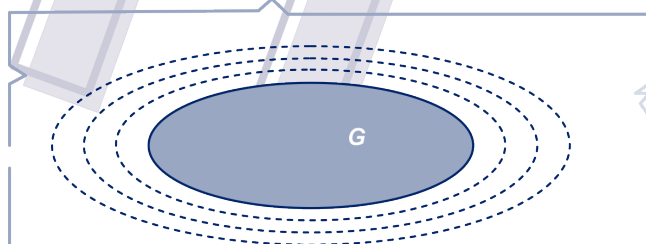
Verschenen in: Het verkeer te land. A. de spoor- en tramwegen / J.J. Stieltjes. - In: Tijdschrift van het Koninklijk Nederlandsch Aardrijkskundig Genootschap, Ser. 2, dl. 50 (1933), p. 420-478 (p. 460).

10.2 Naastebuurprincipe

16

Om een ellipsvormig gebied

We bekijken een ellipsvormig gebied G : grijs in het plaatje hieronder. Anneke tekent drie isoafstandslijnen van G door de rand van G (zowel horizontaal als verticaal) vanuit het middelpunt te vermenigvuldigen met de factoren 1,2, 1,4 en 1,6.



Geef commentaar.

17

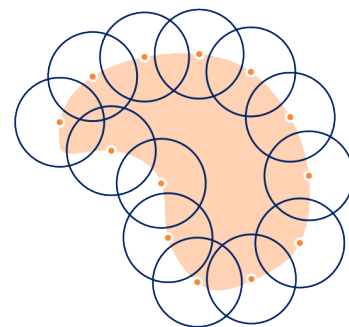


Om een willekeurig gebied

Hoe maak je wel isoafstandslijnen van een gebied? Bijvoorbeeld de 1-isoafstandslijn.

Teken cirkels met straal 1 en middelpunt op de rand van het gebied. Als je genoeg cirkels tekent, wordt de 1-isoafstandslijn goed zichtbaar: het is de omhullende van de cirkels. De cirkels vormen tezamen een zone van breedte 2 om de rand.

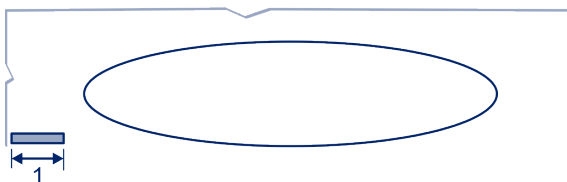
- Teken die zone zo goed mogelijk op het werkblad.
- Zijn de buiten- en binnenrand van de zone gelijkvormig?



18



Hieronder is een ellips getekend. Deze staat ook op het werkblad.



- Teken op het werkblad de "buiten-" en de "binnen-" isoafstandslijn op afstand $\frac{1}{2}$ van de ellips.
- Zijn ze gelijkvormig?
- Teken een rechthoek van 2 bij 4 cm en teken de iso-1-afstandslijn buiten en binnen de rechthoek.

Anneke zegt dat de conflictlijn tussen binnen- en buitenisoafstandslijn de rechthoek zelf is.

- Heeft Anneke gelijk?

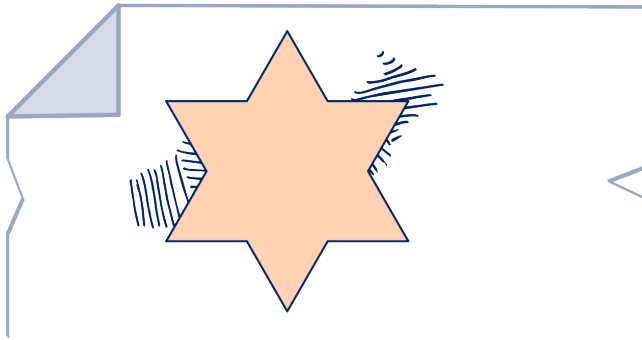
10.2 Naastebuurprincipe

19



Davidster

De zijden van de Davidster hebben allemaal lengte 2.

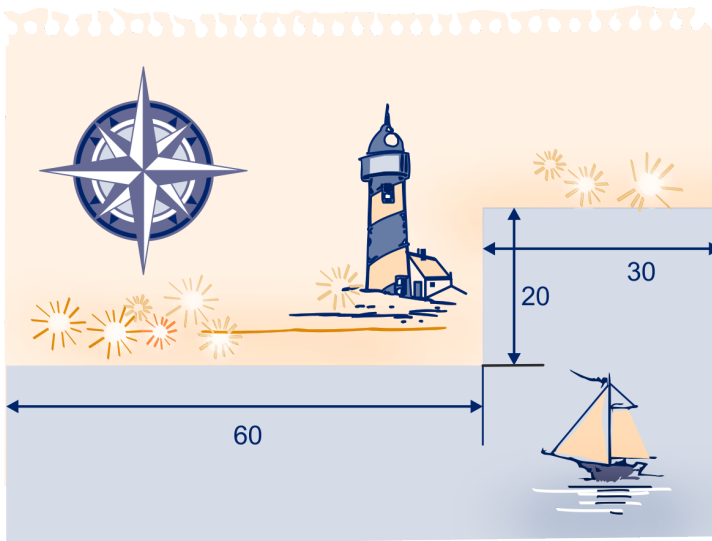


- Teken op het werkblad de isoafstandslijn buiten de ster op afstand 1.
- Bereken de exacte lengte van deze isoafstandslijn.
- Bereken exact de oppervlakte van de afstand-1-zone buiten de Davidster.

20

Twée knikken

Een kustlijn maakt twee rechte knikken. De twee oostwest- kustlijnen zijn 60 en 30 km lang, de noord-zuidkustlijn is 20 km lang; zie de tekening hieronder.



- Teken de kustlijn op schaal, maak de noord-zuidkustlijn 2 cm lang.
Teken daarin ook de twee isoafstandslijnen 10 en 20 km uit de kust,
- Bereken de exacte lengte van elk van de isoafstandslijnen.
- Bereken de exacte oppervlakte van de 10-km-zone en van de 20-km-zone (tussen kust en isoafstandslijn).

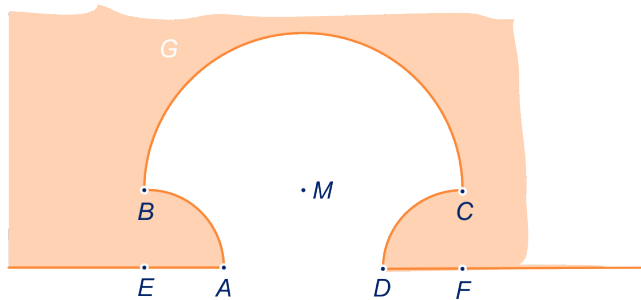
10.2 Naastebuurprincipe

21

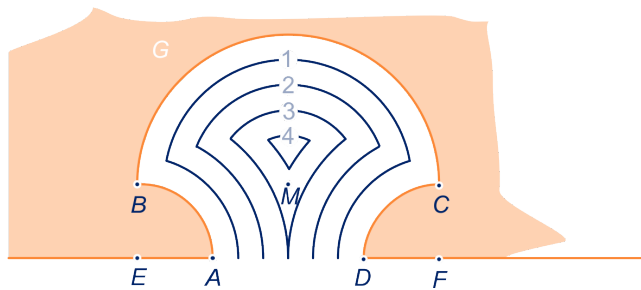


Een gebied G heeft aan een van zijn rechte zijden, EF , een inham, waarvan de rand bestaat uit drie cirkelbogen:

- boog AB is een kwartcirkel met straal 3 en middelpunt E ,
 - boog CD is een kwartcirkel met straal 3 en middelpunt F ,
 - boog BC is een halve cirkel met straal 6 en middelpunt M .
- E, A, D en F liggen op een rechte lijn.

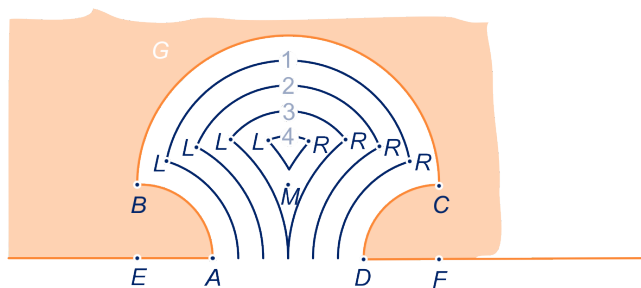


In het plaatje hieronder zijn in de inham de isoafstandslijnen getekend op de afstanden 1, 2, 3 en 4 van het land.



- a** Teken op het werkblad de isoafstandslijn waarop het punt M ligt. Licht je werkwijze toe.

Elke iso-afstandslijn bestaat uit drie cirkelbogen. Deze drie bogen sluiten op elkaar aan in de punten L (links) en R (rechts). Zie het plaatje hieronder.



Voor alle punten L geldt: $|LM| + |LE| = 9$.

- b** Toon dit aan.

CSE VWO wiskunde b12 2007 I

10.2 Naastebuurprincipe



Naastebuurprincipe

Twee landen betwisten elkaar de hun omringende wateren. Ze worden het erover eens dat een plek op zee tot dát land behoort, waar hij het dichtste bij ligt. We noemen deze verdeelregel het **naastebuurprincipe**.

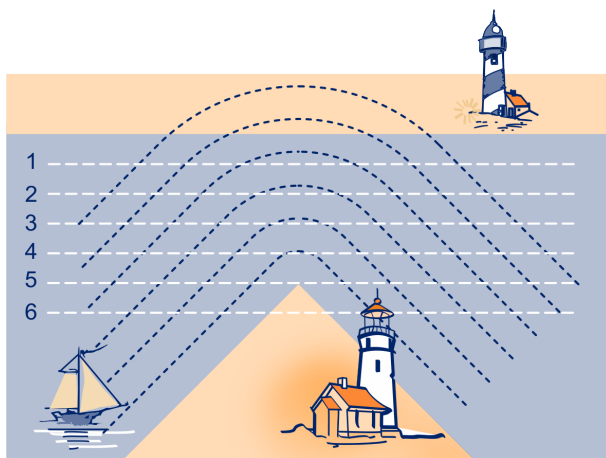
De bijbehorende grenslijn heet de **conflictlijn** tussen de twee gebieden.

Zie ook paragraaf 1.

22



Noorderland en Zuiderland verdelen de zee volgens het naastebuurprincipe.



Hierboven zijn de isoafstandslijnen van beide landen getekend op de afstanden 1, 2, 3, 4, 5 en 6 uit de kust.

De snijpunten van de overeenkomstige isoafstandslijnen liggen op de conflictlijn.

a Teken de conflictlijn op het werkblad.

De conflictlijn bestaat uit twee rechte stukken en één gebogen stuk.

b Geef nauwkeurig aan in welke punten de rechte stukken overgaan in het gebogen stuk.

c Leg uit dat de rechte stukken allebei een deel zijn van de bissectrice van een hoek. Van welke hoeken?

Als je de twee rechte stukken van de conflictlijn door trekt, gaan ze een stompe hoek maken.

d Hoe groot is die hoek, als de kustlijn van Zuiderland een rechte hoek maakt?

e En als die hoek α is?

10.2 Naastebuurprincipe

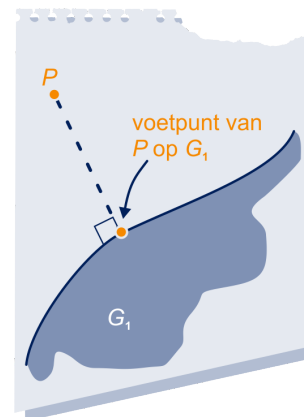


De conflictlijn van twee gebieden wordt gevormd door alle punten die gelijke afstand hebben tot beide gebieden.

Noemen we die gebieden G_1 en G_2 , dan geldt dus: punt P ligt op de conflictlijn van G_1 en G_2

$$\Leftrightarrow d(P, G_1) = d(P, G_2).$$

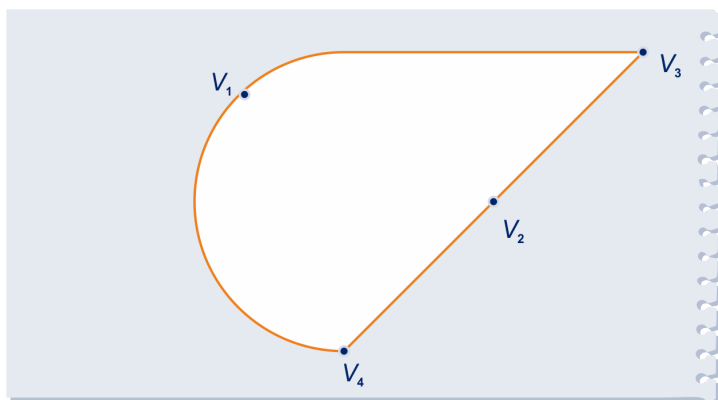
Een punt van G_1 dat het dichtst bij P ligt, noemen we een **voetpunt** van P op G_1 .



23



Hieronder is een gebied getekend. De rand bestaat uit een halve cirkel en twee lijnstukken. Op de rand zijn vier punten aangegeven: V_1 , V_2 , V_3 en V_4 .



- Geef op het werkblad met kleur alle punten aan waarvan V_1 het voetpunt is.
- Kleur ook alle punten waarvan V_2 het voetpunt is. En waarvan V_3 het voetpunt is. En waarvan V_4 het voetpunt is.

24

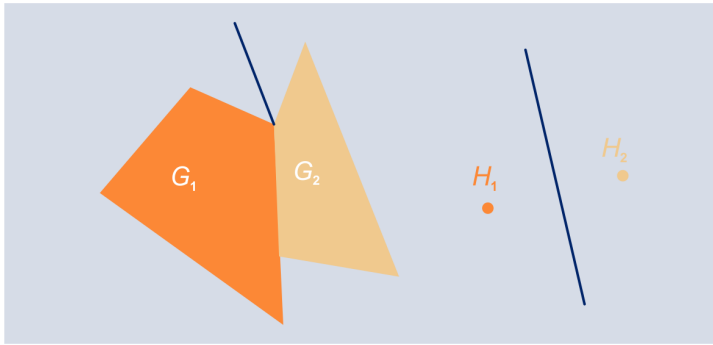
Meer dan één voetpunt

Het gebied hieronder heeft een V-vormige inham.



- Waar binnen de inham liggen de punten die twee voetpunten hebben?
- Geef een voorbeeld van een gebied en een punt dat drie voetpunten heeft op dat gebied.
- Geef een voorbeeld van een gebied en een punt dat oneindig veel voetpunten heeft op dat gebied.

10.2 Naastebuurprincipe



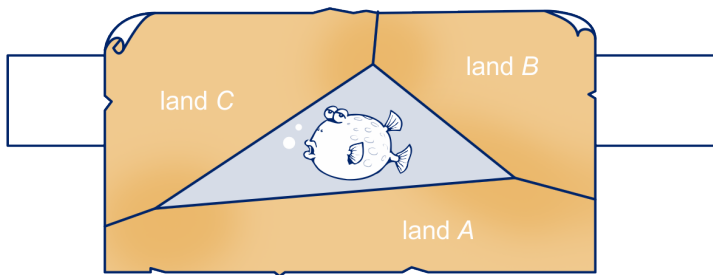
De gebieden G_1 en G_2 hebben twee rechte randen die elkaar onder een hoek α ontmoeten. Dan is conflictlijn van de twee randen van G_1 en G_2 de bissectrice van hoek α , zie figuur.

De gebieden H_1 en H_2 zijn puntvormig. Dan is de conflictlijn van H_1 en H_2 de middelloodlijn van lijnstuk H_1H_2 , zie figuur.

25



Drie landen grenzen aan een binnenzee.



De kustlijnen zijn recht. Welk deel van de zee behoort tot welk land?

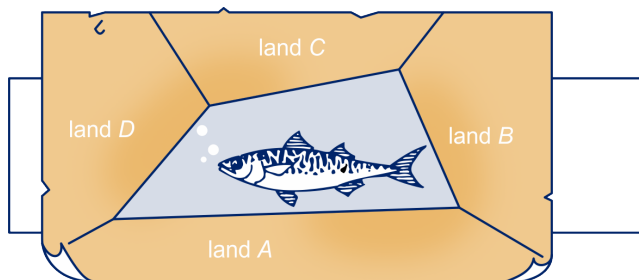
De landen gaan een verdrag sluiten waarin dat wordt geregeld. Ze verdelen de binnenzee volgens het naastebuurprincipe.

- Verdeel de binnenzee op het werkblad.
- Wat is de wiskundige naam voor de conflictlijnen?
Waarom is het zeker dat er een 'drielandenpunt' is?
- Wat weet je van de drie afstanden van het drielandenpunt tot de drie kustlijnen?

26



Vier landen grenzen aan een binnenzee. Ze verdelen de binnenzee volgens het naastebuurprincipe.



10.2 Naastebuurprincipe

- a Verdeel de binnenzee op het werkblad.

Er zijn twee drielandenpunten: van A , D en C en van A , B en C . Het verbindingslijnstuk van deze drielandenpunten is grenslijn tussen A 's deel en C 's deel van de binnenzee.

Het is een stuk van de bissectrice van de hoek die de kusten van land A en land C met elkaar maken.

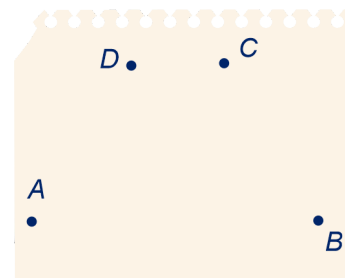
- b Waarom is dat zo?

27



Vier centra A , B , C en D verdelen het land volgens het naastebuurprincipe. $ABCD$ is een gelijkbenig trapezium, heeft dus een symmetrieas. Verder $\angle DAB = 59^\circ$.

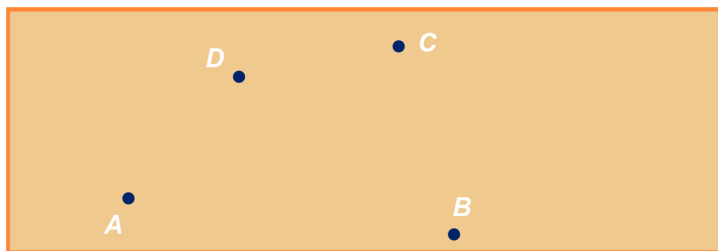
- a Bepaal op het werkblad de delen van elk land.
b Waarom is er een 'vierlandenpunt'?
c Bereken de hoeken die de grenzen in het vierlandenpunt met elkaar maken.



28



Vier centra verdelen het land volgens het naastebuurprincipe.



Bepaal op het werkblad de delen van elk land. Gebruik kleur.

29



In een cirkelvormig meer liggen twee eilandjes, M en F .

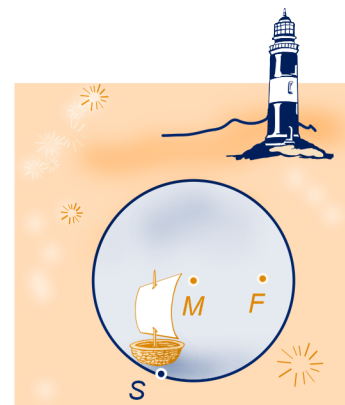
We beschouwen de eilandjes als punten. M ligt precies in het midden van het meer.

S is een punt aan de rand van het meer. Een bootje start in S en vaart in een rechte lijn naar M .

- a Teken op het werkblad het punt P op de route van het bootje waar het bootje even ver van punt S verwijderd is als van F . Licht je werkwijze toe.

Een ander bootje start in een punt aan de rand van het meer en vaart ook in een rechte lijn naar M . Halverwege is de afstand van het bootje tot het land even groot als de afstand van het bootje tot beide eilandjes.

- b Teken op het werkblad de punten aan de rand van het meer van waaruit het bootje vertrokken kan zijn. Licht je werkwijze toe.



CSE VWO wiskunde b12, 2001 I

10.2 Naastebuurprincipe

We kennen de conflictlijn tussen twee lijnen en tussen twee punten. We gaan nu onderzoeken hoe de conflictlijn tussen een punt en een lijn eruit ziet. En ook de conflictlijn tussen een punt en een cirkel.

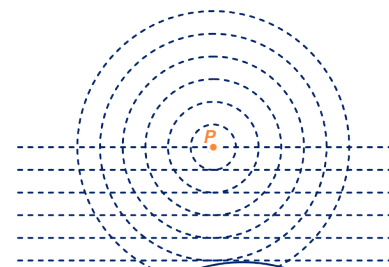
30



Tussen punt en lijn

Hiernaast en op het werkblad staat een lijn k en een punt P . Gevraagd wordt de conflictlijn tussen k en P : de verzameling punten op gelijke afstand van k en P . Daartoe tekenen we isoafstandslijnen van k en P .

Teken op het werkblad de conflictlijn zo goed mogelijk.



31

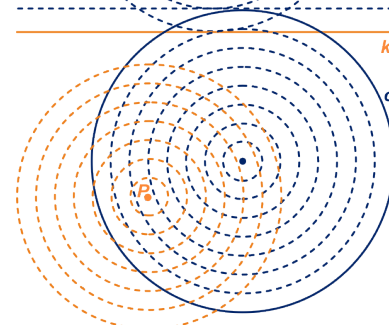


Tussen punt en cirkel 1

Hiernaast en op het werkblad staat een cirkel c en een punt P daarbinnen. Gevraagd wordt de conflictlijn tussen c en P : de verzameling punten op gelijke afstand van c en P .

Daartoe tekenen we isoafstandslijnen van P en c .

Teken op het werkblad de conflictlijn zo goed mogelijk.



32



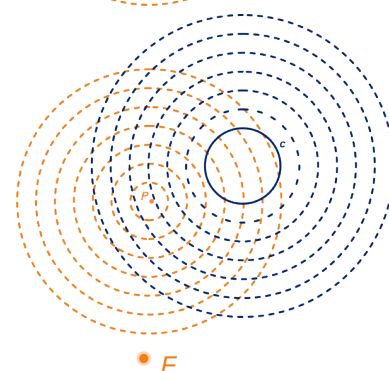
Tussen punt en cirkel 2

Hiernaast en op het werkblad staat een cirkel c en een punt P daarbuiten.

Gevraagd wordt de conflictlijn tussen c en P : de verzameling punten op gelijke afstand van c en P .

Daartoe tekenen we isoafstandslijnen van c en P .

Teken op het werkblad de conflictlijn zo goed mogelijk.



Definitie

Gegeven zijn een punt F en een lijn r ; F ligt niet op r .

De conflictlijn tussen F en r heet een **parabool**.

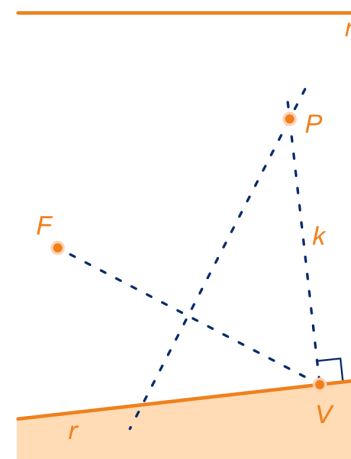
Het punt F heet het **brandpunt** van de parabool en de lijn r heet de **richtlijn** van de parabool.

Een punt P ligt op de parabool met brandpunt F en richtlijn r als $d(P, F) = d(P, r)$.

Als je een punt P hebt, kun je zijn voetpunt V op r bepalen. Omdat $|PF| = |PV|$, ligt P op de middelloodlijn van lijnstuk FV .

Omgekeerd kun je uitgaande van een voetpunt V op r het bijbehorende punt P op de parabool bepalen. Als volgt.

- Richt de loodlijn k in V op r op.
- Teken de middelloodlijn van lijnstuk FV .



10.2 Naastebuurtprincipe

33

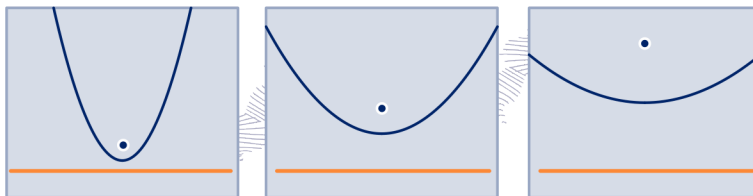
De constructie van een parabool vanuit voetpunten

- Teken een lijn r en een punt F op afstand 1 cm van r . Kies vijf voetpunten op r en voer bovenstaande constructie met elk van deze voetpunten uit. Schets daarna de parabool met F als brandpunt en r als richtlijn.
- Dezelfde opdracht, maar nu met F op afstand 3 cm van r .

Het is duidelijk dat de parabool een **symmetrieas** heeft en een **top** (dat is het punt dat het dichtst bij de richtlijn ligt). Elke parabool wordt op dezelfde manier geconstrueerd. Het enige verschil is de afstand tussen brandpunt en richtlijn. Maar dat is een kwestie van schaal. Dus alle parabolen zijn gelijkvormig.

Alle parabolen zijn gelijkvormig.

Hieronder staan drie parabolen met hun brandpunten en richtlijnen. De plaatjes zijn zeker niet gelijkvormig.



- Teken op het werkblad in elk van de drie plaatjes een rechthoek zoals hiernaast: de onderkant ligt op de richtlijn, het brandpunt is het midden van de bovenkant en twee hoekpunten liggen op de parabool.
- Wat is de verhouding van de zijden van de rechthoeken? Waarom?



De stukjes parabool binnen de rechthoeken zien er wel gelijkvormig uit!

P en Q zijn punten van een parabool met richtlijn r .

- Bepaal op het werkblad de twee mogelijke plaatsen van het brandpunt.
- Schets beide parabolen.

