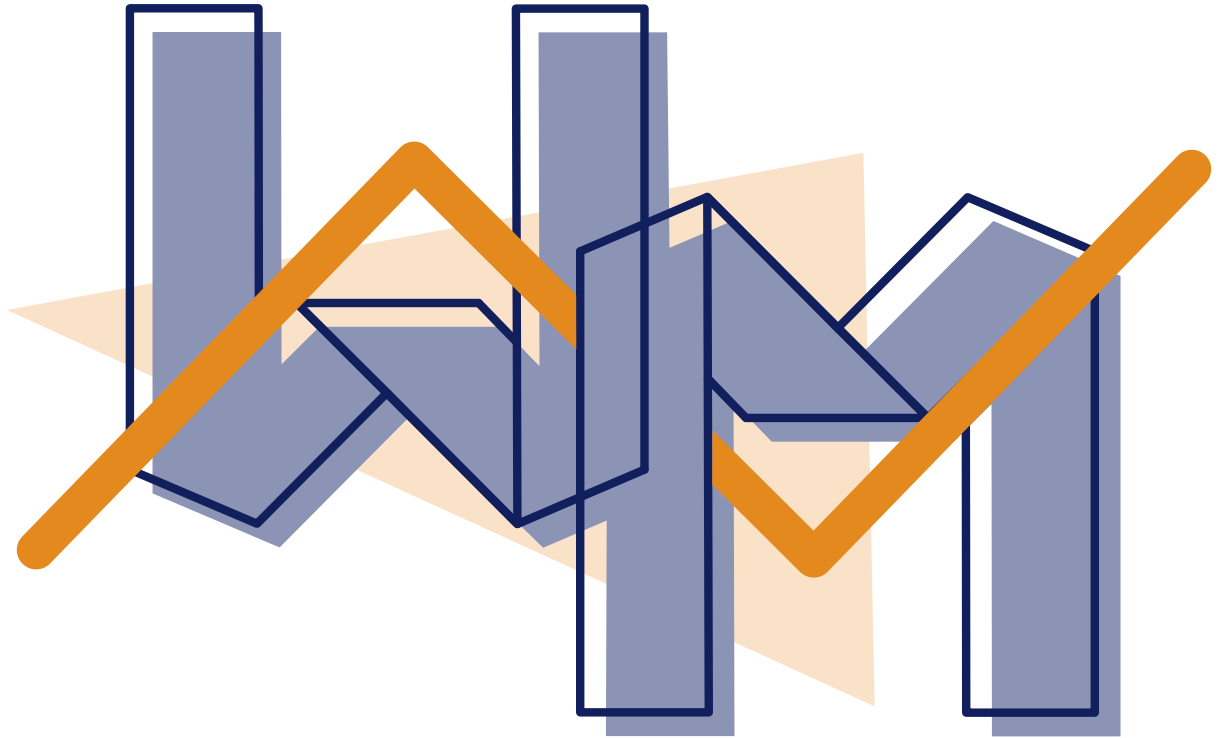
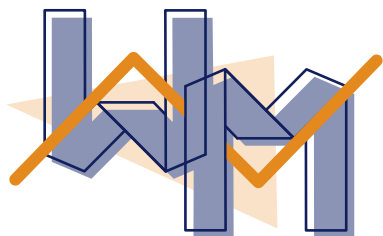




Ruimte vwo wiskunde d

de **Wageningse**
Methode



Copyright	© 2018 Stichting de Wageningse Methode
Auteurs	Leon van den Broek †, Ton Geurtz, Maris van Haandel, Erik van Haren, Dolf van den Hombergh, Peter Kop, Henk Reuling, Daan van Smaalen
Homepage	www.wageningse-methode.nl
ISBN	xxx
Illustraties	Wilson Design Uden
Distributie	Iddink Voortgezet Onderwijs BV, Postbus 14, 6710 BA Ede

Niets uit deze uitgave mag verveelvuldigd en/of openbaar gemaakt worden door middel van druk, fotokopie, microfilm of op elke andere wijze ook, zonder voorafgaande toestemming van de houder van het copyright.