$P \bullet$

$Q \bullet$

r



34



35



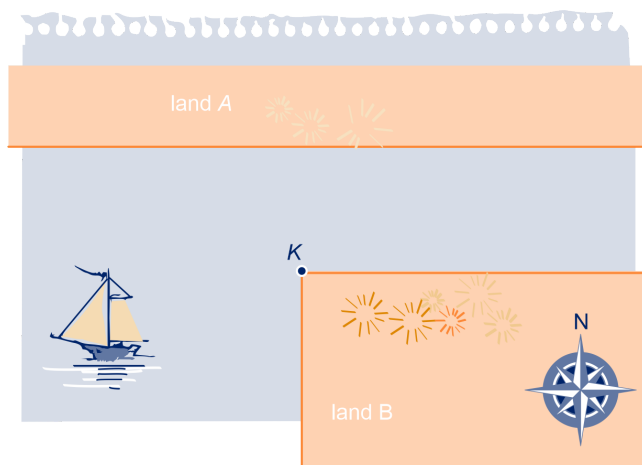
10.2 Naastebuurprincipe

36



Betwist gebied

Twee landen A en B worden gescheiden door een zee. De kustlijn van A loopt west-oost. De kustlijn van B maakt bij kaap K een hoek van 90° ; een deel van de kustlijn loopt noord-zuid en een deel west-oost. De afstand tussen de kustlijnen die west-oost lopen is 40 km; zie figuur.



Beide landen maken aanspraak op een deel van de zee. Ze vinden beide dat de strook tot 30 km uit de kust hen toebehoort. Een deel van de zee blijft dus betwist gebied.

a Kleur op het werkblad het betwiste gebied.

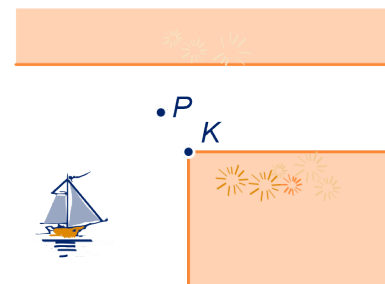
De zee zou verdeeld kunnen worden volgens het naastebuurprincipe.

b Teken op het werkblad de bijbehorende grenslijn.
Licht je werkwijze toe.

Hiernaast is een punt P getekend van de grenslijn bij verdeling volgens het naaste-buurprincipe. Het betwiste gebied heeft een noordrand en een zuidrand.

c Toon aan dat P even ver van beide randen aflight.

CSE wiskunde b12 2005 I



37

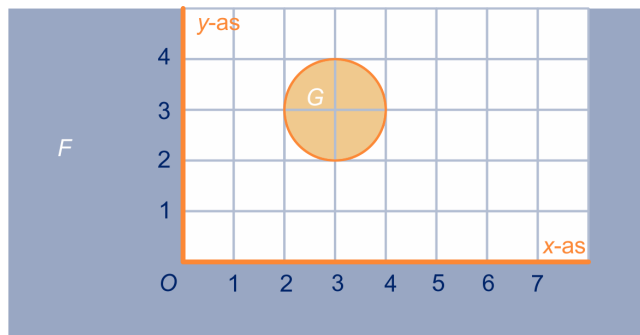
F is het gebied, zie de volgende bladzijde, bestaande uit de punten (x, y) met $x \geq 0$ of $y \geq 0$ en G de cirkel met middelpunt $(3, 3)$ en straal 1.

a Welke drie roosterpunten in de getekende roosterrechthoek liggen op de conflictlijn?

De conflictlijn van de twee gebieden zijn delen van twee parabolen.

b Geef van elk van die parabolen het brandpunt en de richtlijn.

10.2 Naastebuurprincipe



Op de lijn $x = 2$ liggen twee punten van de conflictlijn. De tweede coördinaat van het punt dat het dichtst bij de x -as ligt, noemen we y .

- c Laat zien dat y oplossing is van de vergelijking: $y + 1 = \sqrt{1 + (y - 3)^2}$ en bereken de exacte waarde van y .
- d Bepaal op soortgelijke wijze ook exact de tweede coördinaat van het andere punt op de conflictlijn met $x = 2$.

38

We bekijken de parabool P met richtlijn $y = -1$ en brandpunt $(0, 1)$.

- a Welk punt is de top van de parabool? En welke lijn de symmetrieas?

Het punt (x, y) ligt op de parabool.

- b Laat zien dat $|y + 1| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$ en herschrijf deze vergelijking in de vorm: $y = \dots \cdot x^2$.
- c Toon aan dat de parabool die je krijgt door P met $\frac{1}{4}$ ten opzichte van $O(0, 0)$ vergelijking $y = x^2$ heeft.



Opmerking

De grafiek van de standaard-parabool $y = x^2$ die je in klas 3 bij algebra tegen bent gekomen is dus ook in meetkundige zin een parabool, dus een conflictlijn van een punt en een lijn. Omdat alle parabolen (algebraïsch en meetkundig gezien) gelijkvormig zijn, is de grafiek van elke kwadratische functie een conflictlijn van een punt en een lijn.

39

- a Geef een vergelijking van de richtlijn en de coördinaten van het brandpunt van de standaard-parabool $y = x^2$.

 Hint 3.

- b Bepaal het brandpunt en de richtlijn van de grafiek van de functie $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$, exact.

 Hint 4.

10.3 Ellips, hyperbool, meer parabool

Ellipsen

Definitie

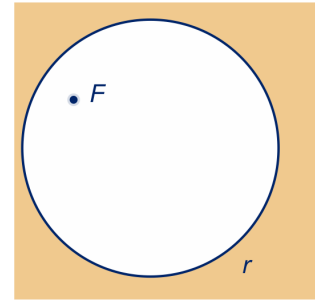
Gegeven zijn een punt F en een cirkel r met middelpunt M ; M ligt binnen r .

De conflictlijn tussen F en r heet een **ellips**.

F heet **brandpunt** en r heet **richtcirkel** van de ellips.

De constructie van een ellips vanuit voetpunten

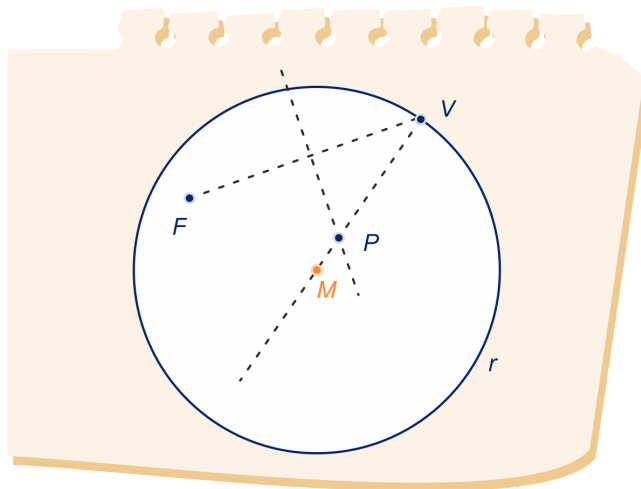
Een punt P ligt op de ellips met brandpunt F en richtcirkel r als $d(P, F) = d(P, r)$. Als je een punt P op de ellips hebt, kun je zijn voetpunt V op r bepalen. Omdat $|PF| = |PV|$, ligt F op de middelloodlijn van lijnstuk FV , zie de figuur hieronder.



Omgekeerd kun je uitgaande van een voetpunt V op r het bijbehorende punt P op de ellips bepalen.

Als volgt (zie de figuur hieronder):

- Richt de loodlijn in V op r op (dat is de lijn van V naar het middelpunt M van r).
- Teken de middelloodlijn van lijnstuk FV .
- Het snijpunt van deze twee lijnen is P .



40

- Teken een cirkel r met straal 4 cm en een punt F op afstand 3 cm van het middelpunt M . Kies vijf voetpunten op r en voer bovenstaande constructie met elk van deze voetpunten uit. Schets daarna de ellips met F als brandpunt en r als richtlijn.
- Dezelfde opdracht, maar nu met F op afstand 1 cm van het middelpunt M van r .

Het is duidelijk dat de lijn FM symmetrieas is van de ellips.

10.3 Ellips, hyperbool, meer parabool

- c Bereken van de twee ellipsen in de onderdelen a en b hoe lang het stuk van de symmetrieas is, binnen de ellips.
- d Zijn alle ellipsen gelijkvormig?

41

Bekijk nog eens bovenstaande constructie.

- a Leg uit dat $|PF| + |PM|$ voor elk punt P op de ellips hetzelfde is.

We verwisselen de rollen van F en M .

- b Wat is de conflictlijn tussen het punt M en de cirkel r' met middelpunt F en dezelfde straal als r ?

Je kunt de rollen van F en M verwisselen!

Een ellips heeft dus twee brandpunten en twee richtcirkels.



Als F_1 en F_2 de brandpunten zijn van een ellips, dan is voor elk punt P op de ellips de som van zijn afstanden tot F_1 en F_2 hetzelfde: $|PF_1| + |PF_2| = R$, waarbij R de straal van de richtcirkels is. We noemen R de **ellipsconstante**.

De ellips heeft twee **symmetrieassen**: de lijn F_1F_2 en de middelloodlijn van lijnstuk F_1F_2 .

Deze symmetrieassen snijden de ellips in de zogenaamde **toppen**.

Het lijnstuk dat door de ellips van de lijn F_1F_2 wordt afgesneden heet de **lange as**.

Het lijnstuk dat door de ellips van de middelloodlijn van lijnstuk F_1F_2 wordt afgesneden heet de **korte as**.

42

Van een ellips is $|F_1F_2| = 24$ en is de ellipsconstante 26.

- a Bereken de lengte van de lange as.
- b Bereken de lengte van de korte as.

43

Een ellips is in een coördinatenstelsel getekend, zó dat de toppen $(17,0)$, $(0,8)$, $(-17,0)$ en $(0,-5)$ zijn.

- a Wat is de ellipsconstante?
- b Bereken de coördinaten van de brandpunten.

De eigenschap dat de som van de afstanden tot de brandpunten voor punten op de ellips constant is, brengt ons op een andere constructiemethode voor de ellips.

10.3 Ellips, hyperbool, meer parabool

44



Op het werkblad staan de brandpunten F_1 en F_2 van een ellips en isoafstandslijnen van F_1 en F_2 bij afstanden 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en 10.

- a Teken enkele punten van de ellips als de ellipsconstante 6 is en schets daarna de ellips.
- b Doe dat ook als de ellipsconstante 10 is.

Opmerking

De constructie via de som van de afstanden tot de brandpunten is heel praktisch. Duw twee punaises op de plaatsen van de brandpunten en maak met een touwtje een lus. Leg de lus om de punaises en trek hem strak met een potlood. Door het potlood rond te bewegen, teken je een ellips.

45

De afstand van de brandpunten in opgave 44 is $4\frac{1}{2}$.

- a Hoe lang moet de lus zijn voor de ellips uit opgave 44a?
- b En voor de ellips uit opgave 44b?

De touwtjesconstructie wordt in Duitsland "die Gärtnerkonstruktion" genoemd.

Dit omdat deze wel door tuinlieden wordt gebruikt voor de aanleg van ovale bloemperken. De constructie werd het eerst beschreven door Anthemius van Tralles (6e eeuw), een van de bouwmeesters van de Hagia Sophia te Constantinopel.

Hyperbolen

Definitie

Gegeven zijn een punt F en een cirkel r met middelpunt M ; F ligt buiten r .

De conflictlijn tussen F en r is een tak van een **hyperbool**. De punten F en M heten de **brandpunten** van de hyperbool. r heet **richtcirkel** van de hyperbool.

De constructie van een hyperbool vanuit voetpunten

Een punt P ligt op de hyperbool met brandpunt F en richtcirkel r als $d(P, F) = d(P, r)$. Als je een punt P op de hyperbooltak hebt, kun je zijn voetpunt V op r bepalen. Omdat $|PF| = |PV|$, ligt P op de middelloodlijn van lijnstuk FV .

Omgekeerd kun je uitgaande van een voetpunt V op r het bijbehorende punt P op de hyperbooltak bepalen.



10.3 Ellips, hyperbool, meer parabool

46

Teken een cirkel r met straal 3 cm en een punt F buiten r op afstand 2 cm van r .

Kies vijf voetpunten op r en zoek de bijbehorende punten van de hyperbool.

Maak een schets van de hyperbooltak.

47

Bekijk nog eens de constructie in de vorige opgave.

- a Leg uit dat $|PM| - |PF|$ voor elk punt P op de hyperbooltak hetzelfde is.

We verwisselen de rollen van F en M . De conflictlijn tussen het punt M en de cirkel r' met middelpunt F en dezelfde straal als r is ook een hyperbooltak.

- b Wat weet je van $|PM| - |PF|$ voor de punten P op deze conflictlijn?

We hebben nu twee hyperbooltakken.

- c Wat hebben die met elkaar te maken?

De twee hyperbooltakken samen vormen de hyperbool met brandpunten F en M . Een hyperbool heeft dus twee brandpunten en twee richtcirkels.



Als F_1 en F_2 de brandpunten zijn van een hyperbool, dan is voor elk punt P op de hyperbool het absolute verschil van zijn afstanden tot F_1 en F_2 hetzelfde: $||PF_1| - |PF_2|| = R$, waarbij R de straal van de richtcirkels is.

We noemen haar de **hyperboolconstante**.

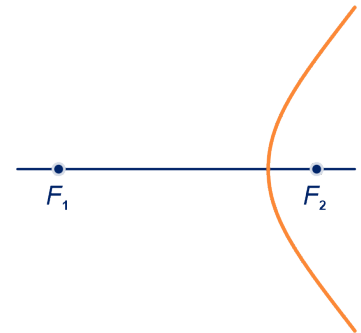
Een hyperbool met brandpunten F_1 en F_2 heeft twee symmetrieassen: de lijn F_1F_2 en de middelloodlijn van het lijnstuk F_1F_2 . De eerste symmetrieas snijdt de hyperbool in de zogenaamde **toppen**. Het verbindingslijnstuk tussen de toppen heet de **as** van de hyperbool.

48



Hiernaast en op het werkblad staat een hyperbooltak met zijn brandpunten F_1 en F_2 en een symmetrieas. Gegeven: $|F_1F_2| = 6$ en de hyperboolconstante van de hyperbool is 4.

- a Teken op het werkblad de richtcirkel.
b Hoe lang is de as?



10.3 Ellips, hyperbool, meer parabool

49



Hiernaast staat een tak van een hyperbool met zijn brandpunt F en een stuk van zijn richtcirkel r . Bij elk punt P op de hyperbooltak bepalen we zijn voetpunt op de richtcirkel. Deze voetpunten tezamen vormen een boog van de richtcirkel.

- Geef op het werkblad zo goed mogelijk die boog aan.
- Teken in de tweede figuur op het werkblad de raaklijnen uit F aan de richtcirkel

Noem de raakpunten R_1 en R_2 .

- Leg uit dat R_1 en R_2 geen voetpunten van punten op de hyperbooltak kunnen zijn.

Kennelijk zijn R_1 en R_2 de eindpunten van de cirkelboog uit a.

De middelloodlijnen van de lijnstukken FR_1 en FR_2 noemen we a_1 en a_2 .

- Bewijs dat a_1 en a_2 door het midden van lijnstuk MF gaan.
- Bewijs dat elk punt Q van a_1 dicht bij de richtcirkel ligt dan bij het brandpunt.



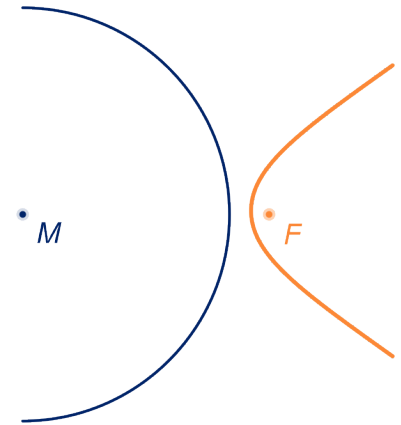
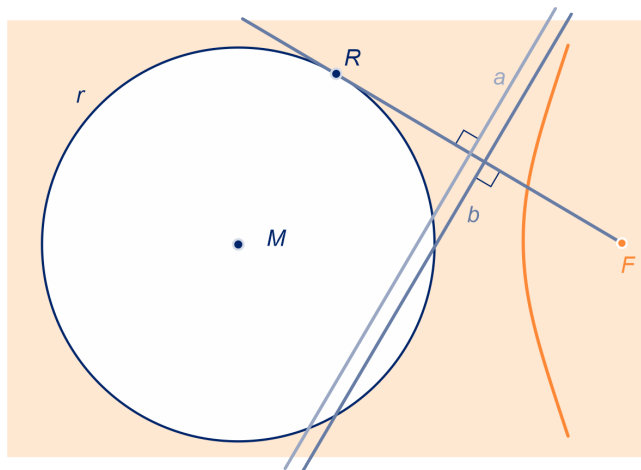
Hint 5.

In opgave 49e heb je gezien dat de hyperbooltak geheel aan één kant van a_1 ligt. In de volgende opgave bewijzen we dat de hyperbooltak willekeurig dicht bij a_1 komt. Bijgevolg is de lijn a_1 asymptoot van de hyperbooltak.

50



In de figuur hieronder is r de richtcirkel (M is zijn middelpunt) en F het brandpunt van een hyperbooltak. Getekend is een raaklijn uit F aan r ; het raakpunt heet R . a is de middelloodlijn van lijnstuk FR ; b is een lijn parallel aan a , aan de kant van F .



10.3 Ellips, hyperbool, meer parabool

We willen bewijzen dat er tussen a en b nog punten van de hyperbooltak liggen. (Omdat b willekeurig dicht bij a gekozen kan worden, is a bijgevolg asymptoot van de hyperbooltak.)

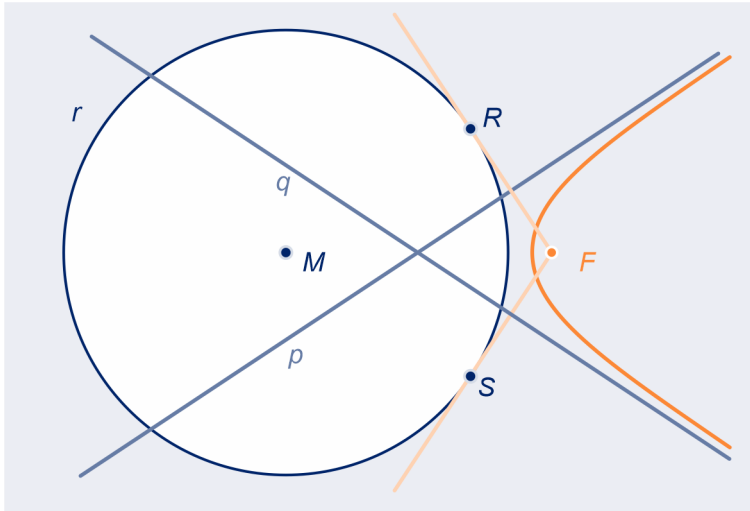
- a Bepaal de snijpunten A en B van lijn MG met respectievelijk a en b .
- b Bewijs dat $d(B, r) > |BF|$, dus dat B aan die kant van de conflictlijn ligt waar F ook ligt.
- c Bewijs dat $d(A, r) < |AF|$, dus dat A aan die kant van de conflictlijn ligt waar r ook ligt.
- d Leg uit hoe uit b en c volgt dat er een punt is van de hyperbooltak tussen a en b .



Een hyperbooltak heeft richtcirkel r en brandpunt F .

De raaklijnen vanuit F aan r , raken de richtcirkel in R en S .

De de middelloodlijnen van de lijnstukken RF en SF zijn de **asymptoten** van de hyperbooltak.



Opmerking

Deze lijnen zijn ook de asymptoten van de gehele hyperbool.

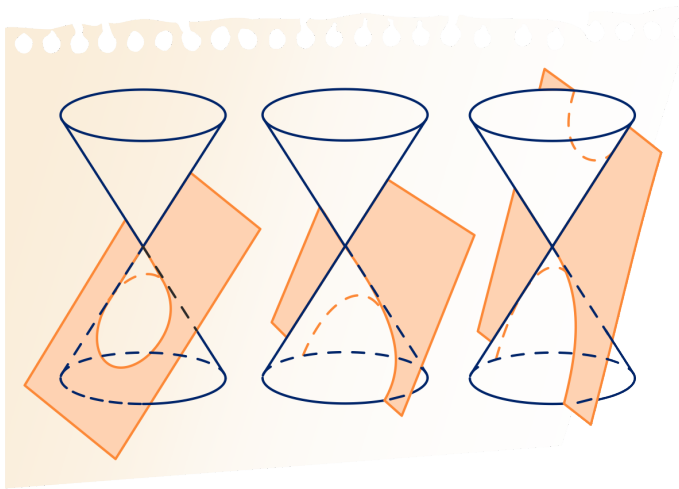
10.4 Anders bekeken

Er zijn ook heel andere manieren om tegen parabool, ellips en hyperbool aan te kijken. We laten enkele daarvan de revue passeren. Het is soms helemaal niet duidelijk dat de verschillende benaderingen dezelfde figuren opleveren. Het gaat te ver dit aan te tonen. Deze paragraaf heeft dan ook meer een beschrijvend karakter.

Kegelsneden

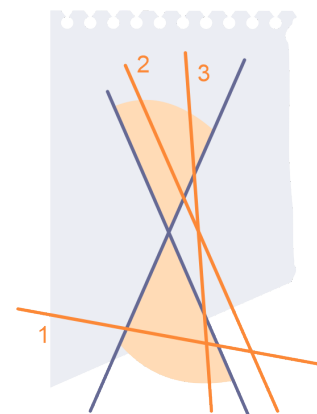
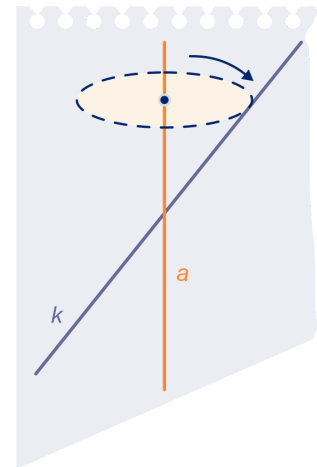
Twee lijnen a en k snijden elkaar. Als je k om a wentelt, ontstaat een **kegel**. In het dagelijks leven is een kegel een figuur met een top en een grondvlak. Nu (en in het algemeen in de wiskunde) heeft een kegel twee stukken die elkaars spiegelbeeld zijn in de top. Beide stukken zijn onbegrensd. (Om een goed plaatje te krijgen, tekenen we er wel een grondvlak en bovenvlak bij; bedenk echter dat de kegel daar niet ophoudt.)

Een **kegelsnede** is een figuur die je krijgt door een kegel met een vlak te snijden.



Afhankelijk van de hoek die het vlak maakt met de as van de kegel krijg je:

1. een ellips: dat is een gesloten snijkromme met één van de twee helften van de kegel.
2. een parabool: dat is een onbegrensde snijkromme met één van de twee helften van de kegel.
3. een hyperbool: die heeft twee onbegrensde takken; met elke helft van de kegel een.



10.4 Anders bekeken

In de figuur staat in een dwarsdoorsnede aangegeven hoe je moet snijden om de drie gevallen te krijgen.

Je zou kunnen zeggen dat de parabool het grensgeval is tussen ellips en hyperbool

51

Noem de hoek die het snijvlak met de as van de kegel maakt α . Noem de tophoek van de kegel β . In de dwarsdoorsnede hiernaast zijn α en β aangegeven.

- a Voor welke α is de snijfiguur een cirkel?
- b Voor welke α is de snijfiguur een langgerekte, smalle ellips?
- c Hoe moet je een kegel snijden om twee rechte lijnen als snijfiguur te krijgen??
- d Wat merk je op over de snijkrommen als je de kegel snijdt met twee evenwijdige vlakken.

52

Een holle doorzichtige kunststoffen kegel ligt op tafel. Hij is gedeeltelijk gevuld met water. Zie figuur.

- a Wat is de vorm van het wateroppervlak?
- b Wat wordt die vorm als de kegel aan de linkerkant (bij de top) wordt opgetild?
- c En als hij aan de rechterkant (bij het grondvlak) wordt opgetild?

Een andere manier om kegelsneden zichtbaar te maken is met licht.

53

Laat in een donkere kamer een lichtkegel schuin op de vloer vallen. Het verlichte deel van de vloer is een kegelsnede.

- a Wat weet je van de lichtkegel ten opzichte van de vloer, als het verlichte deel een parabool is?
- b Hoe moet je de lichtkegel draaien om een ellips te krijgen. En hoe om een hyperbooltak te krijgen?

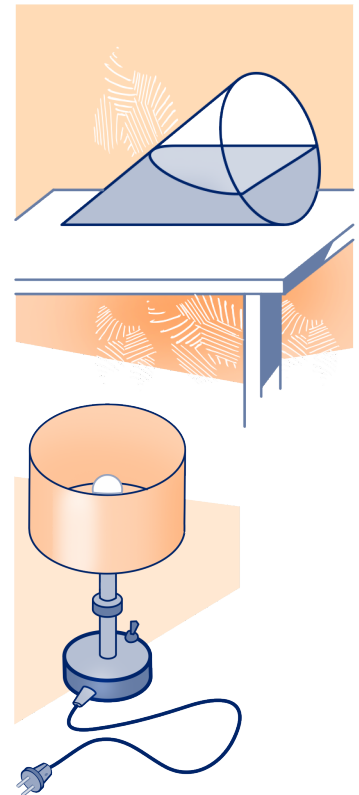
Van een staande schemerlamp laat de kap geen licht door. Zo-doende wordt maar een deel verlicht van de muur waar de lamp bij staat.

- c Wat is de vorm van de lichtvlek op de muur?

54

Een bol ligt op tafel en wordt beschenen door een puntvormige lichtbron. De schaduw die de bol op tafel werpt, is een kegelsnede.

Wat weet je van de positie van de lichtbron ten opzichte van de bol als de schaduw een parabool is?



10.4 Anders bekeken



In de oudheid schreef Apollonius van Perga (ca 262 - ca 190 voor Chr) de Conica: acht boeken waarin hij de kegelsneden behandelde.

Opgerekte cirkel

Als je scheef op een cirkel kijkt, zie je een ellips. Probeer maar bij de rand van een emmer, een lampenkap, of de middencirkel op een voetbalveld. Je ziet de cirkel dan in één richting verkort en in de richting loodrecht daarop onverkort.

Omgekeerd, als een vorm in werkelijkheid een ellips is, kun je hem zien als cirkel door er vanuit een geschikte plek naar te kijken. Daarom worden fietsen opgerekt op het wegdek geschilderd.

"Oprekken en indrukken" is wiskundig "vermenigvuldigen ten opzichte van een lijn". Op de GR gaat dat eenvoudig.

We gaan uit van de eenheidscirkel met bewegingsvergelijkingen: $(x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t))$. Zorg voor een vierkant scherm.

We vermenigvuldigen de eenheidscirkel met factor a ten opzichte van de y -as (met $a > 0$).

- Teken voor enkele waarden van a de krommen met bewegingsvergelijkingen $(x(t), y(t)) = (a \cdot \cos(t), \sin(t))$.
- Geef bewegingsvergelijkingen van een ellips met lange as 8 en korte as 6.

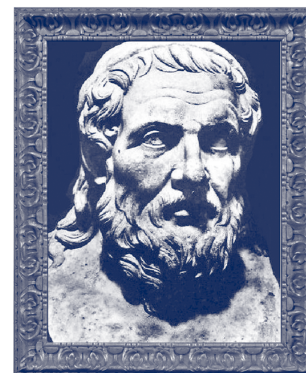
Vergelijkingen

In de onderbouw heb je met parabolen, ellipsen en hyperbolen gewerkt. Daar zijn ze met behulp van vergelijkingen gedefinieerd. In wiskunde b (paragraaf 13.7) heb je gezien dat een parabool gedefinieerd als conflictlijn eenzelfde figuur oplevert als een kwadratische functie.

In het volgende gaan we ook vergelijkingen opstellen voor ellipsen en hyperbolen.

In opgave 38 heb je gezien dat een parabool met richtlijn $y = -1$ en brandpunt $(0,1)$ vergelijking $y = \frac{1}{4} \cdot x^2$ heeft.

Uit wiskunde b hoofdstuk 16 paragraaf 6 **Vergelijking aanpassen** citeren we het volgende.



55



10.4 Anders bekeken

Vergelijking aanpassen

Gegeven een figuur waarvan je een vergelijking kent.

Om een vergelijking van de beeldfiguur te krijgen vervang je in de vergelijking van het origineel:

- x door $x - a$ en y door $y - b$ bij verschuiving over de vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
- x door $\frac{1}{p} \cdot x$ bij horizontale vermenigvuldiging met p en y door $\frac{1}{p} \cdot y$ bij verticale vermenigvuldiging met p .
- y door x en x door y bij spiegelen in de lijn $y = x$ en y door $-x$ en x door $-y$ bij spiegelen in de lijn $y = -x$.

56

De parabool met richtlijn $y = -1$ en brandpunt $(0,1)$ heeft vergelijking $y = \frac{1}{4} \cdot x^2$.

Je vermenigvuldigt deze parabool vanuit $O(0,0)$ met a , $a \neq 0$.

Een vergelijking van de parabool is: $y = \dots \cdot x^2$.

- Welke uitdrukking in a moet er ingevuld worden?
- Bij welk brandpunt en welke richtlijn heeft de conflictlijn vergelijking $y = x^2$?

57

Een ellips heeft brandpunten F_1 en F_2 , met $|F_1F_2| = 16$ en ellipsconstante 20.

We brengen een assenstelsel aan zó dat de lange as op de x -as ligt en de korte as op de y -as. Het snijpunt van de assen is de oorsprong O . De snijpunten met de lange as noemen we A en B en met de korte as C en D , zie figuur.

- Bereken de lengte van de assen exact.

Neem aan: een vergelijking van de ellips is van de vorm:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \text{ met } a \text{ en } b \text{ positief.}$$

- Wat is dan a en b ?

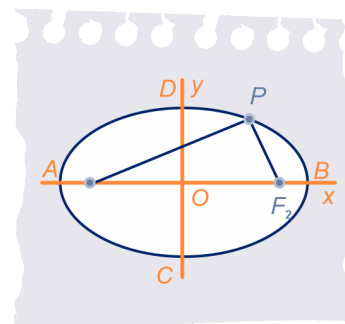
In het vervolg bewijzen we dat een punt $P(x, y)$ op de conflictlijn aan de vergelijking $\left(\frac{x}{10}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 = 1$ voldoet.

- Waarom geldt: $\sqrt{(x+8)^2 + y^2} = 20 - \sqrt{(x-8)^2 + y^2}$?

- Laat zien dat deze gelijkheid leidt tot:

$$50 - 4x = 5\sqrt{(x-8)^2 + y^2}.$$

- Herleid deze gelijkheid tot: $\left(\frac{x}{10}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 = 1$.



Een ellips heeft ellipsconstante $2e$; de afstand van de brandpunten tot elkaar is $2d$.

Dan $e > d$ en de lengte van de lange as is $2e$ en van de korte as



10.4 Anders bekeken

$$2\sqrt{e^2 - d^2}.$$

Als je een assenstelsel aanbrengt zó, dat de brandpunten op de x -as liggen en de y -as de middenloodlijn van de brandpunten is, dan is een vergelijking van de ellips: $\frac{x^2}{e^2} + \frac{y^2}{e^2 - d^2} = 1$

De rekenpartij in opgave 57 gaat in het algemeen zo.

Gegeven een ellips met ellipsconstante $2e$ en afstand tussen de brandpunten $2d$.

Dan $e > d$. Breng een assenstelsel aan zoals hierboven.

Neem aan dat (x, y) op de conflictlijn ligt, dan

$$\sqrt{(x+d)^2 + y^2} = 2 \cdot e - \sqrt{(x-d)^2 + y^2}.$$

Kwadrateren geeft:

$$x^2 + 2xd + d^2 + y^2 = 4 \cdot e^2 - 4e\sqrt{(x-d)^2 + y^2} + x^2 - 2xd + d^2 + y^2$$

Als je dit vereenvoudigt krijg je:

$$e\sqrt{(x-d)^2 + y^2} = e^2 - xd.$$

Dit kwadrateer je weer:

$$e^2(x^2 - 2xd + d^2 + y^2) = e^4 - 2e^2xd + x^2d^2.$$

Als je dit vereenvoudigt, krijg je:

$$(e^2 - d^2)x^2 + e^2y^2 = e^4 - e^2d^2,$$

$$\text{dus (deel door } e^4 - e^2d^2): \frac{x^2}{e^2} + \frac{y^2}{e^2 - d^2} = 1.$$

58

Bepaal de coördinaten van de brandpunten van de ellipsen met vergelijking:

$$x^2 + 4y^2 = 16 \text{ en van } x^2 + 4y^2 = 1.$$



Een hyperbool heeft hyperboolconstante $2e$; de afstand van de brandpunten tot elkaar is $2d$. Dan $e < d$.

Breng een assenstelsel aan zó, dat de x -as door de brandpunten gaat en de y -as middelloodlijn van de brandpunten is.

$$\text{Als } (x, y) \text{ op de conflictlijn ligt, dan } \frac{x^2}{e^2} - \frac{y^2}{e^2 - d^2} = 1.$$

10.4 Anders bekeken

59

Gegeven is de hyperbool met vergelijking $x^2 - y^2 = 1$. Hiernaast is de grafiek getekend.

Het stuk met punten (x, y) met $y \geq 0$ is grafiek van een functie f .

a Geef een formule voor $f(x)$.

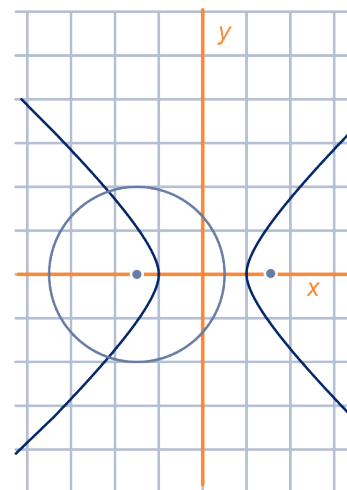
In paragraaf 15.4 van Vwo wiskunde b, hebben we gezien dat de functie f twee asymptoten heeft.

In de vorige paragraaf hebben we gezien hoe je de asymptoten van de hyperbool ook kunt vinden. Je vindt er bijvoorbeeld een als volgt. Teken de lijn door het brandpunt F die de richtcirkel aan de 'bovenkant' in R raakt, dan is de middelloodlijn van lijnstuk FR een asymptoot.

In de figuur is de richtcirkel en het brandpunt F getekend die als conflictlijn de rechters tak van de hyperbool heeft.

b Bereken de hyperboolconstante en de coördinaten van F .

c Bereken de coördinaten van R en geef een formule voor de middelloodlijn van FR .

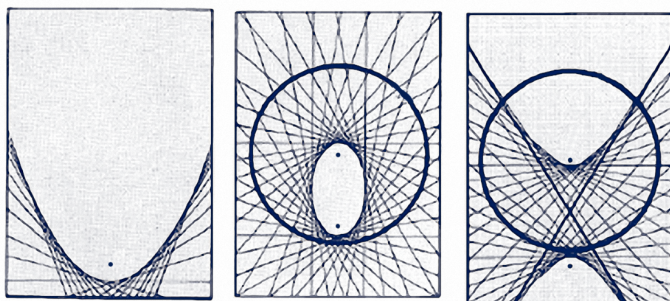


Vouwen

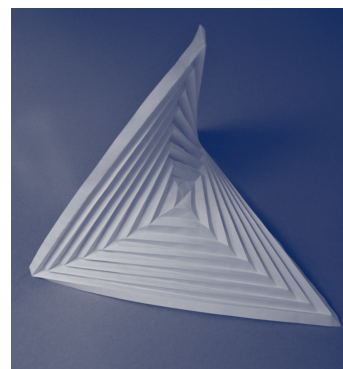
Neem een rechthoekig stuk papier. Teken daarop een punt F . Kies een van de randen van het papier. Maak scherpe vouwen zo dat die rand door F gaat. Als je voldoende vouwen hebt, wordt de parabool zichtbaar met F als brandpunt en de rand van het papier als richtlijn.

Door een cirkelrand te vouwen op een punt F , kun je een ellips en een hyperbool zichtbaar maken. Zie figuur 1.

De plaatjes zijn afkomstig uit Pythagoras, jrg 20, nr2.



figuur 1

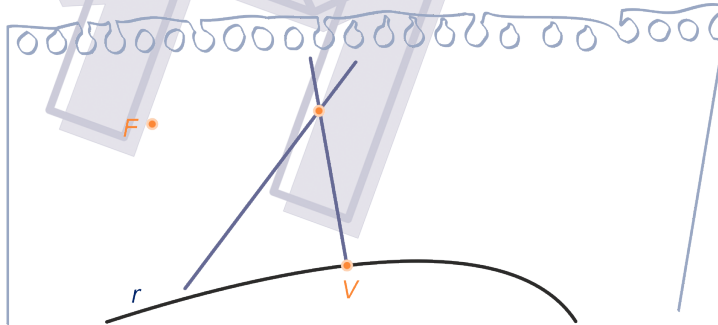


figuur 2

In figuur 2 zie je een hyperbolische parabool, gevouwen uit een vierkant stuk papier (origami).

10.5 De raaklijneigenschap

De constructie van punten van een parabool, ellips en hyperbool gaat bij alledrie volgens hetzelfde principe. Dat principe gaat bij een gegeven gladde kromme r en een punt F (dat niet op r ligt) als volgt.



Kies een punt V op r .

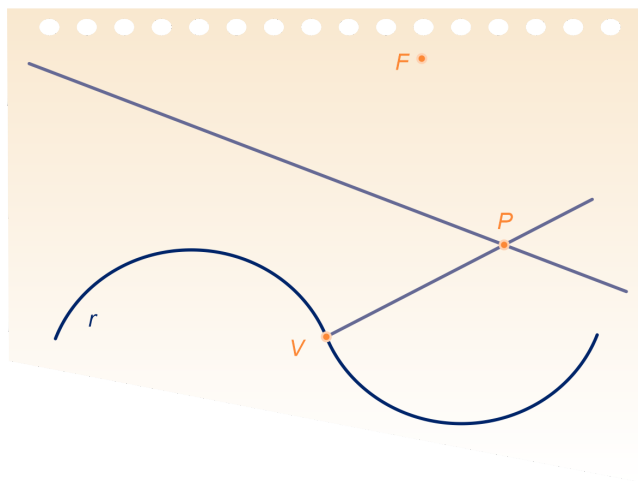
- Richt de loodlijn in V op r op (dat is de lijn die loodrecht staat op de raaklijn aan r in V).
- Teken de middelloodlijn van lijnstuk FV .
- Het snijpunt van deze twee lijnen ligt op de conflictlijn van F en r .

Bij de parabool is r een rechte lijn, bij de ellips en hyperbool is r een cirkel.

Om deze constructie mogelijk te maken, moet r een "gladde" kromme zijn, dat wil zeggen dat in elk punt de raaklijn bestaat.

Opmerking

De constructie gaat niet altijd goed. In de situatie hieronder is het punt P met de constructie bepaald. Maar P is geen punt van de conflictlijn van r en F . Waarom niet?



In dat geval noemen we de lijn die in P loodrecht staat op r de **normaal** in P op r .

Bij P hoort een voetpunt V op r . De middelloodlijn van FV noemen we m . Dan is m raaklijn aan de conflictlijn en P is het raakpunt.

In de volgende opgave doen we het bewijs voor een hyperbool.

1. $d(Q, r) < d(Q, V)$
2. $d(Q, r) = d(Q, F)$
3. m steunlijn van de conflictlijn.

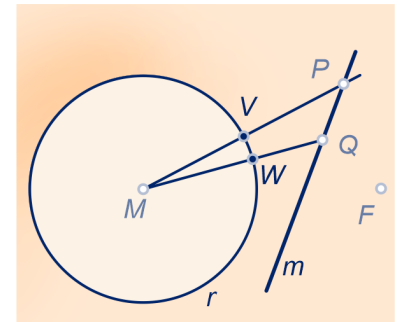
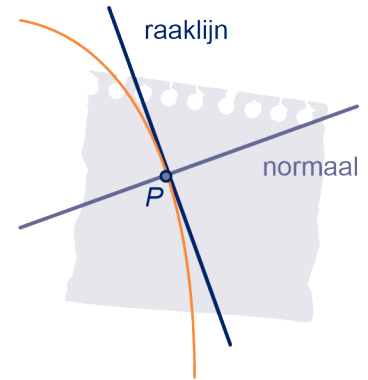
Dat er door P geen andere steunlijn van de conflictlijn gaat, is nu nog niet bewezen. Dat bewijs is te lastig om hier te geven.

We gebruiken dezelfde notatie als in de vorige stelling. Dan is m de bissectrice van hoek $\angle VPF$.

Bewijs deze stelling met congruentie.

We vatten bovenstaande samen in de volgende stelling.

P is een punt daarop en V is het voetpunt van P op r . Dan is de raaklijn in P middelloodlijn van lijnstuk VF en deze maakt gelijke hoeken met de lijnen PF en PV .



10.5 De raaklijneigenschap

62

Teken een lijn r en een punt F . k is de lijn door F die evenwijdig is aan r .

- a Zoek de punten op k die op de parabool met brandpunt F en richtlijn r liggen.
- b Hoe groot zijn de hoeken waaronder k de parabool snijdt? (Dat zijn de hoeken die k maakt met de raaklijnen aan de parabool.)

l is de lijn die evenwijdig is aan r zo dat F midden tussen r en l in ligt.

- c Zoek de snijpunten van l met de parabool.
- d Hoe groot zijn de hoeken waaronder l de parabool snijdt?

m is de lijn die evenwijdig is aan r en tussen F en r loopt.

De lijn m snijdt de parabool onder hoeken van 30° .

- e Bewijs dat $d(m, F) = \frac{1}{3} \cdot d(r, F)$.

63

Gegeven is een cirkel r met straal 8 en een punt F daarbinnen op afstand 4 van het middelpunt M van r .

k is de lijn door F die loodrecht staat op de lange as van de ellips met brandpunt F en richtcirkel r .

- a Maak een tekening van de situatie en geef in de tekening aan waar ongeveer de snijpunten van k met de ellips liggen.

V is het voetpunt van S . Als S zo'n snijpunt is en $|SF| = x$, dan $x + \sqrt{16 + x^2} = 8$.

- b Leg dat uit.
- c Bereken x .
- d Bereken hoe groot de hoeken zijn waaronder k de ellips snijdt, in graden nauwkeurig.

64

Gegeven is een cirkel r met straal 2 en een punt F daarbuiten op afstand 4 van het middelpunt van r . k is de lijn door F die loodrecht staat op de as van de hyperbooltak met brandpunt F en richtcirkel r .

- a Maak een tekening van de situatie en geef in de tekening aan waar ongeveer de snijpunten van k met de hyperbooltak liggen.
- b Bereken hoe groot de hoeken zijn waaronder k de hyperbooltak snijdt in graden nauwkeurig.

De middelloodlijnen tussen brandpunt en voetpunt zijn raaklijnen aan de conflictlijn. Op deze eigenschap is de vouwconstructie van na opgave 55 gebaseerd. We gaan de betekenis van deze eigenschap formuleren voor parabool, ellips en hyperbool afzonderlijk.

10.5 De raaklijneigenschap



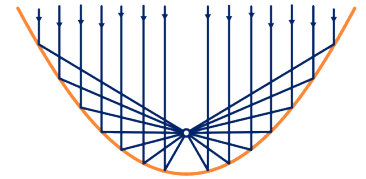
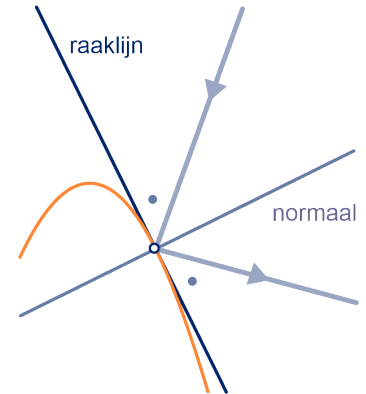
Raaklijneigenschap parabool

De raaklijn in een punt P van een parabool maakt gelijke hoeken met de lijn die P verbindt met het brandpunt en de lijn door P loodrecht op de richtlijn.

Hoek van inval = hoek van terugkaatsing

Een lichtstraal valt in een punt op een spiegelend oppervlak s . De straal wordt weerkaatst. De teruggekaatste lichtstraal maakt een even grote hoek met s als de invallende: "de hoek van inval is de hoek van terugkaatsing".

Dit is een bekende wet uit de natuurkunde.



65

De parabolische spiegel

Gegeven is een parabool. Een lichtstraal is evenwijdig aan de as van de parabool en valt op de parabool.

- Leg uit dat de teruggekaatste lichtstraal door het brandpunt van de parabool gaat.
- Leg uit dat de weg van elk van de getekende lichtstralen tot het brandpunt even lang is.
(De lichtstralen zijn zó getekend dat ze alle op dezelfde afstand tot de richtlijn beginnen.)

Als een evenwijdige lichtbundel (zoals van de zon) evenwijdig is aan de as van een parabolische spiegel, worden alle lichtstralen dus gespiegeld naar het brandpunt. Vandaar ook de naam brandpunt. Volgens dit principe werken ook schotelantennes en radiotelescopen.

Volgens een legende zou Archimedes (287-212 voor Chr.) in de strijd tegen Rome voor zijn vaderstad Syracuse parabolische spiegels hebben ontworpen. Door de spiegels zo te richten dat de zonnestralen werden gebundeld op de vijandelijke Romeinse houten schepen, zouden deze in brand zijn gestoken.

De radiotelescoop te Effelsberg (Duitsland) is met zijn diameter van 100 meter een van 's werelds grootste volledig stuurbare telescopen.



Raaklijneigenschap ellips en hyperbool

De raaklijn in een punt van een ellips of hyperbool maakt gelijke hoeken met de lijnen die dat punt verbinden met beide brandpunten.

10.5 De raaklijneigenschap

66

De elliptische spiegel

Gegeven is een ellips. In een van de brandpunten bevindt zich een puntvormige lichtbron. De lichtstralen vallen op de ellips en worden teruggekaatst.

Leg uit dat alle teruggekaatste lichtstralen door het andere brandpunt gaan.

67



Een oude opgave

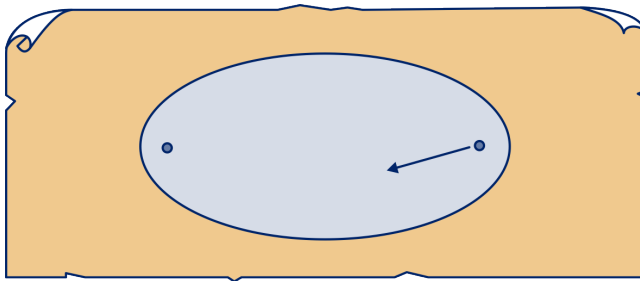
In zijn beroemde boek *Over brandspiegels* stelt Anthemius van Tralles het volgende probleem. Ontwerp een situatie waarbij een zonnestraal die door een klein gaatje binnenkomt op elk moment van de dag en op elke dag van het jaar op een gegeven vaste plek terecht zal komen.

Wat is jouw oplossing?

68



Gegeven is een elliptische spiegel met zijn brandpunten. Vanuit het ene brandpunt vertrekt een lichtstraal zoals is aangegeven.



- a Teken op het werkblad de eerste drie spiegelingen van het verloop van de lichtstraal.
- b Wat is de limietbaan van de lichtstraal?
- c Hoe zit dat als de lichtstraal in een andere richting vertrekt?

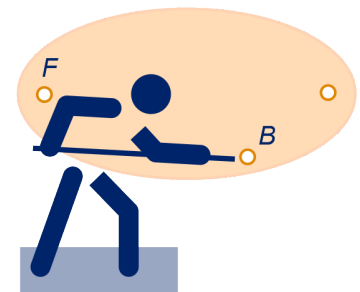
69

Op een ellipsvormig biljart liggen twee ballen: F en B . Bal F ligt in een van de brandpunten.

- a Hoe moet de biljarter bal B stoten om via de band (de ellips) zonder effect bal F frontaal te raken?
- b Hoe moet de biljarter bal B (ook nu zonder effect) stoten zodat deze via twee banden frontaal op F komt?

De biljarter probeert bal B rechtstreeks op bal F te spelen. Hij geeft B veel vaart mee, maar hij mikt onnauwkeurig zo dat hij F net mist: bal B gaat achter bal F langs.

- c Is er hoop dat bal B na een aantal banden toch nog op bal F komt?

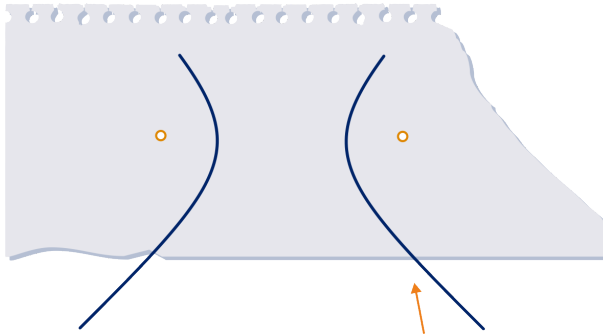


10.5 De raaklijneigenschap

70



Gegeven is een hyperbolische spiegel met zijn brandpunten. Er komt een lichtstraal aan zoals is aangegeven. Als de lichtstraal niet zou worden gespiegeld, zou hij door een van de brandpunten gaan.



- Teken op het werkblad de eerste drie spiegelingen van het verloop van de lichtstraal.
- Wat is de limietbaan van de lichtstraal?
- Hoe zit dat als de lichtstraal vanuit een andere richting komt, maar wel in de richting van het brandpunt gaat?

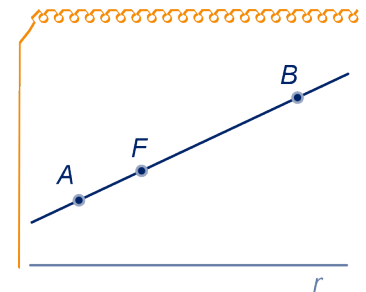
71



Van een parabool is gegeven de richtlijn r en het brandpunt F . Een lijn door F snijdt de parabool in de punten A en B .

- Teken op het werkblad de raaklijnen in A en B aan de parabool. Licht je werkwijze toe.
- Bewijs dat deze raaklijnen loodrecht op elkaar staan.
- Bewijs dat het snijpunt van de raaklijnen op de richtlijn van de parabool ligt.

Hint 6.



72

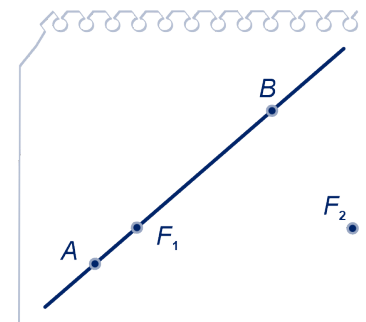


Van een ellips zijn de brandpunten F_1 en F_2 gegeven. Een lijn door F_1 snijdt de ellips in de punten A en B .

- Teken op het werkblad de raaklijnen in A en B aan de ellips. Licht je werkwijze toe.

Hint 7.

- Bewijs dat de hoek die deze raaklijnen met elkaar maken gelijk is aan $90^\circ - \frac{1}{2} \cdot \angle AF_2B$.



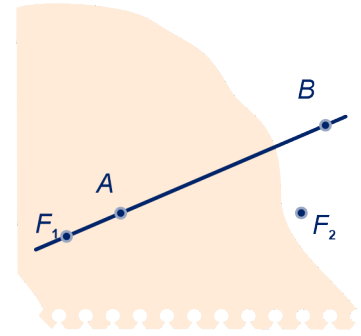
10.5 De raaklijneigenschap

73



Van een hyperbool zijn de brandpunten F_1 en F_2 gegeven. Een lijn door F_1 snijdt de hyperbool in de punten A en B .

- Teken op het werkblad de raaklijnen in A en B aan de hyperbool. Licht je werkwijze toe.
- Bewijs dat de hoek die deze raaklijnen met elkaar maken gelijk is aan $\frac{1}{2} \cdot \angle AF_2B$.



10.6 Gemengde opgaven

Tot nu toe

We kennen nu de conflictlijn in de volgende situaties:

- twee punten;
- twee snijdende lijnen;
- een lijn en een punt dat niet op de lijn ligt;
- een cirkel en een punt daarbinnen;
- een cirkel en een punt daarbuiten.

Als bijzondere gevallen kun je ook nog de conflictlijn bekijken van:

- twee evenwijdige lijnen;
- een lijn en een punt daarop;
- een cirkel en een punt daarop;

maar die gevallen zijn flauw.

Hoe teken je in de praktijk?

Van deze conflictlijnen teken je de karakteristieke dingen:

- van een parabool is dat de top,
- van een ellips zijn dat de toppen op de lange as,
- van een hyperbooltak zijn dat de top en de asymptoten.

Met enkele (2 à 4) extra punten kun je dan de conflictlijn heel behoorlijk tekenen. Als twee typen conflictlijnen op elkaar aansluiten (we spreken dan van een samengestelde conflictlijn) moet je duidelijk de aansluitpunten aangeven.

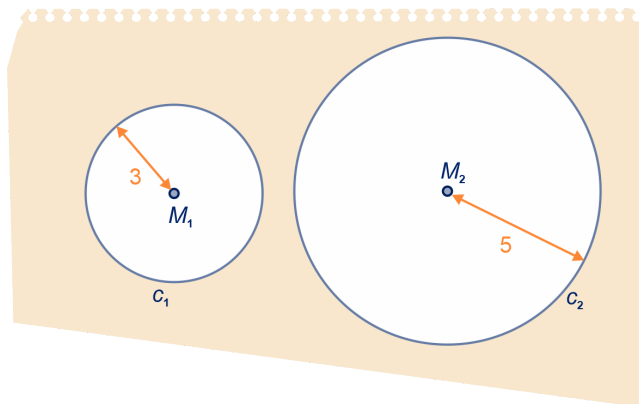
Sommige situaties kun je terugvoeren tot een van de bovenstaande.

We geven een voorbeeld.

Voorbeeld

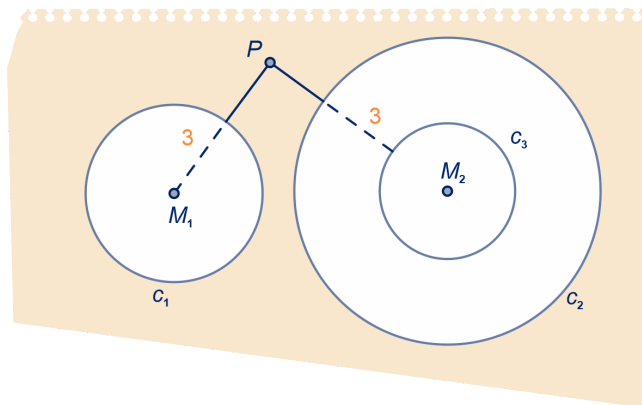
Two cirkels, buiten elkaar

Gegeven zijn twee cirkels c_1 en c_2 , met middelpunten M_1 en M_2 en stralen 3 en 5. Gevraagd wordt de conflictlijn van c_1 en c_2 .



De cirkel met middelpunt M_2 en straal 2 noemen we c_3 .

10.6 Gemengde opgaven



Dan geldt:

P ligt op de conflictlijn van c_1 en $c_2 \Leftrightarrow d(P, c_1) = d(P, c_2) \Leftrightarrow d(P, M_1) - 3 = d(P, c_3) - 3 \Leftrightarrow P$ ligt op de conflictlijn van M_1 en c_3 .

Dus: een punt ligt even ver van c_1 als van c_2 als en alleen als het even ver van M_1 als van cirkel c_3 ligt.

De conflictlijn is dus de hyperbooltak met M_1 als brandpunt en c_3 als richtcirkel.

74

Maak een tekening van de situatie in het voorbeeld met $d(M_1, M_2) = 9$.

Teken vervolgens de conflictlijn.

75

Two circles, binnen elkaar

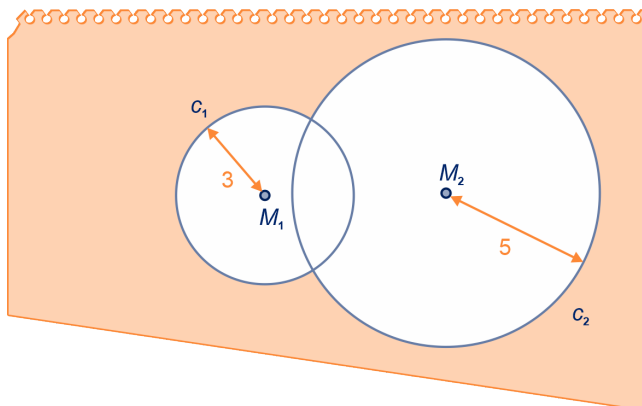
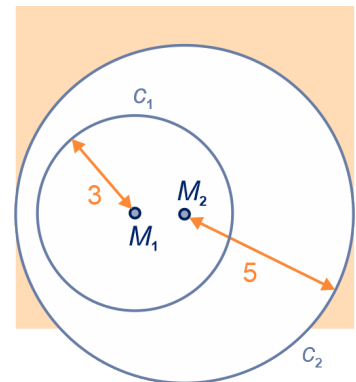
Gegeven zijn twee cirkels c_1 en c_2 met middelpunten M_1 en M_2 en stralen 3 en 5. Verder $d(M_1, M_2) = 1\frac{1}{2}$.

Maak een tekening van de situatie en teken de conflictlijn van c_1 en c_2 .

Licht je antwoord toe met een redenering zoals in het voorbeeld.

76

Two snijdende cirkels



10.6 Gemengde opgaven

Gegeven zijn twee cirkels c_1 en c_2 met middelpunten M_1 en M_2 en stralen 3 en 5. Er geldt: $d(M_1, M_2) = 6\frac{1}{2}$.

Maak een tekening van de situatie en teken de conflictlijn van c_1 en c_2 .

Onderscheid vier gevallen:

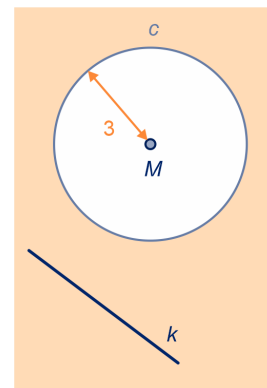
- punten binnen c_1 en buiten c_2 ,
- punten buiten c_1 en buiten c_2 ,
- punten binnen c_1 en binnen c_2 ,
- punten buiten c_1 en buiten c_2 .

77

Cirkel en lijn

Gegeven is een cirkel c met straal 3 en middelpunt M en een lijn k met $d(M, k) = 5$.

- Maak een tekening van de situatie.
- Beschrijf de conflictlijn van k en c zo precies mogelijk.
- Schets de conflictlijn in je tekening.



78

Halve lijn en lijn

Gegeven zijn de lijn k met vergelijking $y = 0$, het punt $P(0,2)$ en de halve lijn h met beginpunt P met richtingscoëfficiënt 2. h ligt 'boven' de y -as

- Teken k en h in een rooster en de conflictlijn van k en h .

De conflictlijn bestaat uit twee halve lijnen en een deel van een parabool.

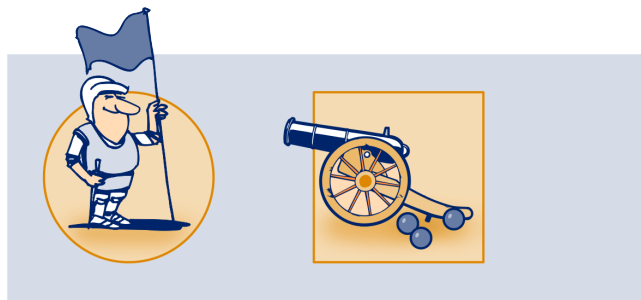
- Beschrijf elk van de stukken precies en ook de punten waar de stukken op elkaar aansluiten.

79



Cirkel en vierkant

De zee wordt verdeeld tussen een cirkelvormig en een vierkant eiland volgens het naastebuurprincipe. De diameter van het cirkelvormige eiland en de zijde van het vierkante eiland zijn gelijk; het cirkelvormige eiland ligt midden voor het vierkant eiland. De conflictlijn bestaat uit drie delen.



Teken op het werkblad de conflictlijn. Licht je tekening toe.

10.6 Gemengde opgaven

80

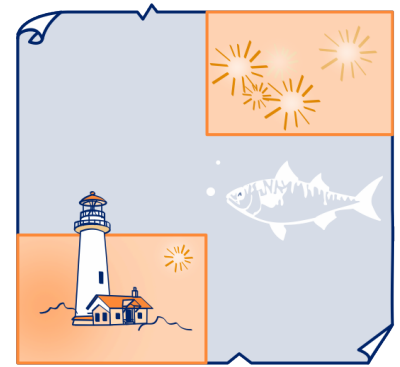


De zee wordt verdeeld tussen twee landen volgens het naaste-buurprincipe. Van de landen lopen twee kustlijnen oost-west en twee kustlijnen noord-zuid. De kustlijnen die noord-zuid lopen, liggen in elkaars verlengde.

Maak een tekening in een assenstelsel. Neem voor de hoekpunten van de landen $(0,2)$ en $(0,-2)$ met de kusten op de y -as of evenwijdig met de x -as.

Beschrijf vervolgens de conflictlijn met de overgangspunten zo precies mogelijk.

Teken de conflictlijn.



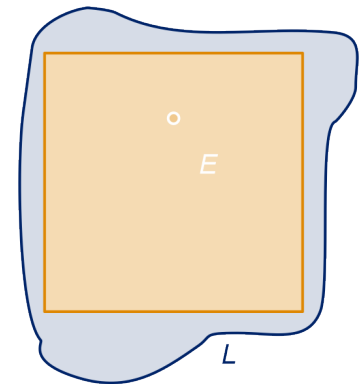
81

Hiernaast zie je een vierkant met zijde 8 en een punt E dat respectievelijk de afstanden 2, 4, 6 en 4 tot de zijden van het vierkant heeft. De punten die buiten of op het vierkant liggen, vormen een gebied L .

a Neem de figuur over en teken de conflictlijn van E en L en beschrijf welke vorm de verschillende delen van de conflictlijn hebben.

b Bewijs dat de conflictlijn niet overal glad is.

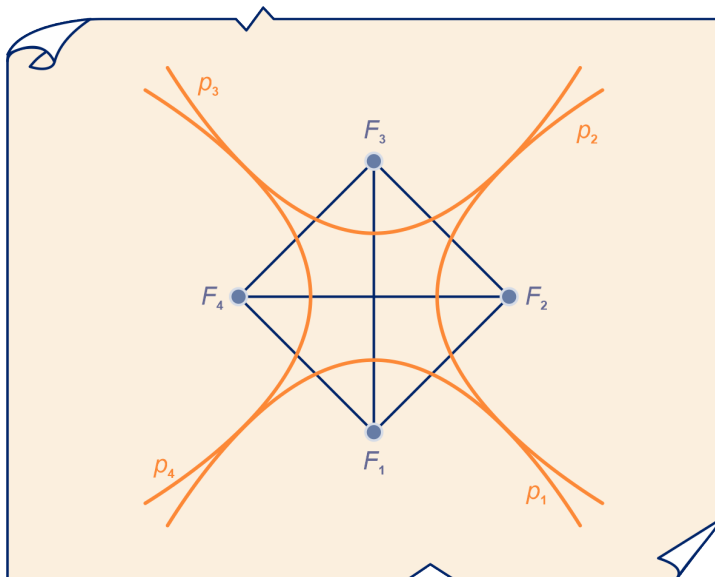
Profi-examen wiskunde B12, 1998 eerste tijdvak



82

Vier parabolen

Gegeven is een vierkant $F_1F_2F_3F_4$ waarvan de diagonalen lengte 4 hebben. De vier parabolen p_1 , p_2 , p_3 en p_4 hebben respectievelijk het punt F_1 , F_2 , F_3 en F_4 als brandpunt en als richtlijn die diagonaal van het vierkant, waar het betreffende brandpunt niet op ligt. Zie onderstaandefiguur.



a Bewijs dat de parabolen p_1 en p_2 elkaar raken.

10.6 Gemengde opgaven

Parabool p_1 snijdt de zijde F_1F_2 in het punt S .

b Bewijs dat de raaklijn in S aan p_1 door F_4 gaat.

Het raakpunt van de parabolen p_1 en p_2 noemen we R_{12} . Evenzo zijn R_{23} , R_{34} , en R_{41} de raakpunten van p_2 en p_3 , van p_3 en p_4 , en van p_4 en p_1 . De punten R_{12} , R_{23} , R_{34} en R_{41} zijn de hoekpunten van een vierkant V . De vier parabolen p_1 , p_2 , p_3 en p_4 sluiten een gebied G in.

c Bereken de verhouding van de oppervlakten van G en van het vierkant V .

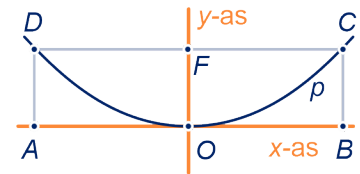
Profi examen wiskunde B 1998 tweede tijdvak

83

In een assenstelsel is een parabool p getekend met brandpunt F en een rechthoek met hoekpunten A en B op de x -as en C en D op de parabool p op dezelfde hoogte als het brandpunt F .

De top van de parabool is $O(0,0)$.

- a** Geef een vergelijking van de richtlijn r .
- b** Geef de coördinaten van C .
- c** Geef een vergelijking van p .



Isolijnen en conflictlijnen

Gegeven is een gebied.

De punten die buiten het gebied liggen, op afstand x van de rand van het gebied, vormen de zogenaamde **iso- x -afstandslijn**.

Bij twee gebieden V en W vormen de punten die even ver van beide gebieden liggen, de **conflictlijn** van V en W .

Bij het tekenen van isolijnen en conflictlijnen is het handig om het volgende te weten.

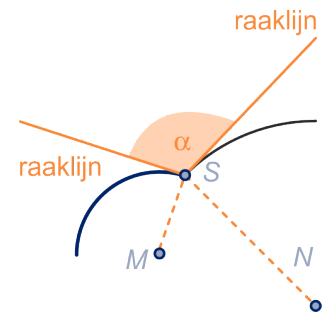
- De conflictlijn van twee punten A en B is de middelloodlijn van lijnstuk AB .
- De conflictlijn van twee snijdende lijnen a en b bestaat uit het tweetal bissectrices (deellijnen) van de hoeken die a en b met elkaar maken. Deze staan loodrecht op elkaar.

Soms zit er een knik in een punt S van een isolijn of conflictlijn. Dan wordt er naar de grootte van de knik gevraagd.

Dat gebeurt bijvoorbeeld in een gemeenschappelijk punt van twee cirkels.

Bekijk op beide cirkels een boog met eindpunt S . Onder de **hoek** die deze **cirkelbogen** met elkaar maken, verstaan we de hoek die de bijbehorende halve raaklijnen met elkaar maken, in de figuur α .

Neem aan dat de middelpunten van de cirkelbogen M en N zijn, dan geldt: $\alpha + \angle MSN = 180^\circ$.



Parabool, ellips, hyperbool

Speciale gevallen van conflictlijnen zijn de parabool, ellips en de hyperbool.

Gegeven zijn een punt F en een lijn of een cirkel r , waarbij F niet op r ligt.

De conflictlijn tussen F en r is een

- **parabool** als r een rechte lijn is.
Het punt F heet het **brandpunt** en de lijn r heet de **richtlijn** van de parabool.
- **ellips** als r een cirkel is en F binnen r ligt.
Als r middelpunt M heeft, dan zijn F en M de **brandpunten** en r **richtcirkel** van de ellips.
De straal van de richtcirkel heet de **ellipsconstante**.

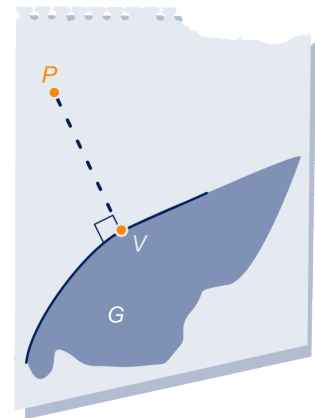
10.7 Eindpunt

- **hyperbooltak** als r een cirkel is en F buiten r ligt.
Als r middelpunt M heeft, is F het **brandpunt** van de hyperbooltak en r **richtcirkel** van de hyperbooltak.
Verwisselen we de plaatsen van M en F , dan is de conflictlijn het spiegelbeeld van de hyperbooltak in de middelloodlijn van het lijnstuk MF .
De twee hyperbooltakken vormen samen de hyperbool met brandpunten F en M .
De straal van de richtcirkel heet de **hyperboolconstante**.

Constructie vanuit de voetpunten

Als je r en F kent, kun je de parabool, ellips of hyperbool *construeren vanuit de voetpunten*.

Een punt van een gebied G dat het dichtst bij P ligt, noemen we een **voetpunt** van P op G .

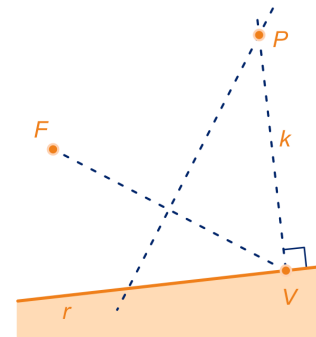


Als de conflictlijn een parabool is

Bij een punt P , kun je zijn voetpunt V op r bepalen. Omdat $|PF| = |PV|$, ligt P op de middelloodlijn van lijnstuk FV .

Omgekeerd kun je uitgaande van een voetpunt V op r het bijbehorende punt P op de parabool bepalen. Als volgt.

- Richt de loodlijn k in V op r op.
- Teken de middelloodlijn van lijnstuk FV .
- Het snijpunt k met de middelloodlijn is P .



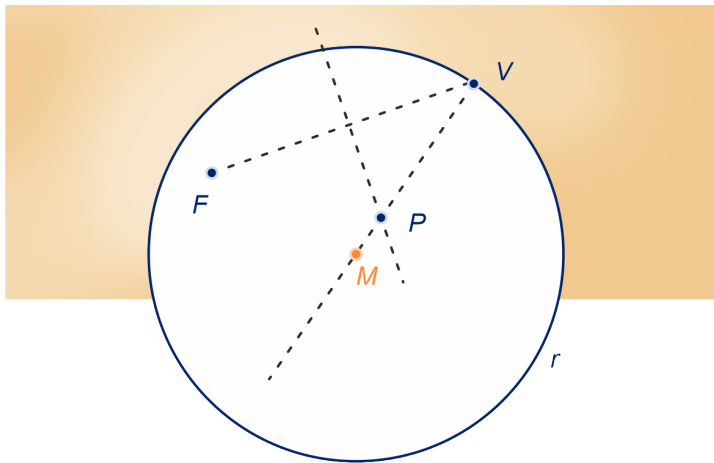
Als de conflictlijn een ellips of hyperbool is

Een punt P ligt op de ellips met brandpunt F en richtcirkel r als $d(P, F) = d(P, r)$. Als je een punt P op de ellips hebt, kun je zijn voetpunt V op r bepalen. Omdat $|PF| = |PV|$, ligt F op de middelloodlijn van lijnstuk FV .

Omgekeerd kun je uitgaande van een voetpunt V op r het bijbehorende punt P op de ellips bepalen.

Als volgt zie de figuur op de volgende bladzijde zie hieronder.

- Richt de loodlijn in V op r op (dat is de lijn van V naar het middelpunt M van r).
- Teken de middelloodlijn van lijnstuk FV .
- Het snijpunt van deze twee lijnen is P .



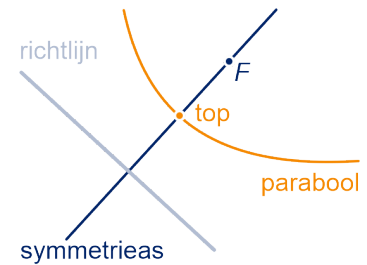
Eigenschappen van parabool, ellips, hyperbool

• Parabool

Een parabool heeft een **symmetrieas**, dat is de lijn door het brandpunt loodrecht op de richtlijn.

Het punt dat het dichtst bij de richtlijn ligt, ligt op de symmetrieas. Dat punt heet **top**,

Alle parabolen zijn gelijkvormig.



• Ellips

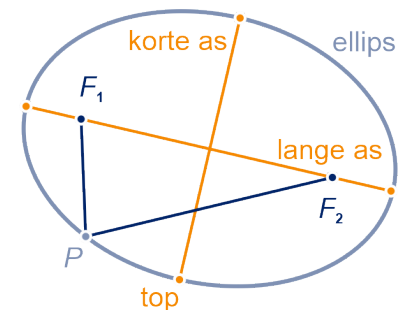
Als F_1 en F_2 de brandpunten zijn van een ellips, dan is voor elk punt P op de ellips de som van zijn afstanden tot F_1 en F_2 hetzelfde: $|PF_1| + |PF_2| = R$, waarbij R de ellipsconstante (de straal van de richtcirkel) is.

De ellips heeft twee **symmetrieassen**: de lijn F_1F_2 en de middelloodlijn van lijnstuk F_1F_2 .

Deze symmetrieassen snijden de ellips in de zogenaamde **toppen**.

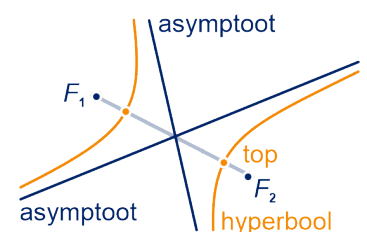
Het lijnstuk dat door de ellips van de lijn F_1F_2 wordt afgesneden heet de **lange as**.

Het lijnstuk dat door de ellips van de middelloodlijn van lijnstuk F_1F_2 wordt afgesneden heet de **korte as**.



• Hyperbool

Een hyperbool met brandpunten F_1 en F_2 heeft twee **symmetrieassen**: de lijn F_1F_2 en de middelloodlijn van het lijnstuk F_1F_2 . De eerste symmetrieas snijdt de hyperbool in de zogenaamde **toppen**. Het verbindingslijnstuk tussen de toppen heet de **as** van de hyperbool.



Voor elk punt P op de hyperbool is het absolute verschil van zijn afstanden tot F_1 en F_2 hetzelfde: $||PF_1| - |PF_2|| = R$, waarbij R hyperboolconstante (de straal van de richtcirkels) is.

Neem aan: de raaklijnen vanuit F_1 aan de richtcirkel met middelpunt F_2 raken de richtcirkel in R en S .

De middelloodlijnen van de lijnstukken RF en SF zijn dan de **asymptoten** van de hyperbool.

In een assenstelsel

Je kunt een assenstelsel aanbrengen. In dat geval krijgt een parabool, ellips, hyperbool een vergelijking.

• Parabool

Als het brandpunt $F(0,c)$ en richtlijn $y = -c$ is, dan is een vergelijking $x^2 = 4cy$.

Zie wiskunde b, hoofdstuk 13 paragraaf 7.

• Ellips

Neem aan: een ellips heeft ellipsconstante $2e$ en de afstand van de brandpunten is $2d$.

Dan $e > d$ en de lengte van de lange as is $2e$ en van de korte as $2\sqrt{e^2 - d^2}$.

Als je een assenstelsel aanbrengt zó, dat de brandpunten op de x -as liggen en de y -as de middenloodlijn van de brandpunten is, dan is een vergelijking van de ellips:

$$\frac{x^2}{e^2} + \frac{y^2}{e^2 - d^2} = 1.$$

• Hyperbool

Neem aan: een hyperbool heeft hyperboolconstante $2e$; de afstand van de brandpunten tot elkaar is $2d$. Dan $e < d$.

Als je een assenstelsel aanbrengt zó, dat de x -as door de brandpunten gaat en de y -as middelloodlijn van de brandpunten is, dan is een vergelijking van de hyperbool:

$$\frac{x^2}{e^2} - \frac{y^2}{e^2 - d^2} = 1.$$

De raaklijneigenschap

Raaklijnstelling

Gegeven is de parabool, ellips, hyperbool met F als brandpunt en r als richtlijn, richtcirkel.

P is een punt daarop en V is het voetpunt van P op r . Dan is de raaklijn in P middelloodlijn van lijnstuk VF en deze maakt gelijke hoeken met de lijnen PF en PV .

10.7 Eindpunt

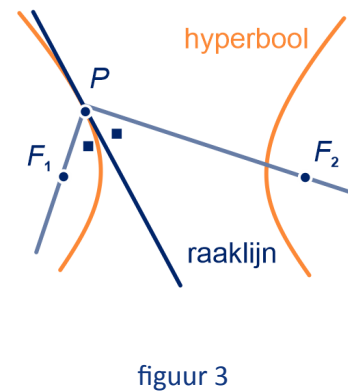
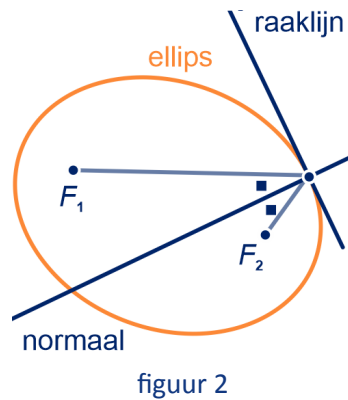
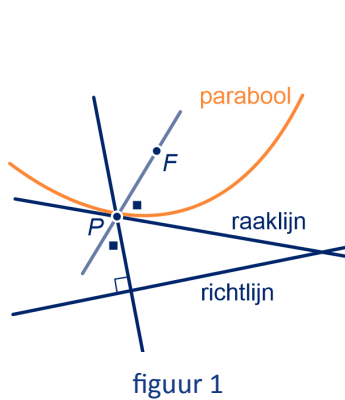
De raaklijnstelling heeft de volgende gevolgen.

- **Parabool**

De raaklijn in een punt P van een parabool maakt gelijke hoeken met de lijn die P verbindt met het brandpunt en de lijn door P loodrecht op de richtlijn. Zie figuur 1.

- **Ellips, hyperbool**

De raaklijn in een punt van een ellips of hyperbool maakt gelijke hoeken met de lijnen die dat punt verbinden met beide brandpunten. Zie figuur 2 en 3.



10.8 Extra opgaven

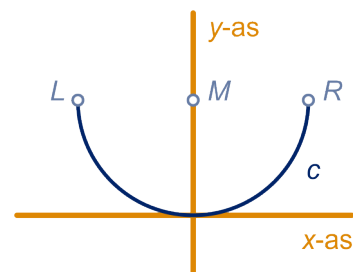
1

In een assenstelsel is de halve cirkel c getekend met middelpunt $M(0,2)$ met daarop de punten $L(-2,2)$ en $R(2,2)$.

- a Neem de figuur over en teken daarin de conflictlijn van c en de x -as.

De conflictlijn bestaat uit drie parabolstukken.

- b Geef van elk van die stukken het brandpunt en de richtlijn.
c Geef de coördinaten van de overgangspunten.

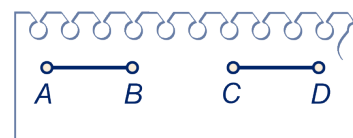


2

Hiernaast zijn twee lijnstukken AB en CD op één lijn getekend. De twee lijnstukken samen vormen het gebied V .

Er geldt: $|AB| = |CD| = 1\frac{1}{2}$ en $|BC| = 2$

- a Teken de iso-2-afstandslijn van V .
b Bereken de exacte lengte van die isolijn.



3

Gegeven is een parabool p met daarop een punt P . Door de top O van de parabool is een lijn evenwijdig aan de richtlijn getekend. De projectie van P op die lijn is Q . De raaklijn in P aan p snijdt die lijn in M .

Bewering: M is het midden van lijnstuk OQ .

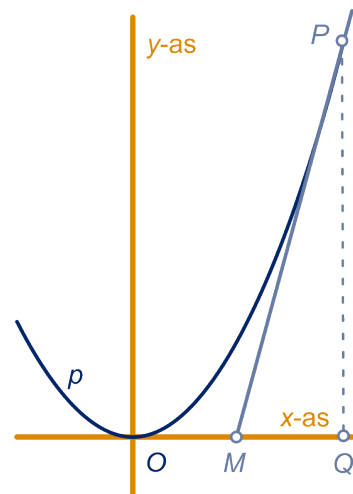
We bewijzen de bewering eerst met differentiëren.

Daarvoor brengen we een assenstelsel aan met de x -as door O evenwijdig aan de richtlijn en de y -as door O daar loodrecht op.

We passen de eenheid zó aan, dat de parabool vergelijking $y = x^2$ heeft. (Dat kan, want alle parabolen zijn gelijkvormig.)

Neem aan $P = (p, p^2)$.

- a Bewijs: $Q = (\frac{1}{2}p, 0)$.
b Bewijs de bewering ook zonder differentiëren.



4

Gegeven is de cirkel c met middelpunt M en straal 3. Lijn k op afstand 2 van M snijdt c in de punten P en Q .

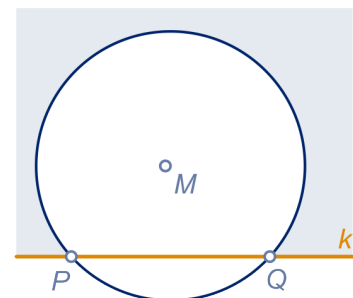
- a Teken c en k en ook de conflictlijn van c en k .
b Beschrijf de conflictlijn zo precies mogelijk.

De conflictlijn bestaat uit delen van twee parabolen die elkaar in P en Q snijden.

- c Bereken de hoek die de raaklijnen aan die parabolstukken in P met elkaar maken in één decimaal nauwkeurig.



Hint 8.



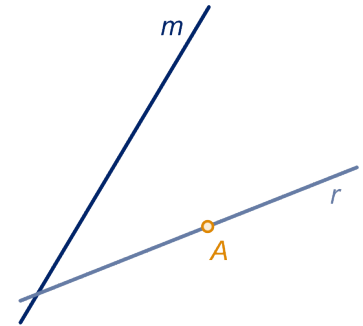
10.8 Extra opgaven

5



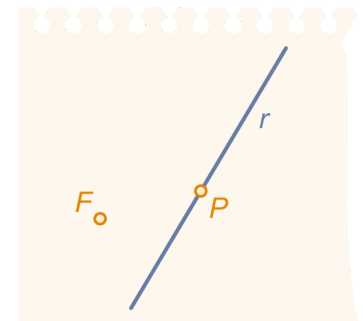
In de figuur is A een punt op een parabool p .
De lijn r is de raaklijn aan p in het punt A .
De lijn m is de as van p .
Teken op het werkblad het brandpunt en de richtlijn van p . Licht je werkwijze toe.

Examen wiskunde B12 (nieuwe stijl) 2002 I



6

Van een parabool is hiernaast het brandpunt F en een punt P getekend. De lijn r is de raaklijn in P aan de parabool.
Neem de figuur over en teken de richtlijn van de parabool. Licht je werkwijze toe.



7



V is het gebied gevormd door de drie lijnstukken: AB , BC en CD .
 c is een halve cirkel met middelpunt M en eindpunten A en D .
 M ligt op lijnstuk AD .

a Teken de conflictlijn van c en V binnen vierhoek $ABCD$.

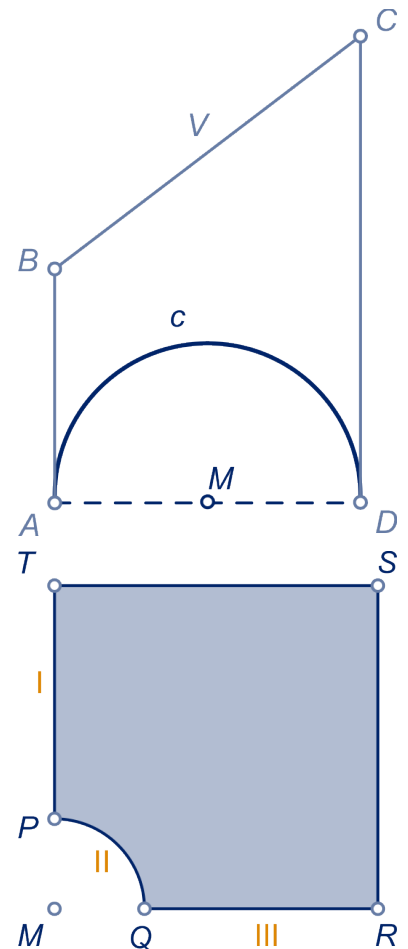
De conflictlijn bestaat uit drie parabolstukken.

b Geef van elk de richtlijn en het brandpunt.

$ABCD$ is een rechthoekig trapezium.

De 'overgangspunten' van de parabolstukken noemen we P ('links') en Q .

c Bewijs de lijnen BP en CQ loodrecht op elkaar staan.



8



Het gekleurde gebied in de figuur is een deel van het vierkant $MRST$ met zijde 7. De grens PQ is een kwartcirkel met middelpunt M en straal 2. Er zijn drie landen, I, II en III, die alle drie aan het gekleurde gebied grenzen. De grenzen met die landen zijn respectievelijk TP , PQ en QR . Het gekleurde gebied wordt onder de drie landen verdeeld volgens het naastebuur-principe. In het gebied ligt op de lijn MS een punt D dat even ver van de drie landen ligt.

a Bereken de afstand van D tot de drie landen in twee decimalen nauwkeurig.

b Teken op het werkblad de conflictlijnen tussen de drie landen in het gekleurde gebied. Licht je werkwijze toe.

10.8 Extra opgaven

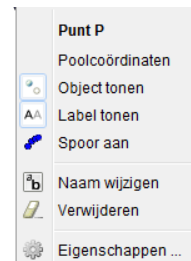
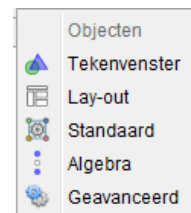
- c Bereken de hoek die de twee paraboolstukken in P met elkaar maken in graden nauwkeurig.

Naar examen wiskunde B12 (nieuwe stijl) 2002 II

Parabolen, ellipsen en hyperbolen kun je goed tekenen met een meetkunde-computerprogramma. Daarvoor construeer je vanuit een voetpunt op de richtlijn of richtcirkel een punt van de conflictlijn. Vervolgens sleep je het voetpunt over de richtlijn/richtcirkel. Het 'spoor' van het geconstrueerde punt is de conflictlijn. We gebruiken het programma GeoGebra.

Maak de assen onzichtbaar, via de knop 'voorkeuren' (rechtsboven). Je krijgt het menu in de figuur rechts.

Klik vervolgens op 'tekenvenster'.



1

- a Teken een lijn r en een punt F .
Kies een voetpunt V op r , met de knop 'punt op object'.
Construeer hierbij een punt P van de parabool met richtlijn r en brandpunt F .
Sleep V over r ; dan beweegt P over de parabool.
Je maakt het 'spoor' van P zichtbaar via 'spoor aan'. (Klik met de rechter muisknop op P , je krijgt het menu in de figuur hier-naast.).

Het punt P is het snijpunt van de loodlijn in V op r en de middelloodlijn van lijnstuk FV .

- b Hoe ligt deze middelloodlijn ten opzichte van de parabool?

2

We gaan verder met de parabool van opgave 1.

- a Hoe verandert de parabool als je r draait?
- b Hoe verandert de parabool als je het punt F naar r toe beweegt?

3

- a Teken een cirkel r en een punt F daarbinnen.
Kies een voetpunt V op r .
Construeer hierbij een punt P van de ellips met richtcirkel r en brandpunt F .
Sleep V over r ; dan beweegt P over de ellips.

Het punt P is het snijpunt van de loodlijn in V op r en de middelloodlijn van FV .

- b Hoe ligt deze middelloodlijn ten opzichte van de ellips?

4

We gaan verder met de ellips van opgave 3.

- a Hoe verandert de ellips als je F om het middelpunt van r draait?
- b Hoe verandert de ellips als je het punt F naar r toe beweegt?
En als je F naar het middelpunt van r toe beweegt?

5

- a Teken een cirkel r en een punt F daarbuiten.
Kies een voetpunt V op r .
Construeer hierbij een punt P van de hyperbooltak met richtcirkel r en brandpunt F .
Sleep V over r ; dan beweegt P over de hyperbooltak.

Het punt P is het snijpunt van de loodlijn in V op r en de middelloodlijn van lijnstuk FV .

- b Hoe ligt deze middelloodlijn ten opzichte van de hyperbooltak?
- c Welke punten kunnen als voetpunt optreden?

6

We gaan verder met de hyperbool van opgave 5.

- a Hoe verandert de hyperbool als je F om het middelpunt van r draait?
- b Hoe verandert de hyperbool als je het punt F naar r toe beweegt?

Met GeoGebra kun je de baan tekenen die een punt beschrijft als een ander punt wordt versleept. Een conflictlijn is ook zo'n baan: het is de verzameling punten met een zekere eigenschap. Zo'n verzameling punten noemt men ook wel LOCUS of MEETKUNDIGE PLAATS.

7

Gegeven zijn twee punten A en B .

- a Wat is de meetkundige plaats van de punten die op gelijke afstand van A en B liggen?

Gegeven zijn twee lijnen a en b .

- b Wat is de meetkundige plaats van de punten die op gelijke afstand van a en A liggen? Onderscheid twee gevallen.

Gegeven is een punt A en een positief getal r .

- c Wat is de meetkundige plaats van de punten die op afstand r van A liggen?

Gegeven zijn een cirkel c met middelpunt M en straal r en een positief getal s .

- d Wat is de meetkundige plaats van de punten die op afstand s van c liggen? Onderscheid drie gevallen.

Gegeven zijn een lijn a en een punt A dat niet op a ligt.

- e Wat is de meetkundige plaats van de punten die op gelijke afstand van A en a liggen?

Gegeven zijn een lijn a en daarop een punt A .

- f Wat is de meetkundige plaats van de punten die op gelijke afstand van A en a liggen?

Gegeven zijn een cirkel r en een punt A daarbinnen.

- g Wat is de meetkundige plaats van de punten die op gelijke afstand van A en r liggen?

Gegeven zijn een cirkel r en een punt A daarbuiten.

- h Wat is de meetkundige plaats van de punten die op gelijke afstand van A en r liggen?

Gegeven zijn een cirkel r en een punt A daarop.

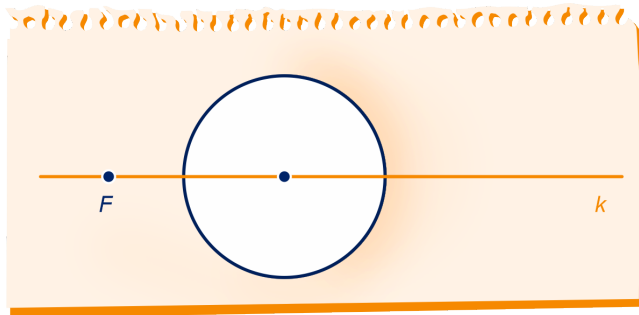
- i Wat is de meetkundige plaats van de punten die op gelijke afstand van A en r liggen?

8

Met dezelfde richtcirkel

Teken op het scherm een cirkel en een lijn k door zijn middelpunt.

Teken op k een punt F (met 'punt op object').



Construeer de conflictlijn met de cirkel als richtcirkel en F als brandpunt.

Versleep F over k en constateer hoe de conflictlijn verandert.

Gelijke afstand

- 1
 - a 450 km
 - b Het drielandenpunt van Duitsland, Denemarken en Groot-Brittannië ligt verder van Duitsland (540 km) dan van Groot-Brittannië (390 km).
 - c 195 km
 - d 520 km
 - e Langs het kortste verbindingslijnstuk.

- 2

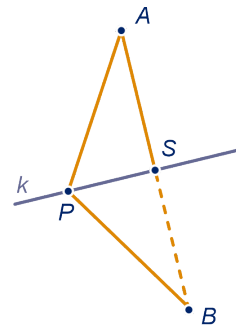
Zie figuur.

Het spiegelbeeld van A in k noemen we B . Dan is k de middelloodlijn van lijnstuk AB .

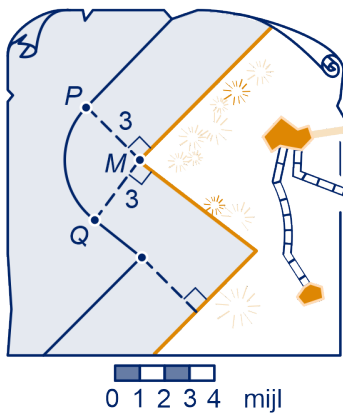
Volgens de driehoeksongelijkheid geldt:

$$|AS| + |BS| < |AP| + |BP|.$$

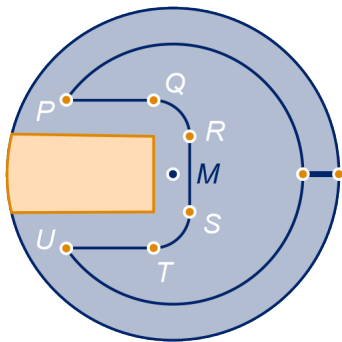
Omdat $|AS| = |BS|$ en $|AP| = |BP|$ volgt hieruit $|AS| < |AP|$.



- 3
 - a Zie volgend onderdeel.
 - b Zie figuur.



- 4
 - a Zie figuur.



- b 5 meter

10 Conflictlijnen

5

- a $2\pi \cdot (2 + x)$
- b $12 + 2\pi \cdot x$
- c $14 + 2\pi \cdot x$
- d $14 + 2\pi \cdot x$

De iso- x -afstandslijn bestaat uit vier rechte stukken van lengte 2, 3, 4 en 5 en uit vier sectoren van een cirkel met straal 2.

Als de hoeken van de vierhoek α , β , γ en δ zijn, zijn de hoeken van de sectoren $180^\circ - \alpha$, $180^\circ - \beta$, $180^\circ - \gamma$ en $180^\circ - \delta$. Deze vullen elkaar exact aan tot een volle cirkel.

6

$$\pi \cdot (2 + x)^2 - \pi \cdot 2^2 = \pi \cdot (x^2 + 4x),$$

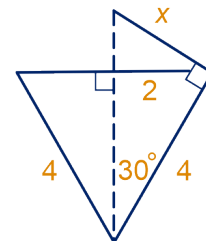
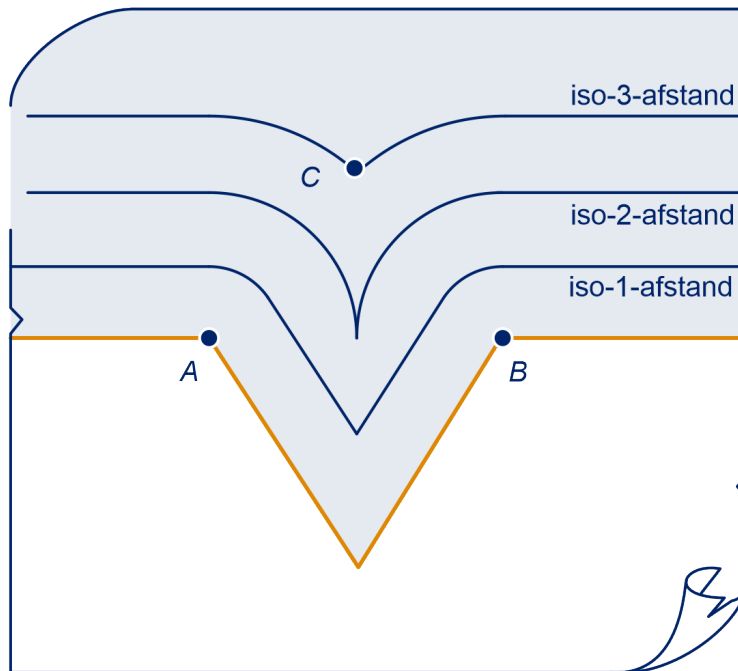
$$12x + \pi \cdot x^2,$$

$$14x + \pi \cdot x^2,$$

$$14x + \pi \cdot x^2$$

7

- a Zie de figuur hieronder links. De middelpunten van de cirkelbogen zijn A en B .



- b Zie de figuur hierboven rechts.

$$\frac{x}{4} = \tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{4}{\sqrt{3}} = 1\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

8

- a 60° en 120°
- b 0° en 180°

9

- a $\sqrt{2}$
- b 90°

10

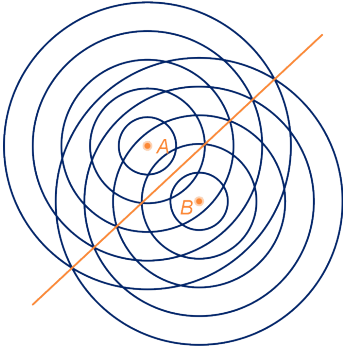
- a Zie de figuur bij opgave 7. Noem de gevraagde hoek α . Er geldt: $\alpha + \angle ACB = 180^\circ$.
 $\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \angle ACB\right) = \frac{2}{3}$, dus $\alpha = 180^\circ - 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 96^\circ$.

10 Conflictlijnen

- b Noem het gemeenschappelijk punt van de twee bogen D , dan is driehoek ABD gelijkzijdig, dus de gevraagde hoek is $180^\circ - \angle ADB = 120^\circ$.
- c Noem het knikpunt E . Dan is driehoek ABE gelijkbenig met twee zijden met lengte x en tophoek $\angle AEB = 180^\circ - 170^\circ = 10^\circ$, dus $\frac{2}{x} = \sin(5^\circ) \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sin(5^\circ)} \approx 22,95$.
- d Nee, als S het 'overgangspunt' is, dan zouden AS en BS evenwijdig zijn.

11

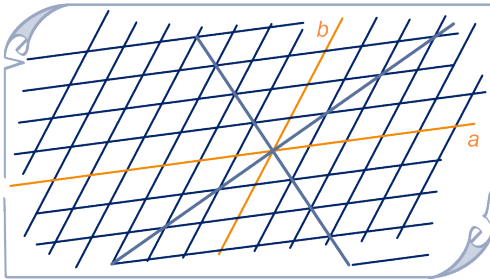
- a De snijpunten van de cirkels met dezelfde straal.
- b Zie figuur.



De middelloodlijn van lijnstuk AB .

12

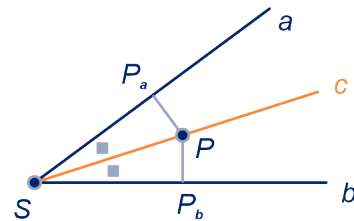
- a Dat zijn de snijpunten van de lijnen die op gelijke afstand van a en b liggen.
- b Zie figuur.



De vier bissectrices van de hoeken die a en b met elkaar maken.

13

- a Zie figuur.
De loodrechte projecties van P op a en b P_a en P_b .
Dan zijn de driehoeken SPP_a en SPP_b congruent, want ze hebben beide een rechte hoek, de hoeken PSP_a en $PS P_b$ zijn even groot en de zijde SP hebben ze gemeen (HZH). Dus $|PP_a| = |PP_b|$.
- b
- Vanwege de driehoeksongelijkheid in driehoek TQQ_b
 - Vanwege het vorige punt en $|TQ_b| > |QQ_b|$ (afstand punt tot lijn)
 - Vanweg het vorige punt en $|TQ| + |TT_b| = |QQ_a|$



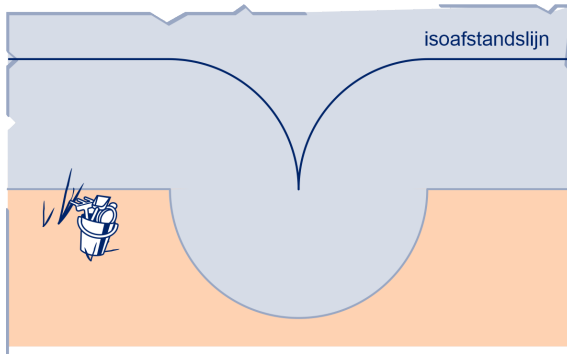
10 Conflictlijnen

14

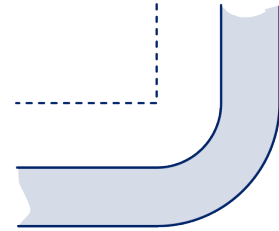
- a Dat is de lijn die "halverwege" de twee evenwijdige lijnen ligt.
- b Dat is de middelloodlijn van de middelpunten van de twee cirkels.

15

- a Zie figuur.



- b Nee. Hiernaast staat een voorbeeld.
De rand van het gebied bestaat uit een kwart cirkel met straal 1 en twee halve lijnen; hij heeft geen knik. De iso-1-afstandslijn (gestippeld) maakt een hoek van 90° .



Naastebuurprincipe

16

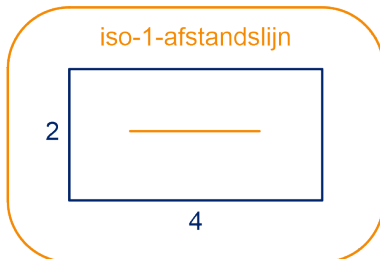
Het zijn geen isoafstandslijnen, want bij de "west-" en "oostpunt" liggen ze verder van G dan bij de "noord-" en "zuidpunt".

17

- a -
- b Nee

18

- b - Nee
- c Zie figuur.

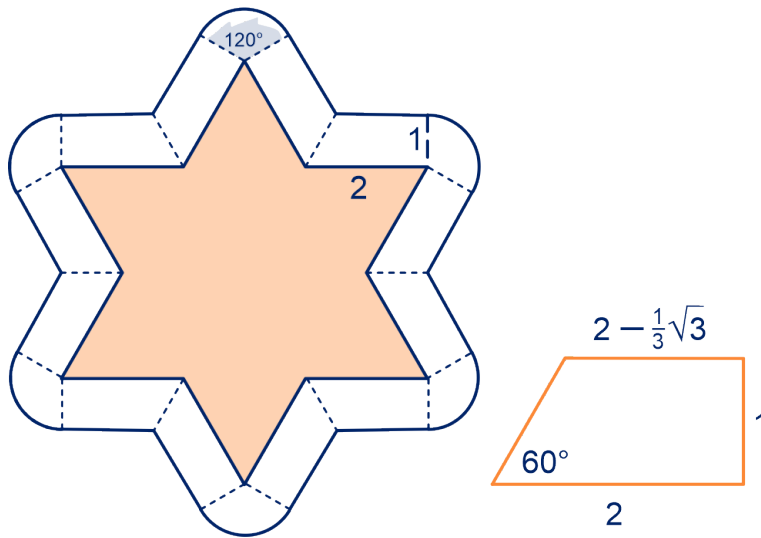


- d Nee. Een hoekpunt van de rechthoek ligt op afstand 1 van de buitenisoafstandslijn en op afstand $\sqrt{2}$ van de binnenisoafstandslijn.

10 Conflictlijnen

19

a Zie figuur.



b Die bestaat uit 12 lijnstukken gelijk aan de zijde van lengte $2 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$ van het rechthoekig trapezium in de figuur en 6 cirkelbogen van 120° en straal 1.

Dus de lengte is: $12\left(2 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right) + 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2\pi = 24 - 4\sqrt{3} + 4\pi$.

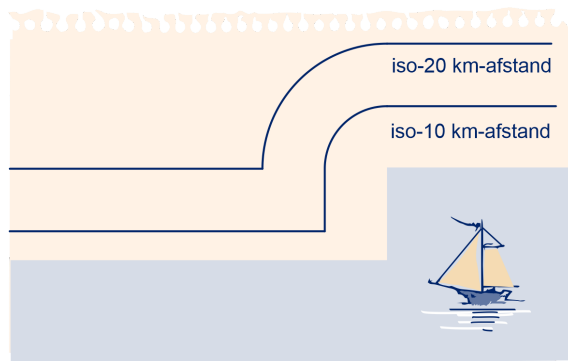
c Die bestaat uit de oppervlakte van 12 trapezia en 6 cirkelsectoren van 120° met straal 1.

De oppervlakte van een trapezium is $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(2 + 2 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$.

De gevraagde oppervlakte is dus $6 \cdot 1 \cdot \left(2 + 2 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right) + 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 = 24 - 2\sqrt{3} + 2\pi$.

20

a Zie figuur.



b $90 + 5\pi$, $70 + 10\pi$

c $1000 + 25\pi$, $1800 + 100\pi$

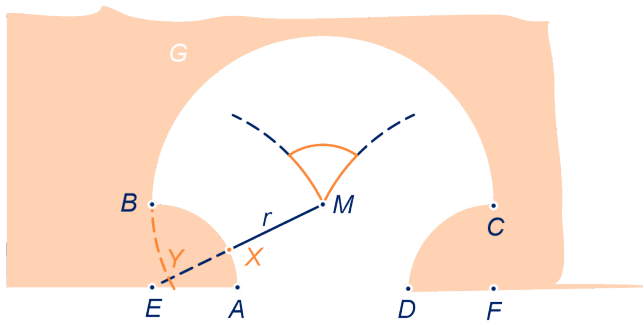
21

a Zie figuur op de volgende bladzijde.

Het snijpunt van de lijn EM met boog AB noemen we X en de afstand van X tot M noemen we r . Dan moeten we de iso- r -afstandslijn tot de kust tekenen.

Die bestaat uit twee cirkelbogen door M de een met middelpunt E en de ander met middelpunt F en een cirkelboog met middelpunt M en straal $6 - r$.

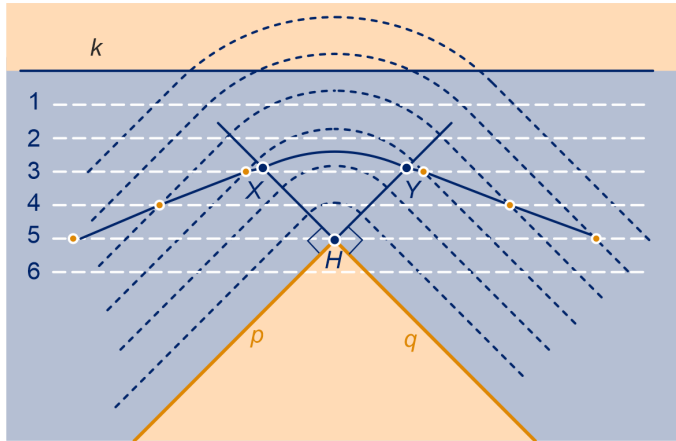
10 Conflictlijnen



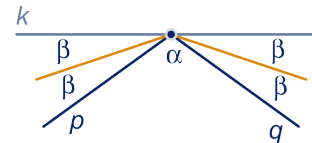
- b** L ligt op de cirkel met middelpunt E , ligt dus op de iso- x -afstandslijn waarbij $x = |LE| - |AE|$.
 L ligt ook een cirkel met middelpunt M waarbij $|ML| + x = 6$.
 Dus $|LM| + |LE| = 6 - x + x + |AE| = 9$.

22

- a** Zie figuur.



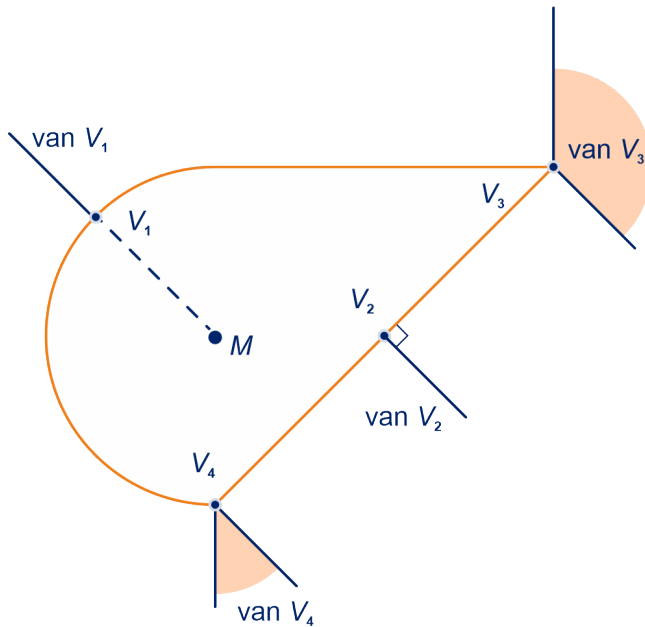
- b** De punten X en Y , zie figuur.
c De punten op de conflictlijn 'links' van X liggen even ver van k als van p , dus op de bissectrice van k en p .
 De punten rechts van Y liggen op de bissectrice van k en q .
d 135°
 Voor uitleg, zie volgend onderdeel.
e Zie figuur.
 De gevraagde hoek is $\alpha + 2\beta$.
 Er geldt: $\alpha + 4\beta = 180^\circ$, dus $\alpha + 2\beta = \alpha + \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}\alpha + 90^\circ$.



10 Conflictlijnen

23

- a Zie figuur bij het volgend onderdeel.
- b Zie figuur.



24

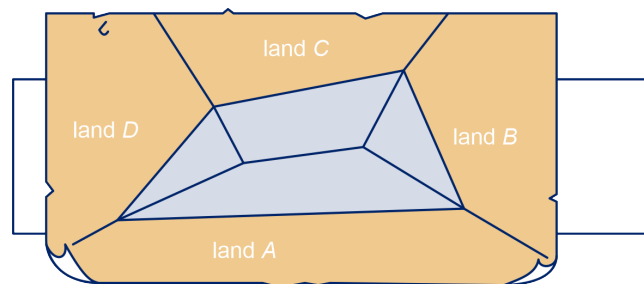
- a Op de bissectrice van de hoek van de inham, vanaf het hoekpunt tot aan de loodrechte projectie van het linker beginpunt van de inham op de bissectrice.
- b Het gebied buiten een driehoek en het middelpunt van de ingeschreven cirkel van die driehoek.
- c Het gebied buiten een cirkel en het middelpunt van die cirkel.

25

- a De binnenzee wordt verdeeld door de drie bissectrices van de driehoek.
- b Dat zijn de bissectrices van de hoeken van de binnenzee. De bissectrices gaan door één punt.
- c Die zijn even groot.

26

- a Zie figuur.

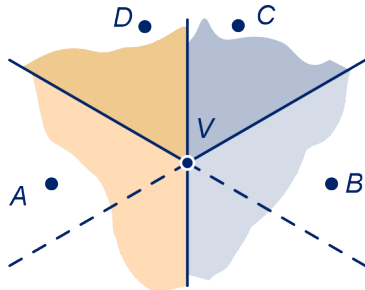


- b Voor punten op dat lijnstuk zijn de punten die het dichtst bij land liggen loodrechte verbindingslijnstukken naar de kustlijn van A en C. Aangezien deze even lang moeten zijn, liggen die punten op de bissectrice van die twee kustlijnen.

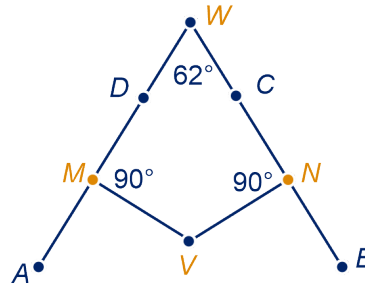
10 Conflictlijnen

27

- a Zie figuur 1 hieronder. De 'grenzen' zijn middelloodlijnen van zijden van het trapezium.
- b Neem aan: V is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC , ligt dus even ver van de punten A , B en C .
Omdat de middelloodlijn van AB symmetrieas van het trapezium is, is deze lijn ook middelloodlijn van CD , dus ligt V even ver van C als van D .
- c Zie figuur 2. De lijnen AD en BC snijden elkaar in W . Dan $\angle AWB = 180^\circ - 2 \cdot 59^\circ = 62^\circ$, dus M en N zijn de middens van de opstaande zijden van het trapezium. Dan $\angle MVN = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$, dus de gevraagde hoeken zijn: $\frac{1}{2} \cdot 118^\circ = 59^\circ$, 59° , $180^\circ - 59^\circ = 121^\circ$ en 121° .



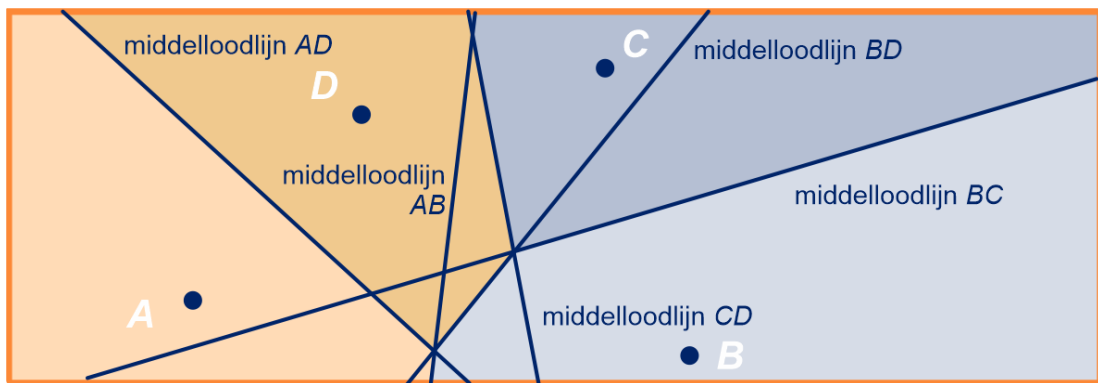
figuur 1



figuur 2

28

Zie figuur.



10 Conflictlijnen

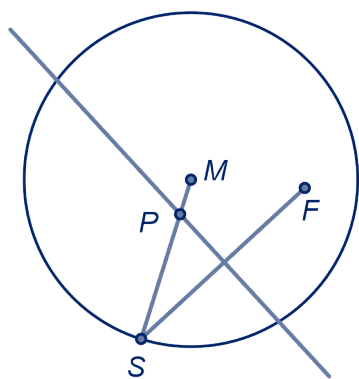
29

a Zie figuur 1.

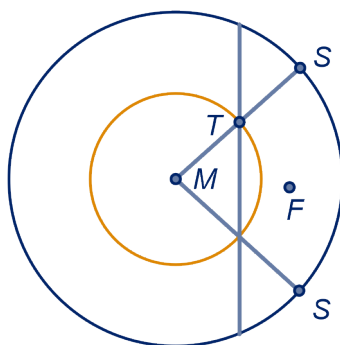
P is het snijpunt van de middelloodlijn van lijnstuk SF met lijn SM .

b Zie figuur 2.

Teken de cirkel met middelpunt M en een straal die half zo groot is als de straal van de gegeven cirkel. De punten T zijn snijpunt van die cirkel en de middelloodlijn van MF . De gevraagde punten S zijn de snijpunten van een lijn MT met de oorspronkelijke cirkel.



figuur 1



figuur 2

30

De antwoorden bij de opgaven 30, 31 en 32 staan na de antwoorden van paragraaf 9.

33

- a -
- b -

34

a De drie figuren die je getekend hebt zijn gelijkvormig.

b De hoekpunten van de rechthoek die op de parabool liggen noemen we P en Q .

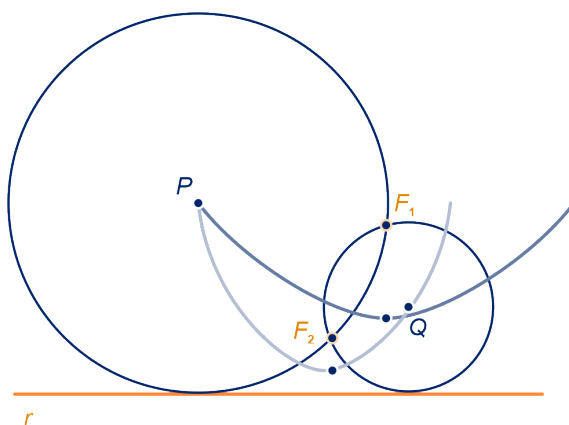
P ligt op de parabool, dus $|PV| = |FV|$. Verder: $|QF| = |PF|$, dus de verhouding is $2 : 1$.

35

a Zie figuur.

Teken de cirkels met middelpunt P en Q die de richtlijn raken. Hun snijpunten zijn de mogelijke brandpunten.

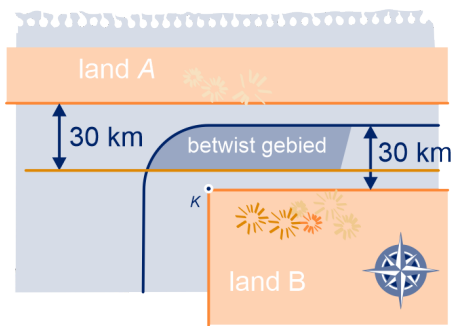
b Zie figuur. Merk op dat de lijn door het brandpunt loodrecht op de richtlijn symmetrieas van de parabool is en dat de top van de parabool op de symmetrieas ligt op gelijke afstand van het brandpunt en de richtlijn.



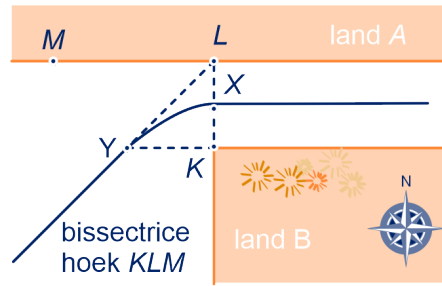
10 Conflictlijnen

36

a Zie figuur 1.



figuur 1



figuur 2

b Zie figuur 2.

'Links' van Y is de conflictlijn de bissectrice van hoek KLM, 'tussen' X en Y deel van de parabool met brandpunt K en richtlijn de kustlijn van land A en 'rechts' van X de middenparallel van de oost-west-kustlijnen.

c $|PK| = |PD|$ want P ligt op de conflictlijn en $|KE| = |PD| = 30$, Dus $|PE| = |PF|$.

37

a $(1,3)$, $(3,1)$ en $(7,3)$

b Brandpunt in beide gevallen $(3,3)$ en richtlijnen $x = -1$ en $y = -1$.

c De afstand punt $(2,y)$ tot de x-as is y, dus de afstand tot de cirkel is ook y, dus de afstand tot $(3,3)$ is $y + 1$.

De afstand van $(2,y)$ tot $(3,3)$ is $\sqrt{1 + (y - 3)^2}$.

Dus: $y + 1 = \sqrt{1 + (y - 3)^2}$.

Deze vergelijking lossen we op:

$$y + 1 = \sqrt{1 + (y - 3)^2}$$

kwadrateren

$$(y + 1)^2 = 1 + (y - 3)^2$$

haakjes wegwerken

$$y^2 + 2y + 1 = y^2 - 6y + 10$$

De oplossing van deze vergelijking is dus $y = 1\frac{1}{8}$.

d Het andere punt heeft een y-coördinaat groter dan 3. Het ligt even ver van de y-as als van de cirkel. De afstand tot de y-as is 2, dus de afstand tot $(3,3)$ is 3.

Dus: $3 = \sqrt{1 + (y - 3)^2} \Leftrightarrow (y - 3)^2 = 8 \Leftrightarrow y - 3 = \pm 2\sqrt{2}$, dus $y = 3 + 2\sqrt{2}$.

38

a $(0,0)$; de y-as

b De afstand van (x,y) tot de lijn $y = -1$ is $|y + 1|$ en de afstand tot $(0,1)$ is $\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$.

herschrijven:

$$|y + 1| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 = x^2 + (y - 1)^2 \Leftrightarrow$$

$$y^2 + 2y + 1 = x^2 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x^2.$$

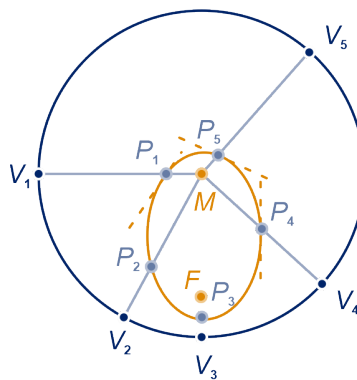
39

- c Een punt op P is van de vorm $(a, \frac{1}{4}a^2)$. Als je dit punt met $\frac{1}{4}$ ten opzichte van O vermenigvuldigt, krijg je het punt $(\frac{1}{4}a, \frac{1}{16}a^2)$. Dit punt voldoet aan de vergelijking $y = x^2$.
Je krijgt ook alle punten van de parabool met vergelijking $y = x^2$, want $\frac{1}{4}a$ neemt alle waarden aan als a dat doet.
- a De parabool met richtlijn $y = -1$ en brandpunt $(0,1)$ moet je met $\frac{1}{4}$ ten opzichte van O vermenigvuldigen om de standaard-parabool te krijgen. Dus de richtlijn heeft vergelijking $y = -\frac{1}{4}$ en het brandpunt is $(0, \frac{1}{4})$.
- b Stel de richtlijn heeft vergelijking $y = -a$, met $a > 0$, dan is het brandpunt $(-2, a-2)$, want de top van de parabool is $(-2, -1)$. Een punt van de parabool is bijvoorbeeld $(0,1)$. De afstand van $(0,1)$ tot de lijn $y = -a$ is hetzelfde als de afstand van $(0,1)$ tot $(-2, a-2)$, dus $a+1 = \sqrt{2^2 + (a-3)^2}$;
dit geeft $a = 1\frac{1}{2}$, dus het brandpunt is $(-2, -\frac{1}{2})$ en de richtlijn heeft vergelijking $y = -1\frac{1}{2}$.

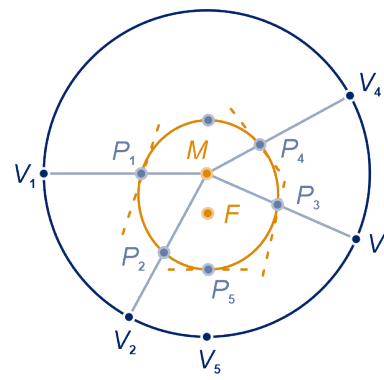
Ellips, hyperbool, meer parabool

40

- a Zie figuur 1 hieronder.
b Zie figuur 2 hieronder.



figuur 1



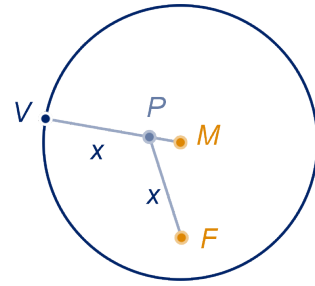
figuur 2

- c Noem de "uiterste punten" van de ellips P en Q en de bijbehorende voetpunten V en W , met P het dichtst bij F .
Neem aan $|FM| = 1$.
Uit $|VP| + |PF| = 3$ en $|VP| = |PF|$ volgt: $|PF| = 1\frac{1}{2}$.
Uit $|WQ| + |QF| = 5$ en $|WQ| = |QF|$ volgt: $|QF| = 2\frac{1}{2}$.
Dus $|PQ| = |PF| + |QF| = 4$.
Als $|FM| = 3$ vind je op dezelfde manier dat $|PQ| = 4$.
- d Nee in de twee voorbeelden zie al dat dit niet zo is.
De verhouding van de lange en de korte as is niet voor elke ellips hetzelfde. Die verhouding varieert zelfs van 1 : 1 (bij een cirkel) tot 1 : willekeurig groot getal (bij een "lange-platte" ellips).

10 Conflictlijnen

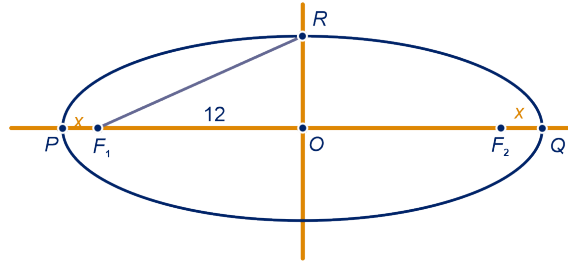
41

- a Zie figuur.
Noem de straal van de cirkel R .
Dan geldt: $|PF| + |PM| = x + R - x = R$.
- b Die bestaat ook uit de punten P waarvoor geldt:
 $|PF| + |PM| = R$. Het is dus precies dezelfde ellips.



42

- a Zie figuur.



Stel dat lijn F_1F_2 de ellips in P en Q snijdt.

Stel $|PF_1| = x$, dan vanwege symmetrie: $|QF_2| = x$. Er geldt: $|PF_1| + |PF_2| = 26$, dus $|PF_2| = 26 - x$.

Dan $|PQ| = |PF_2| + x = 26 - x + x = 26$.

Dus de lange as heeft lengte 26.

- b Neem aan dat R op de korte as ligt en het snijpunt van de assen O is.

Dan $|RF_1| = \frac{1}{2} \cdot 26 = 13$ en $|OF_1| = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$ vanwege symmetrie.

Uit de stelling van Pythagoras volgt dan dat $|OR| = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$, dus de korte as heeft lengte 10.

43

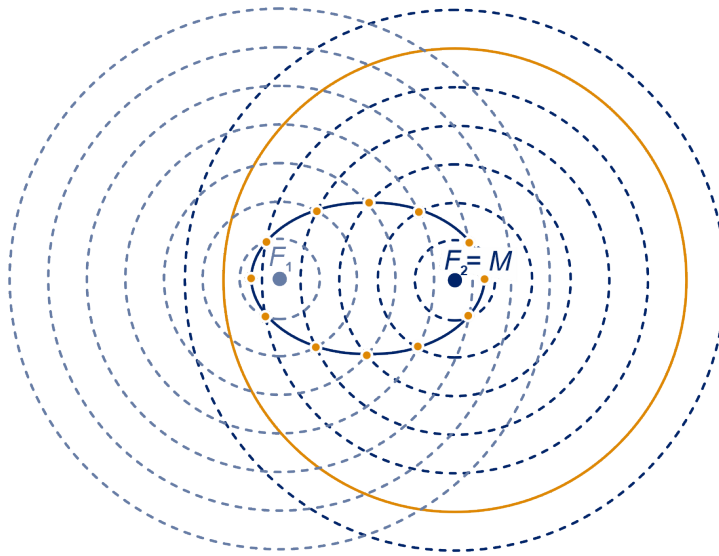
- a 34
- b Zeg R is het punt $(0,8)$ en F (op de x -as) is een van de brandpunten, dan $|RF| = \frac{1}{2} \cdot 34 = 17$.

Uit de stelling van Pythagoras in driehoek OFR volgt dan: $|OF| = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$. Dus de brandpunten zijn $(\pm 15, 0)$.

10 Conflictlijnen

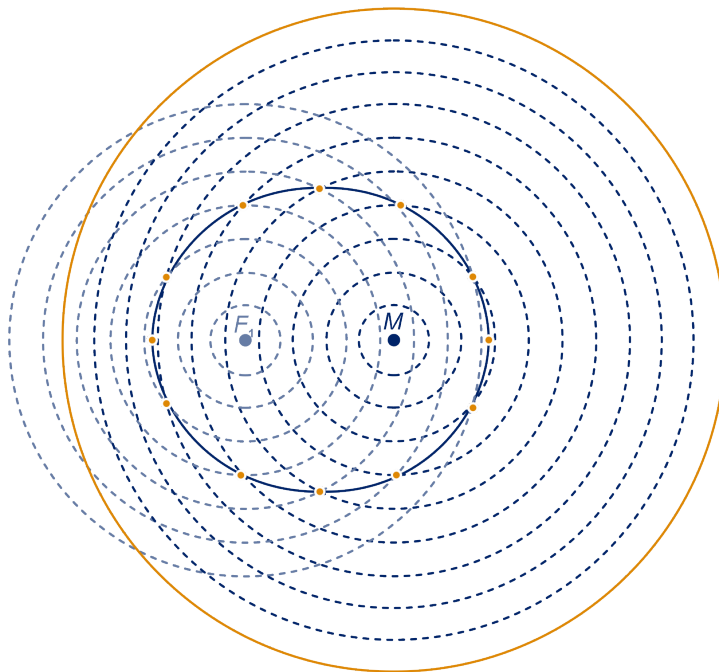
44

a Zie figuur.



ellipsconstante = 6

b Zie figuur.



ellipsconstante = 10

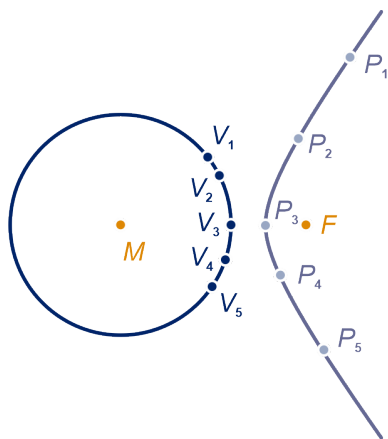
45

a $10\frac{1}{2}$

b $14\frac{1}{2}$

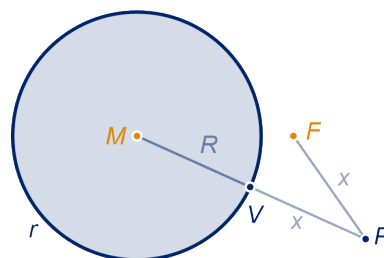
46

Zie figuur.



47

- a Zie figuur.
De straal van r noemen we R .
Dan $|PM| - |PF| = R$.
- b Die is tegengesteld aan de straal van de richtcirkel.
- c Die zijn elkaars spiegelbeeld in de middelloodlijn van lijnstuk FM .



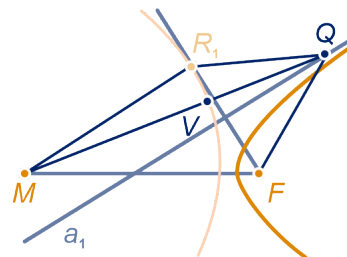
48

- a Dat is de cirkel met middelpunt F_1 en straal 4.
- b Zie figuur.
De toppen noemen we P en Q en $|PF_1| = x$.
Er geldt: $|PF_2| - |PF_1| = 4$, dus $|PF_2| = 4 + x$. Vanwege symmetrie geldt ook $|PF_2| = 6 - x$, dus $6 - x = 4 + x \Leftrightarrow x = 1$, dus de as heeft lengte 4.



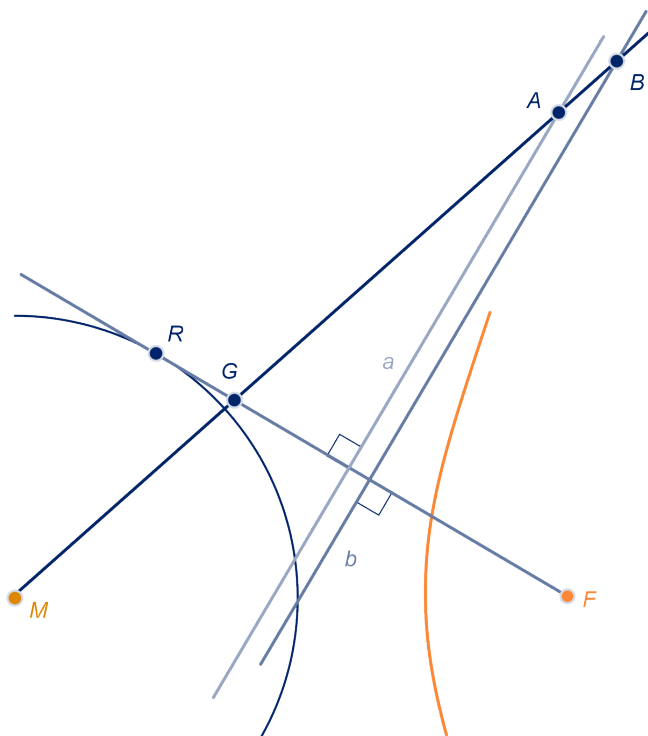
49

- a Verderop vind je het antwoord.
- b -
- c Neem aan: R_1 het voetpunt is van een punt P van de hyperbooltak. Dan ligt P op de lijn MR_1 . Die lijn staat loodrecht op lijn R_1F (want R_1F is raaklijn aan de cirkel). Dus de middelloodlijn van lijnstuk FR_1 is evenwijdig met lijn MR_1 , dus ligt P niet op de middelloodlijn. Dus $d(P, F) \neq d(P, r)$.
- d a_1 en MR_1 zijn evenwijdig (zie c). Dus is a_1 middenparallel in driehoek FMR_1 . Omdat a_1 door het midden van lijnstuk RF , gaat a_1 ook door het midden van lijnstuk MF .
- e Zie figuur.
Als Q op a_1 ligt, is $|QF| = |QR_1|$.
Het snijpunt van lijn QM met de richtcirkel noemen we V . Dan volgt uit de driehoeksongelijkheid dat $|MR_1| + |QR_1| > |QM|$, dus $|VQ| < |QR_1|$, want $|MR_1| = |MV|$. Dus $d(Q, F) > d(Q, r)$.



50

- a Zie figuur.



- b** De lijn RF ligt geheel buiten r (op het punt R na), want RF is raaklijn aan r . Dus ligt G buiten r . Dus is $d(B, r) > |BG|$.
En $|BG| = |BF|$, want B ligt op de middelloodlijn van lijnstuk FG . Dus $d(B, r) > |BF|$.
- c** $d(A, r) < |AR| = |AF|$.
- d** A ligt links van de conflictlijn (dat is de kant waar r ook ligt) en B ligt rechts van de conflictlijn (dat is de kant waar F ook ligt). De conflictlijn van r en F loopt dus tussen A en B door. Het snijpunt van de conflictlijn met lijnstuk AB is een punt dat tussen de lijnen a en b ligt.

Anders bekeken

51

- a** $\alpha = 90^\circ$
- b** Voor α iets groter dan β
- c** Door de top van de kegel
- d** Die zijn gelijkvormig (ze ontstaan uit elkaar door een vermenigvuldiging vanuit de top van de kegel).

52

- a** Een stuk parabool
- b** Een stuk hyperbool
- c** Een (stuk) ellips

53

- a** De bovenste rand van de lichtkegel is evenwijdig aan de vloer.
- b** De lichtkegel moet steiler omlaag schijnen.
De lichtkegel moet minder steil omlaag schijnen.
- c** Een deel van een hyperbool

54

De lichtbron bevindt zich op dezelfde hoogte als het hoogste punt van de bol.

55

a -

b Bijvoorbeeld $(x(t), y(t)) = (4 \cdot \cos(t), 3 \cdot \sin(t))$

56

a Volgens de theorie uit 6v krijg je: $\frac{y}{a} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4a} \cdot x^2$

b Dan $a = \frac{1}{4}$, dus de richtlijn heeft vergelijking $y = -\frac{1}{4}$ en het brandpunt is $(0, \frac{1}{4})$.

57

a Voor elk punt P op de ellips geldt: $|PF_1| + |PF_2| = 20$. Stel je voor dat je een koordje van F_1 via P naar F_2 gespannen hebt. Als P in B ligt, dan zit het koordje dubbel over het stuk van B naar F_2 . $|AF_1| = |BF_2|$, dus de lange as is gelijk aan de ellipsconstante 20.

Als P in D ligt, zie je dat de schuine zijde van driehoek ODF_1 de helft van de ellipsconstante is, dus 10. De korte as is dus $2\sqrt{10^2 - 8^2} = 12$.

b $a = 10$ en $b = 6$

c Het linkerlid van de gelijkheid is $|PF_1|$ en het rechterlid $20 - |PF_2|$.

d

$$\sqrt{(x+8)^2 + y^2} = 20 - \sqrt{(x-8)^2 + y^2}$$

kwadrateren

$$x^2 + 16x + 64 + y^2 = 400 - 40\sqrt{(x-8)^2 + y^2} + x^2 - 16x + 64 + y^2$$

Vereenvoudigen

$$32x - 400 = -40\sqrt{(x-8)^2 + y^2}$$

delen door -8

$$50 - 4x = 5\sqrt{(x-8)^2 + y^2}$$

e

$$50 - 4x = 5\sqrt{(x-8)^2 + y^2}$$

kwadrateren

$$2500 - 400x + 16x^2 = 25(x^2 - 16x + 64)$$

vereenvoudigen

$$900 = 9x^2 + 25y^2$$

Beide leden delen door 900 geeft het gewenste resultaat.

58

In de 'standaardvorm' schrijven: $4x^2 + y^2 = 16 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$, dus in dit geval liggen de brandpunten op de y -as met $e^2 = 16$ en $e^2 - d^2 = 4$, dus $e = 4$ en $d^2 = 12$, dus $d = 2\sqrt{3}$.

De eerste ellips heeft brandpunten $(0, \pm 2\sqrt{3})$.

$x^2 + 4y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}}$, dus voor de tweede ellips geldt:

$e^2 = 1$ en $e^2 - d^2 = \frac{1}{4}$, dus $d = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. De brandpunten van de tweede ellips zijn $(\pm \frac{1}{2}\sqrt{3}, 0)$.

59

a $x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = x^2 - 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$, dus $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

b d en e zoals hierboven, dan $e = 1$ en $e^2 - d^2 = -1$, dus $d = \sqrt{2}$.

De hyperboolconstante is dus 2 en $F = (\sqrt{2}, 0)$.

c Het middelpunt M van de richtcirkel is $(-\sqrt{2}, 0)$. Zo te zien is R het punt $(0, \sqrt{2})$. Je verifieert eenvoudig dat hoek MRF recht is. De middelloodlijn van lijnstuk RF is de

middenparallel in driehoek MRF evenwijdig aan lijn RF , dus gaat door O en heeft richtingscoëfficiënt -1 , dus is de lijn $y = -x$.

De raaklijneigenschap

60

1. Dit volgt uit: $d(Q, V) + d(M, V) < d(Q, W) + d(M, W)$, driehoeksongelijkheid in driehoek QVM en $d(M, V) = d(M, W)$.
2. Want Q ligt op de middelloodlijn van lijnstuk VF .
3. Uit 1 en 2 volgt dat de conflictlijn aan die kant van m waar F ligt. Dus is m steunlijn van de conflictlijn.

61

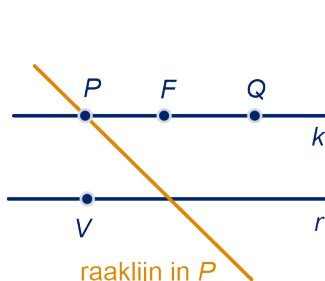
Het snijpunt van lijn VF met m noemen we N .

1. $|VN| = |NF|$, want N op m ,
2. $|VP| = |PF|$, want P op m ,
3. $|PN| = |PN|$

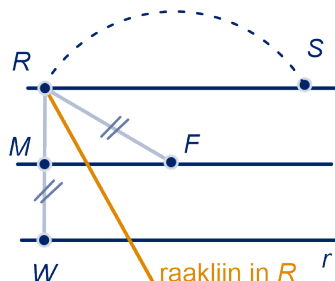
Uit 1, 2 en 3 volgt dat de driehoeken VPN en FPN congruent zijn (ZZZ), dus is m bissectrice van hoek VPF .

62

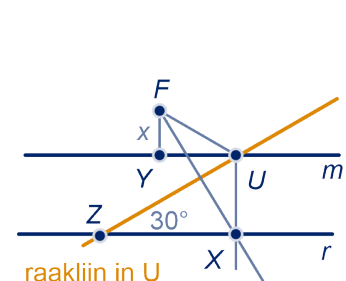
- a Zie figuur 1 hieronder. De punten zijn P en Q . Hun afstand tot F is $d(k, r)$.
- b Het voetpunt van P op r noemen we V .
Hoek VPF is recht, dus de bissectrice van deze hoek maakt een hoek van 45° met k .
- c Zie figuur 2. De gevraagde punten zijn R en S , de snijpunten van l met de cirkel met middelpunt F en straal $d(F, r)$.
- d Zie figuur 2. Het voetpunt van R noemen we W en het midden van lijnstuk RW is M .
Dan is RMF een rechthoekige driehoek waarvan de schuine zijde twee keer zo lang is als de korte rechthoekszijde, dus $\angle RFM = 30^\circ$. Dus is driehoek RFW gelijkzijdig. De bissectrice van hoek FRW maakt dus een hoek van 60° met l .
- e Zie figuur 3. U is het raakpunt van m met de parabool. Het voetpunt van U is X , de projectie van F op m is Y en het snijpunt van de raaklijn met r is Z .
Dan $\angle ZUX = 60^\circ$ en $\angle FUZ = \angle ZUX$, dus $\angle FUY = 30^\circ$. Dus als $FY = x$, dan $FU = 2x$ en $UX = FU = 2x$.



figuur 1



figuur 2



figuur 3

10 Conflictlijnen

63

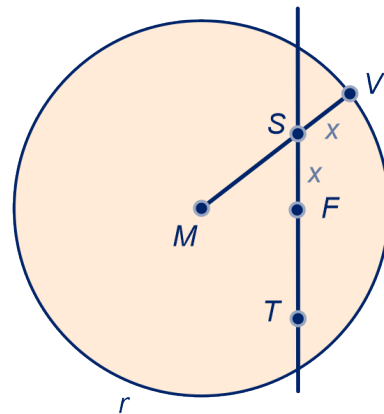
a Zie figuur.

De gevraagde punten zijn S en T .

b De rechthoekszijden van driehoek SMF zijn x en 4 . Volgens de stelling van Pythagoras is de schuine zijde dan $\sqrt{16 + x^2}$. Verder geldt: $|SM| + |VS| = 8$.

c $x + \sqrt{16 + x^2} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{16 + x^2} = 8 - x$; kwadrateren geeft: $16 + x^2 = 64 - 16x + x^2$, dus $x = 3$.

d $\tan(\angle MSF) = \frac{4}{3}$, dus $\angle MSF = 53,13\dots^\circ$ en de gevraagde hoek is bissectrice van hoek VSF , dus $\frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \angle MSF) = 63^\circ$.



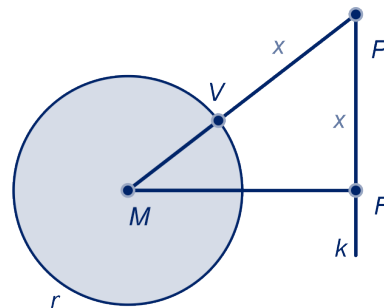
64

a Zie figuur.

Eén van de gevraagde punten is P , het andere is het spiegelbeeld van P in lijn MF .

b De zijden van de rechthoekige driehoek MPF zijn x , $x + 2$ en 4 . Dus $(x + 2)^2 = x^2 + 16 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 16$, dus $x = 3$.

Dus $\angle MPF = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53,34\dots^\circ$ en de gevraagde hoek is $\frac{1}{2} \cdot 53,34\dots^\circ = 27^\circ$.



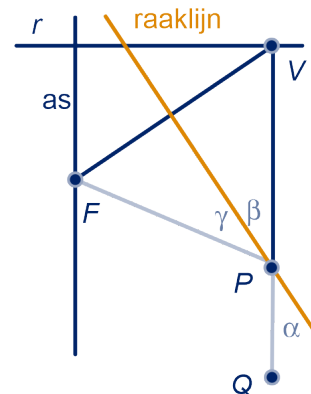
65

a Zie figuur.

Lijn PQ is evenwijdig met de as met P op de parabool. Het voetpunt van P is V . De raaklijn in P is de bissectrice van hoek FPV .

Dan $\alpha = \beta$ (overstaande hoeken) en $\beta = \gamma$ (raaklijn is bissectrice), dus $\alpha = \gamma$. Dus als een lichtstraal evenwijdig aan de as invalt, gaat de teruggekaatste straal door F .

b Er geldt: $|QP| + |FP| = |QP| + |VP| = d(Q, r)$.



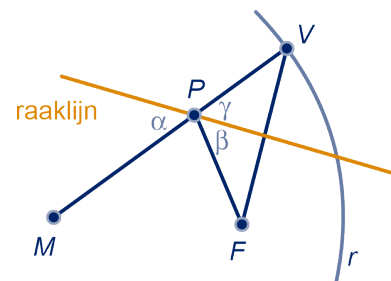
66

Zie figuur.

r is de richtcirkel met middelpunt M van de ellips, F het brandpunt, P een punt van de ellips met voetpunt V .

Er geldt: $\alpha = \gamma$ (overstaande hoeken) en $\beta = \gamma$, want de raaklijn is bissectrice van hoek FPV . Dus $\beta = \gamma$.

Dat betekent: als een lichtstraal vanuit M op P valt, dan wordt hij teruggekaatst in de richting van F .



67

Maak een ellipsvormige spiegel (een omwentelingsellipsoïde). Maak een opening in het ene brandpunt van de ellips, waardoor het licht op de spiegel valt. Waar op de spiegel, doet er niet toe: de lichtstraal wordt overal weerkaatst naar het andere brandpunt.

10 Conflictlijnen

68

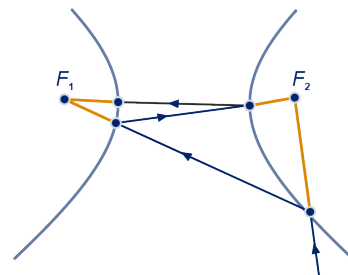
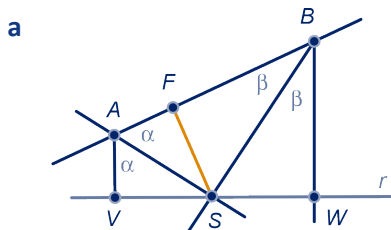
- a -
- b De lange as van de ellips
- c Dan is de limietbaan ook de lange as.

69

- a In de richting van het andere brandpunt (waar bal F niet ligt).
- b Langs de lijn FB , weg van F . Dan gaat de baan van B via een band door het andere brandpunt en dan via weer een band naar F .
- c Als de baan van de bal door het rechter brandpunt gaat, treft hij bal F al na één band. Als de bal achter het rechter brandpunt gaat, gaat hij ook achter F door. Als de bal voor het rechter brandpunt langs gaat, gaat hij ook voor F langs. Het kan dus niet.

70

- a Zie figuur.
- b De as van de hyperbool
- c Dan is de limietbaan ook de as.



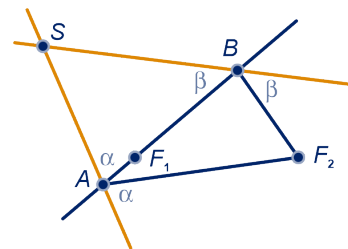
71

De voetpunten van A en B noemen we V en W . De middelloodlijnen van de lijnstukken FV en FW zijn de raaklijnen in A en B aan de parabool.

- b Zie figuur. Het snijpunt van de raaklijnen noemen we S . Er geldt: $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ (hoekensom in vierhoek $VWBA$), dus $\alpha + \beta = 90^\circ$. Dus is hoek ASB recht (hoekensom in driehoek ASB).
- c Let op dat je er niet vanuit gaat dat $\angle AVS = 90^\circ$!
De driehoeken AFS en AVS zijn congruent, want $|AV| = |AF|$, $|AS| = |AS|$ en $\angle VAS = \angle FAS$ (ZHZ).
Net zo zijn de driehoeken WBS en FBS congruent.
Dus $\angle VSA + \angle FSA + \angle WSB + \angle FSB = 2 \cdot \angle FSA + 2 \cdot \angle FSB = 2 \cdot \angle ASB = 180^\circ$.

72

- a Zie figuur.
Uit de raaklijneigenschap volgt dat de raaklijn een bissectrice van de lijnen AF_1 en AF_2 is en ook van de lijnen BF_1 en BF_2 .
- b De hoeken van driehoek AF_2B zijn: $180^\circ - 2\alpha$, $180^\circ - 2\beta$ en $\angle AF_2B$.
Dus $\angle AF_2B = 2\alpha + 2\beta - 180^\circ$, dus $\alpha + \beta = 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot \angle AF_2B$.
De hoekensom in driehoek ASB levert: $\angle ASB = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot \angle AF_2B$.



10 Conflictlijnen

73

a Zie figuur.

Uit de raaklijneigenschap volgt dat de raaklijn een bissectrice van de lijnen AF_1 en AF_2 is (en ook van de lijnen BF_1 en BF_2).

b Zie figuur, $\angle AF_2B$ is daar δ genoemd.

1. $\gamma = 180^\circ - 2\beta - \delta$ (hoekensom driehoek AF_2B),

2. $\gamma = 180^\circ - 2\alpha$ (gestrekte hoek),

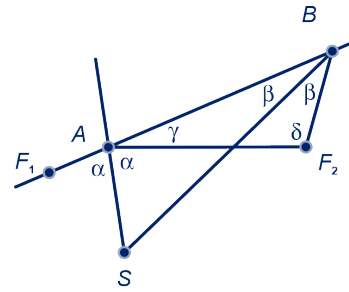
3. $\delta = 2\alpha - 2\beta$ (uit 1. en 2.),

4. $\alpha + \gamma = 180^\circ - \alpha$ (hoeken bij A),

5. $\angle ASB = 180^\circ - \alpha - \beta - \gamma$ (hoekensom driehoek ASB),

6. $\angle ASB = \alpha - \beta$ (uit 4. en 5.)

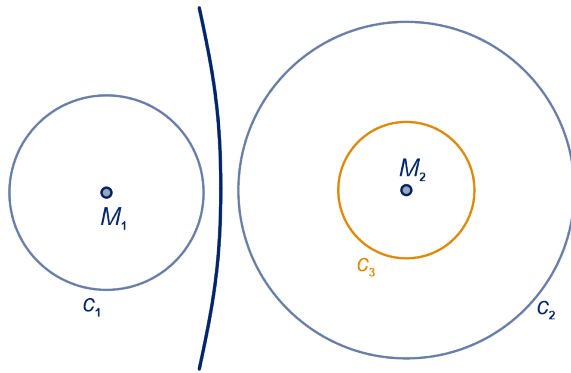
Uit 3. en 6. volgt het gevraagde.



Gemengde opgaven

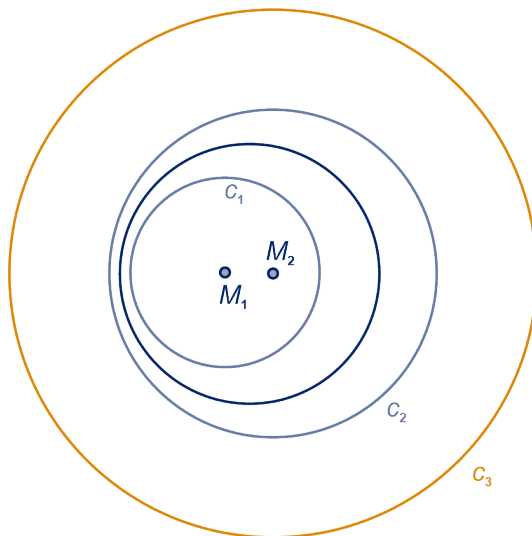
74

Zie figuur.



75

Zie figuur.



10 Conflictlijnen

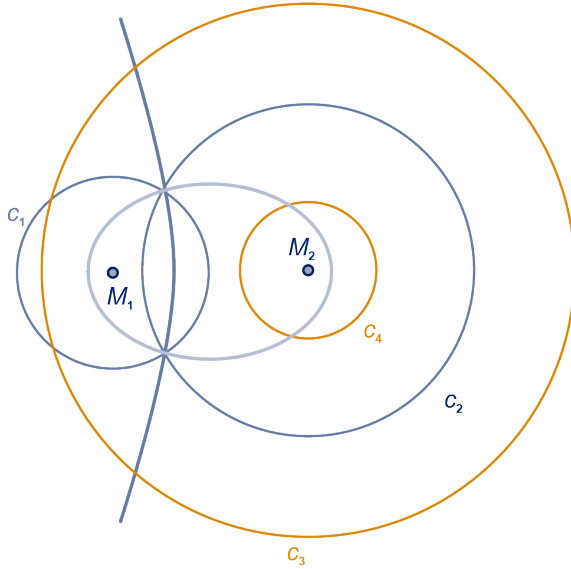
De cirkel met middelpunt M_2 en straal 8 noemen we c_3 .

P ligt op de conflictlijn van c_1 en $c_2 \Leftrightarrow d(P, c_1) = d(P, c_2) \Leftrightarrow d(P, M_1) - 3 = d(P, c_3) - 3 \Leftrightarrow d(P, M_1) = d(P, c_3)$

P ligt op de conflictlijn van M_1 en c_3 . De conflictlijn is dus de ellips met M_1 als brandpunt en c_3 als richtcirkel.

76

Zie figuur.



De cirkel met middelpunt M_2 en straal 8 noemen we c_3 . De cirkel met middelpunt M_2 en straal 2 noemen we c_4 .

- P ligt op de conflictlijn binnen c_1 en buiten c_2
 $\Leftrightarrow d(P, c_1) = d(P, c_2) \Leftrightarrow 3 - d(P, M_1) = 3 - d(P, c_3) \Leftrightarrow d(P, M_1) = d(P, c_3)$
 $\Leftrightarrow P$ ligt op de conflictlijn van M_1 en c_3 en dit is de ellips met M_1 als brandpunt en c_3 als richtcirkel.
- P ligt op de conflictlijn buiten c_1 en buiten c_2
 $\Leftrightarrow d(P, c_1) = d(P, c_2) \Leftrightarrow d(P, M_1) - 3 = d(P, c_3) - 3 \Leftrightarrow d(P, M_1) = d(P, c_3)$
 $\Leftrightarrow P$ ligt op de conflictlijn van M_1 en c_3 en dit is de ellips met M_1 als brandpunt en c_3 als richtcirkel.
- P ligt op de conflictlijn binnen c_1 en binnen c_2
 $\Leftrightarrow d(P, c_1) = d(P, c_2) \Leftrightarrow 3 - d(P, M_1) = 3 - d(P, c_4) \Leftrightarrow d(P, M_1) = d(P, c_4)$
 $\Leftrightarrow P$ ligt op de conflictlijn van M_1 en c_4 en dit is de hyperbooltak met M_1 als brandpunt en c_3 als richtcirkel.
- P ligt op de conflictlijn buiten c_1 en buiten c_2
 $\Leftrightarrow d(P, c_1) = d(P, c_2) \Leftrightarrow d(P, M_1) - 3 = d(P, c_4) - 3 \Leftrightarrow d(P, M_1) = d(P, c_4)$
 $\Leftrightarrow P$ ligt op de conflictlijn van M_1 en c_4 en dit is de hyperbooltak met M_1 als brandpunt en c_3 als richtcirkel.

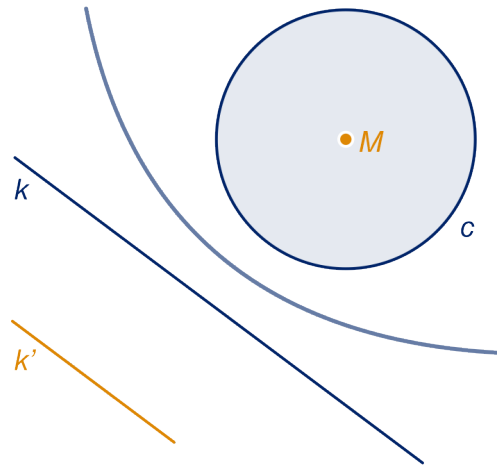
10 Conflictlijnen

77

- a Zie figuur.
b De lijn evenwijdig aan k , op afstand 3 van k , aan de andere kant van k dan M noemen we k' .

P ligt op de conflictlijn van k en $c \Leftrightarrow$
 $d(P, k) = d(P, c) \Leftrightarrow d(P, k') - 5 =$
 $d(P, M) - 5 \Leftrightarrow d(P, k') = d(P, M)$
 P ligt op de conflictlijn van k' en M .
 De conflictlijn is dus de parabool met M als brandpunt en k' als richtlijn.

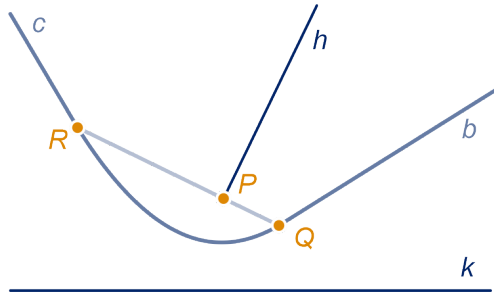
- c Zie figuur.



figuur bij opgave 77

78

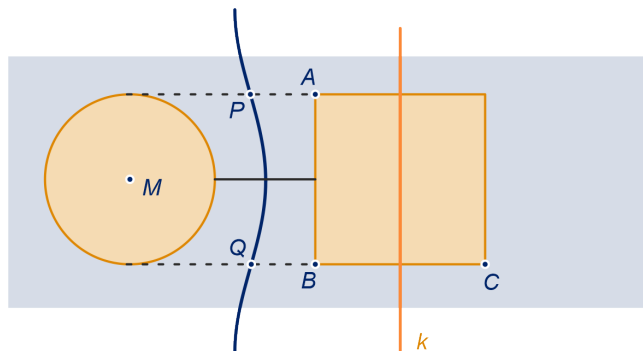
- a Zie figuur.



- b De conflictlijn bestaat uit delen b en c van de bissectrices van k en h en een stuk parabool met brandpunt P en richtlijn k .
 De 'overgangspunten' zijn Q en R , de snijpunten van de loodlijn in P op h met b en c .

79

Zie figuur.



De cirkel noemen we c , het middelpunt van de cirkel noemen we M , A , B en C zijn hoekpunten van het vierkant. De middelloodlijn van BC noemen we k .

De conflictlijn bestaat achtereenvolgens uit:

- een stuk van de hyperbooltak met brandpunt B en richtcirkel c ;
- een stuk van de parabool met brandpunt M en richtlijn k ;

10 Conflictlijnen

- een stuk van de hyperbooltak met brandpunt A en richtcirkel c .
De aansluitpunten P en Q liggen op de verlengden van zijden van het vierkante eiland.

80

Zie figuur.

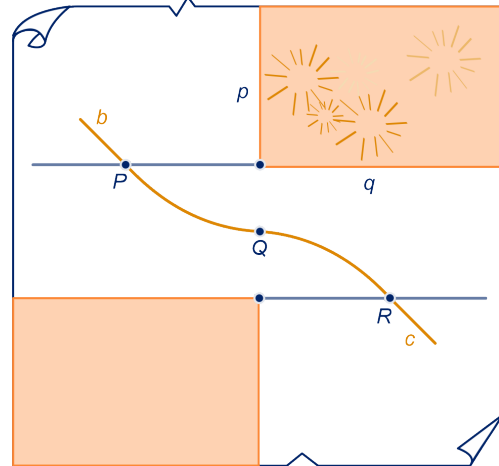
De lijnen waarop de kusten liggen noemen we p , q , r en s . De hoekpunten van de kusten noemen we A en B .

De conflictlijn bestaat uit twee parabooldukken, het ene stuk met brandpunt A en richtlijn r , het andere met brandpunt B en richtlijn q ; verder: een deel b van een bissectrice van de lijnen p en r en een deel b van een bissectrice van de lijnen p en r en een deel c van een bissectrice van de lijnen q en s .

De overgangspunten zijn P , Q en R , waarbij P het snijpunt van b en q ,

R het snijpunt van r en c en

Q het midden van lijnstuk AB is.



81

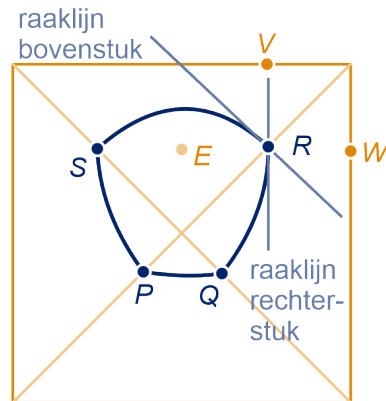
a Zie figuur.

De conflictlijn bestaat uit vier stukken parabool, elk met brandpunt E en met de vier zijden van het vierkant als richtlijnen. De aansluitpunten P , Q , R en S liggen op de diagonalen van het vierkant.

b De projectie van R op de bovenzijde van het vierkant noemen we V . Dan is EV evenwijdig met een diagonaal van het vierkant. De raaklijn in R staat daar loodrecht op.

De raaklijn in R aan het stuk parabool "rechts" is verticaal, want R is de top van dat stuk parabool.

De hoek tussen de stukken parabool in R is dus 135° .



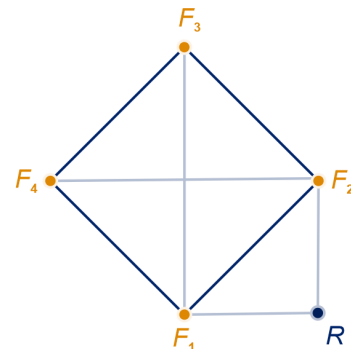
82

a Zie figuur.

R is het snijpunt van de lijn door F_1 evenwijdig met lijn F_2F_4 en de lijn door F_2 evenwijdig met lijn F_1F_3 .

Omdat $d(R, \text{lijn } F_2F_4) = d(R, \text{lijn } F_1F_3) = 2$, ligt R zowel op p_1 als op p_2 .

De raaklijn in R aan p_1 en ook aan p_2 is de bissectrice van hoek F_1RF_2 . Dus raken p_1 en p_2 elkaar in R .

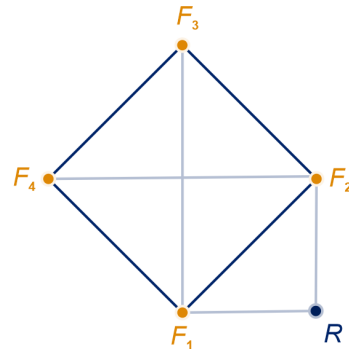


10 Conflictlijnen

b Zie figuur.

We bewijzen dat SF_4 raaklijn aan de parabool in het punt S is.

Het voetpunt van S op lijn F_2F_4 noemen we T . Dan zijn de driehoeken F_4F_1S en F_4TS , congruent, want $|SF_1| = |TS|$, $|SF_4| = |SF_4|$ en de hoeken STF_4 en F_1SF_4 zijn recht (ZZR). Dus is de lijn SF_4 bissectrice van hoek F_1ST , dus dus raaklijn aan p_1 in S .



c Breng een assenstelsel aan met F_2 en F_4 op de x -as en F_1 en F_3 op de y -as zodat $F_2 = (2,0)$.

De top van p_1 is dan $(0,1)$, dus een vergelijking van p_3

is dan: $y = a \cdot x^2 + 1$ voor zeker getal a . Omdat $(2,2)$ op p_3 ligt, geldt: $a = \frac{1}{4}$.

De oppervlakte tussen p_3 en de x -as is dus: $\int_{-2}^2 \left(\frac{1}{4} \cdot x^2 + 1 \right) dx = \left[x + \frac{1}{12}x^3 \right]_{-2}^2 = 5\frac{1}{3}$.

De oppervlakte van V daaruit weggelaten $G = 4 \cdot \left(8 - 5\frac{1}{3} \right) = 10\frac{2}{3}$.

De verhouding van de oppervlakten van G en V is $\left(16 - 10\frac{2}{3} \right) : 16 = 1 : 3$.

83

a $y = -3$

b Er geldt $d(C, F) = d(C, r) = 6$, dus $C = (6,3)$.

c Een vergelijking heeft de vorm $y = a \cdot x^2$, voor zeker getal a . Het punt C ligt op p , dus:

$$a = \frac{1}{12}.$$

Een vergelijking is $y = \frac{1}{12} \cdot x^2$

Eindpunt

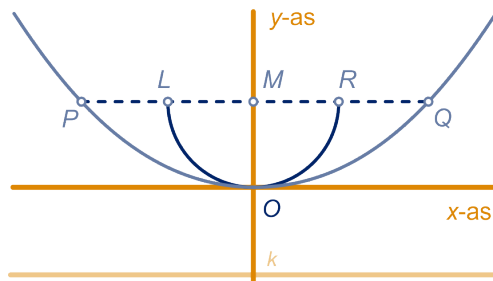
Extra opgaven

1

- a Zie figuur.
- b Het stuk 'links' van P heeft als richtlijn de x -as en brandpunt L ,
het stuk tussen P en Q heeft als richtlijn k met vergelijking $y = -2$ en brandpunt M ,
het stuk 'rechts' van Q heeft als richtlijn de x -as en brandpunt R .
- c De overgangspunten P en Q liggen op de lijn door L en R en liggen even ver van M als van k .

Dus $P = (-4, 2)$ en $Q = (4, 2)$.

(Dan ligt P ook even ver van de x -as en L en Q even ver van de x -as en R .)

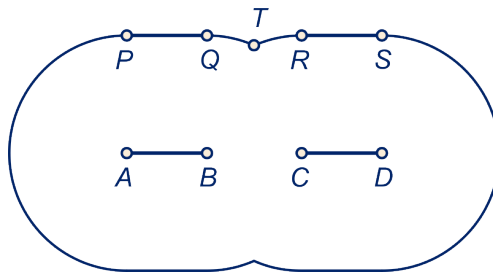


2

- a** Zie figuur.
- b** Alle zijden van driehoek BCT hebben lengte 2, dus boog QT heeft lengte $\frac{30}{360} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{1}{3}\pi$.

De lengte van de isolijn is dus:

$$2\pi \cdot 2 + 4 \cdot \frac{1}{3}\pi + 4 \cdot 1\frac{1}{2} = 5\frac{1}{3}\pi + 6.$$



3

- a $\frac{dy}{dx} = 2x$, dus de raaklijn heeft vergelijking

$y = 2px + q$ voor zekere waarde van q .

(p, p^2) ligt op de raaklijn, dus $q = -p^2$ en de vergelijking is: $y = 2px - p^2$. Voor het snijpunt met de x -as geldt: $y = 0 \Leftrightarrow 2px = p^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}p$.

- b** Zie figuur.

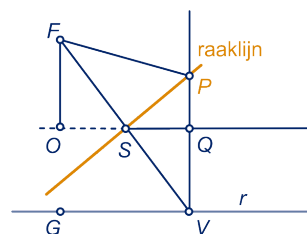
V is het voetpunt van P op de richtlijn r en G het voetpunt van O .

Het snijpunt van de raaklijn in P en lijn FV noemen we S .

De lijn door S evenwijdig met de richtlijn gaat door O omdat O het midden van lijnstuk FW is en S het midden van lijnstuk FV .

$$\text{Dys } S = M!$$

De driehoeken FOS en VQS zijn congruent (HZH), dus S is het midden van lijnstuk OQ .



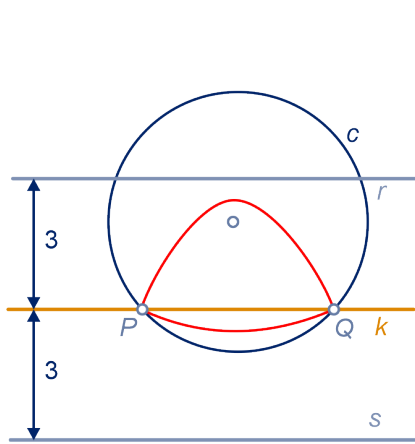
4

- a Zie figuur 1 aan het einde van de opgave.
- b De conflictlijn bestaat uit twee stukken parabool. Beide hebben brandpunt M . Het 'bovenste' stuk heeft richtlijn r , het 'onderste' stuk heeft richtlijn s , beide op afstand 3 van k .
- c Zie figuur 2 hieronder.
De gevraagde hoek is hetzelfde als hoek WMV .

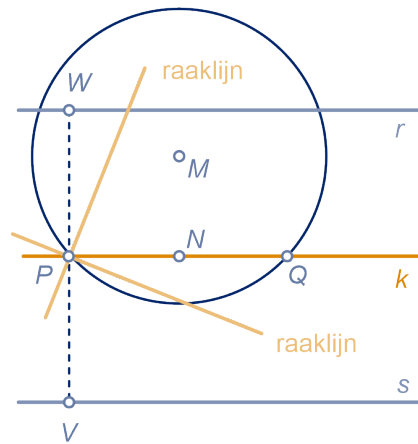
10 Conflictlijnen

De projectie van M op k noemen we N .

Uit de stelling van Pythagoras in driehoek PNM volgt: $PN = \sqrt{5}$, dus $\angle WMV = \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}\right) + \tan^{-1}(\sqrt{5}) \approx 89,1^\circ$.



figuur 1



figuur 2

5

Zie figuur.

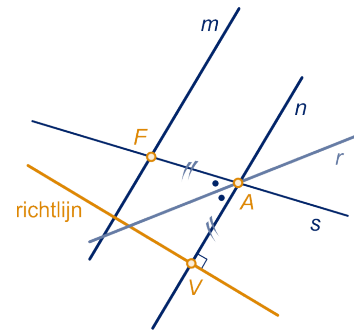
Teken de lijn n door A evenwijdig aan de as m . Hierop moet het voetpunt V van A liggen.

Spiegel de lijn n in de raaklijn r , het beeld is s . Op s ligt het brandpunt.

Het brandpunt F is dus het snijpunt van de as m met s .

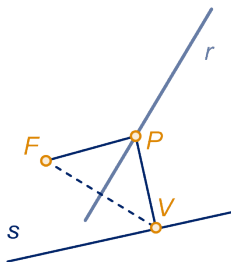
V vind je met de eigenschap $|AV| = |AF|$.

De richtlijn gaat door V en staat loodrecht op de as m .



6

Zie figuur.

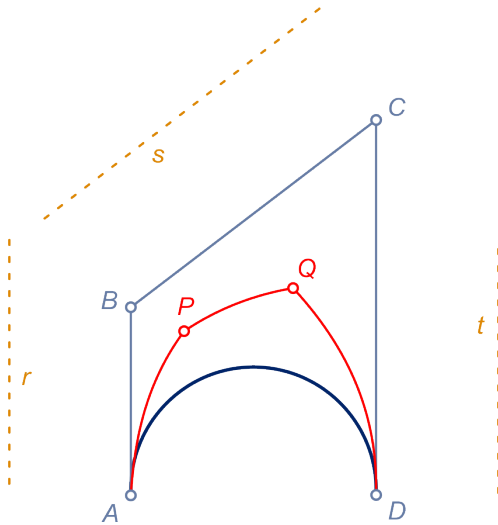


Spiegel F in r . Het beeld is het voetpunt V van P . De loodlijn s in V op lijn PV is de richtlijn.

10 Conflictlijnen

7

a Zie figuur.



b De richtlijnen zijn r , s en t op afstand 2 van AB , BC en CD .

Het brandpunt is steeds M

c Stel $\angle ABC = \alpha$, dan $\angle BCD = 180^\circ - \alpha$.

Lijn BP is bissectrice van hoek ABC en lijn CQ van hoek BCD , dus $\angle PBC = \frac{1}{2}\alpha$ en $\angle QCB = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$.

8

a De afstand tot land I noemen we x , dan is de afstand tot land III ook x en tot land II: $x\sqrt{2} - 2$, dus $x = x\sqrt{2} - 2$. dus $x = \frac{2}{\sqrt{2} - 1} = 2 + 2\sqrt{2} \approx 4,83$.

b Zie figuur.

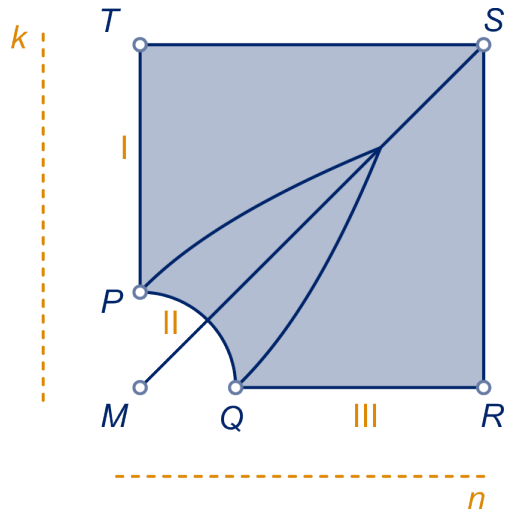
Eén stuk is een gedeelte van de parabool met brandpunt M en richtlijn k , een lijn die 2 eenheden links van lijn PS .

- de parabool gaat door punt P ; - het tweede stuk is een gedeelte van de bissectrice van hoek TSR ;

- het derde stuk is het spiegelbeeld van het eerste stuk (of een gedeelte van de parabool met brandpunt M en richtlijn n , een lijn die 2 eenheden onder lijn QR ligt).

c Het voetpunt van P op k noemen we V en het snijpunt van lijn VP met zijde SP : W . De raaklijn aan het bovenstuk is deelt hoek VPM doormidden. Dus vanwege symmetrie is de gevraagde hoek even groot als hoek VPM .

In driehoek WPM geldt: $|WP| = 2 + 2\sqrt{2}$ en $|MP| = 4 + 2\sqrt{2}$. Noem de gevraagde hoek α , dan $\cos(\alpha) = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} \cdot \frac{4 - 2\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, de gevraagde hoek is dus 45° exact!



Computerpracticum

1

- a -
- b De middelloodlijn van lijnstuk FV is raaklijn aan de parabool.

2

- a Dan draait de parabool mee.
- b Dan wordt de parabool smaller.

3

- a -
- b De middelloodlijn van FV is raaklijn aan de ellips.

4

- a Dan draait de ellips mee.
- b Dan wordt de ellips 'platter'.
Dan wordt de ellips 'ronder'.

5

- a -
- b De middelloodlijn van lijnstuk FV is raaklijn aan hyperbooltak.
- c Trek de raaklijnen vanuit F aan r . De punten van r tussen de raakpunten in kunnen als voetpunt optreden.

6

- a Dan draait de hyperbool mee.
- b Dan wordt de hyperbool 'smaller'.

7

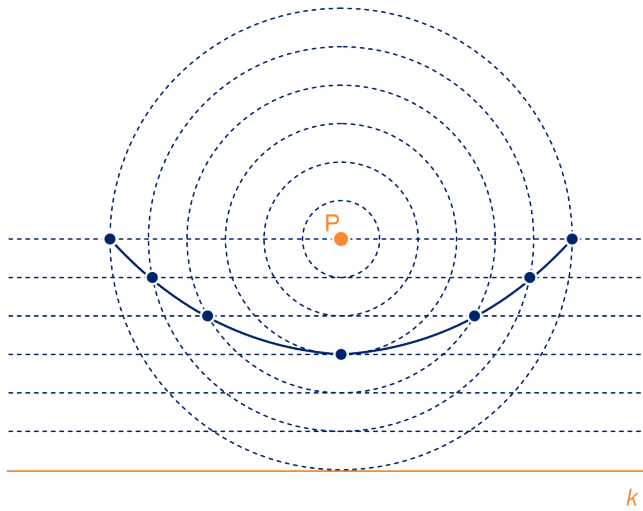
- a De middelloodlijn van AB .
- b Als $a \parallel b$: de middenparallel van a en b .
Anders: het bissectricepaar van de hoeken die a en b maken.
- c De cirkel met straal r en middelpunt A .
- d Als $s < r$: twee cirkels met middelpunt M stralen $r + s$ en $r - s$.
Als $s = r$: een cirkel middelpunt M en straal $r + s$ en het punt M .
Als $s > r$: een cirkel met middelpunt M en straal $r + s$.
- e De parabool met brandpunt A en richtlijn a .
- f De loodlijn in A op a .
- g De ellips met brandpunt A en richtcirkel r .
- h De ellips met brandpunt A en richtcirkel r .
- i De halve lijn met het middelpunt van r als beginpunt die door A gaat

8

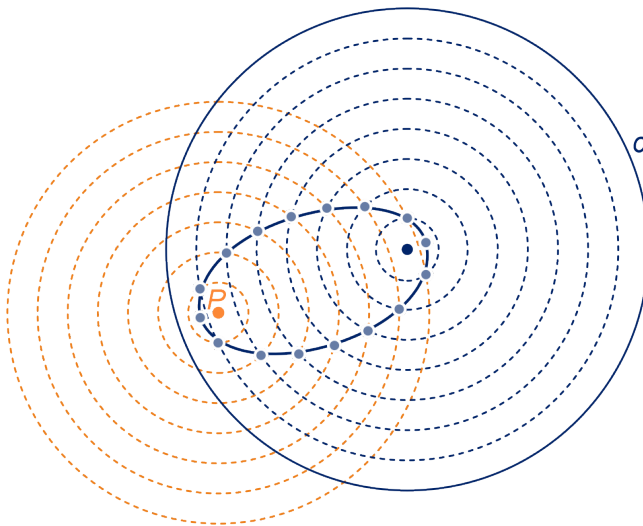
De conflictlijn is achtereenvolgens: een hyperbooltak, een halve lijn, een ellips, een halve lijn, een hyperbooltak.

10 Conflictlijnen

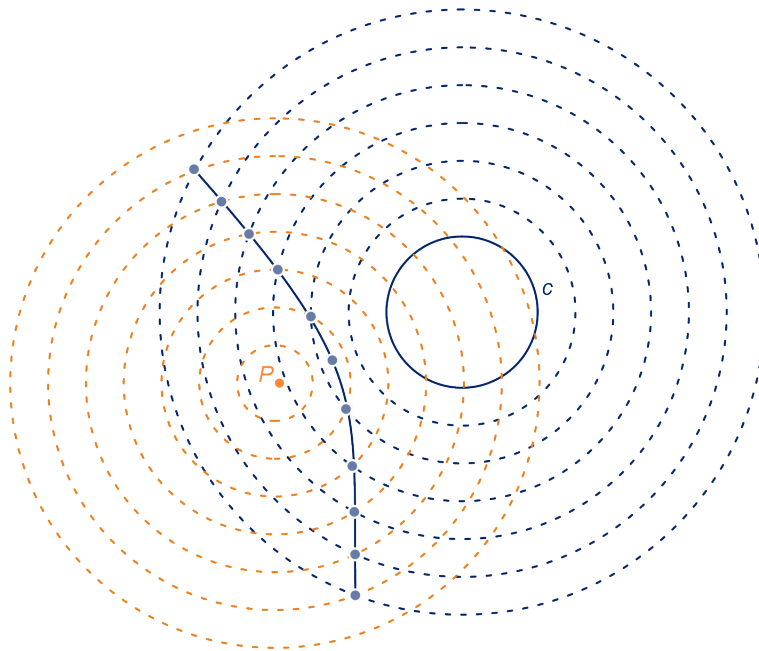
De antwoorden bij opgave 30, opgave 31 en opgave 32



figuur bij opgave 30



figuur bij opgave 31



figuur bij opgave 32

10 Conflictlijnen

- 1 Spiegel A in k .
- 2 Gebruik congruentie.
- 3 Gebruik het laatste onderdeel van de voorgaande opgave.
- 4 Stel de richtlijn heeft vergelijking $y = -a$, met $a > 0$, dan is het brandpunt...
Elk punt dus bijvoorbeeld ... heeft gelijke afstand tot....
- 5 Gebruik de driehoeksongelijkheid in driehoek MQR_1 .
- 6 Bewijs dat de driehoeken AFS en AVS congruent zijn.
- 7 Uit de raaklijneigenschap volgt dat de raaklijn in A een bissectrice van de lijnen AF_1 en AF_2 is.
- 8 De gevraagde hoek is hetzelfde als hoek WMV .

a

afstand 6

as van de hyperbool 28, 51

b

brandpunt van een ellips 25, 49

brandpunt van een hyperbooltak 50

brandpunt van een parabool 21, 49

brandpunten van een hyperbool 27

c

conflictlijn 12, 17, 49

e

ellips 25, 49

ellipsconstante 26, 49

h

hoek van twee cirkelbogen 8, 49

hyperbool 27

hyperboolconstante 28, 50

hyperbooltak 50

i

iso-x-afstandslijn 7, 49

k

kegel 31

kegelsnede 31

korte as van een ellips 26, 51

l

lange as van een ellips 26, 51

n

naastebuurprincipe 17

normaal van ellips of hyperbool 38

p

parabool 21, 49

r

raaklijn aan ellips of hyperbool 38

richtcirkel van een ellips 25, 49

richtcirkel van een hyperbool 27

richtcirkel van een hyperbooltak 50

richtlijn van een parabool 21, 49

s

steunlijn 38

symmetrieas van een parabool 22, 51

symmetrieassen hyperbool 51

symmetrieassen van een ellips 26, 51

t

top van een parabool 22, 51

toppen van een ellips 26, 51

toppen van een hyperbool 28, 51

v

voetpunt 18, 50