Inhoudsopgave

6	Ruimte	5
6.1	Coördinaten en vectoren	6
6.2	Het inproduct in de ruimte	13
6.3	Parametervoorstelling en vergelijking van een vlak	17
6.4	Hoeken	32
6.5	Het uitproduct	44
6.6	Determinant en uitproduct	49
6.7	Eindpunt	62
6.8	Extra opgaven	68
	Antwoorden	73
6	Ruimte	73
	Hints	97
6	Ruimte	97
	Index	98

Dit hoofdstuk gaat over het inproduct, determinant en uitproduct in de ruimte. Het vormt met het hoofdstuk **Vlakke meetkunde** de meetkundestof voor 456 vwo wiskunde d.

In paragraaf 5 wordt het uitproduct gedefinieerd. Het komt 'uit de lucht vallen'. Een natuurlijke manier om het uitproduct te definiëren vind je in paragraaf 6. Als je toch paragraaf 6 doet, kun je paragraaf 5 overslaan.

In dit boek worden iconen gebruikt. De blauwe iconen geven de structuur van een paragraaf aan. Hierdoor zie je direct waar bijvoorbeeld een stuk theorie wordt behandeld of waar een historische wetenswaardigheid de revue passeert. De groene iconen vertellen je iets over een specifieke opgave, bijvoorbeeld dat de opgave lastig is of dat er een werkblad bij de opgave hoort. Een overzicht van de gebruikte iconen vind je op de volgende pagina.

Tijdens het ontwikkelen van dit boek is op 8 december 2013 geheel onverwacht onze zeer gewaardeerde vriend Leon van den Broek overleden. Leon zette zich op ongekende wijze in voor motiverend en activerend wiskundeonderwijs. Hij was wars van het aanleren van onbegrepen routines. Leon wilde dat leerlingen de schoonheid van wiskunde gingen zien en beleven — wiskunde als een onuitputtelijke bron van interessante onderwerpen en prachtige problemen. Actief met wiskunde bezig zijn — zelf ontdekken en inzichtelijk leren — stond daarbij voor Leon centraal. Het was zijn overtuiging dat wiskunde op die manier een goed te begrijpen vak wordt en dat het leerproces dat de leerlingen doormaken hen blijvend vormt.



Het wegvallen van Leon betekent een zeer groot gemis voor de Wageningse Methode: hij was de geestelijk vader en drijvende kracht. We zijn Leon zeer dankbaar voor zijn uitzonderlijke inzet voor de Wageningse Methode en het wiskundeonderwijs. We zullen zijn creativiteit, gedrevenheid, idealisme en inspiratie enorm missen.

De auteurs van de Wageningse Methode

Overzicht iconen . . .



Theorie

Hier wordt iets benadrukt, samengevat of nader toegelicht. Lees de theorie goed door en stel vragen als je iets niet begrijpt. Theorie die je moet kennen, staat in rode letters. Belangrijke woorden zijn vetgedrukt. Je vindt deze woorden terug in de index achterin het boek.



Voorbeeld

In een voorbeeld zie je hoe de theorie gebruikt wordt om een vraag op te lossen. Zorg dat je het voorbeeld kunt volgen en stel vragen als je het voorbeeld niet begrijpt.



Opmerking

Let op, er wordt iets opmerkelijks behandeld of je wordt ergens op geattendeerd. Een opmerking bestudeer je aandachtig, maar hoeft je niet te leren.



Historie

Hier vind je historische feiten en wetenswaardigheden.



Werkblad

Bij deze opgaven hoort een werkblad. Je vindt het werkblad op de site www.wageningse-methode.nl.



Computer

Bij deze opgaven of uitleg maak je gebruik van de computer en/of de digitale versie van de Wageningse Methode.



Echt, moet kunnen

Deze opgaven zijn standaardopgaven die je zonder veel moeite op moet kunnen lossen.



Puzzelen

Bij deze opgaven moet je even puzzelen. Geef niet te snel op.



Pittig

Deze opgaven zijn wat moeilijker.



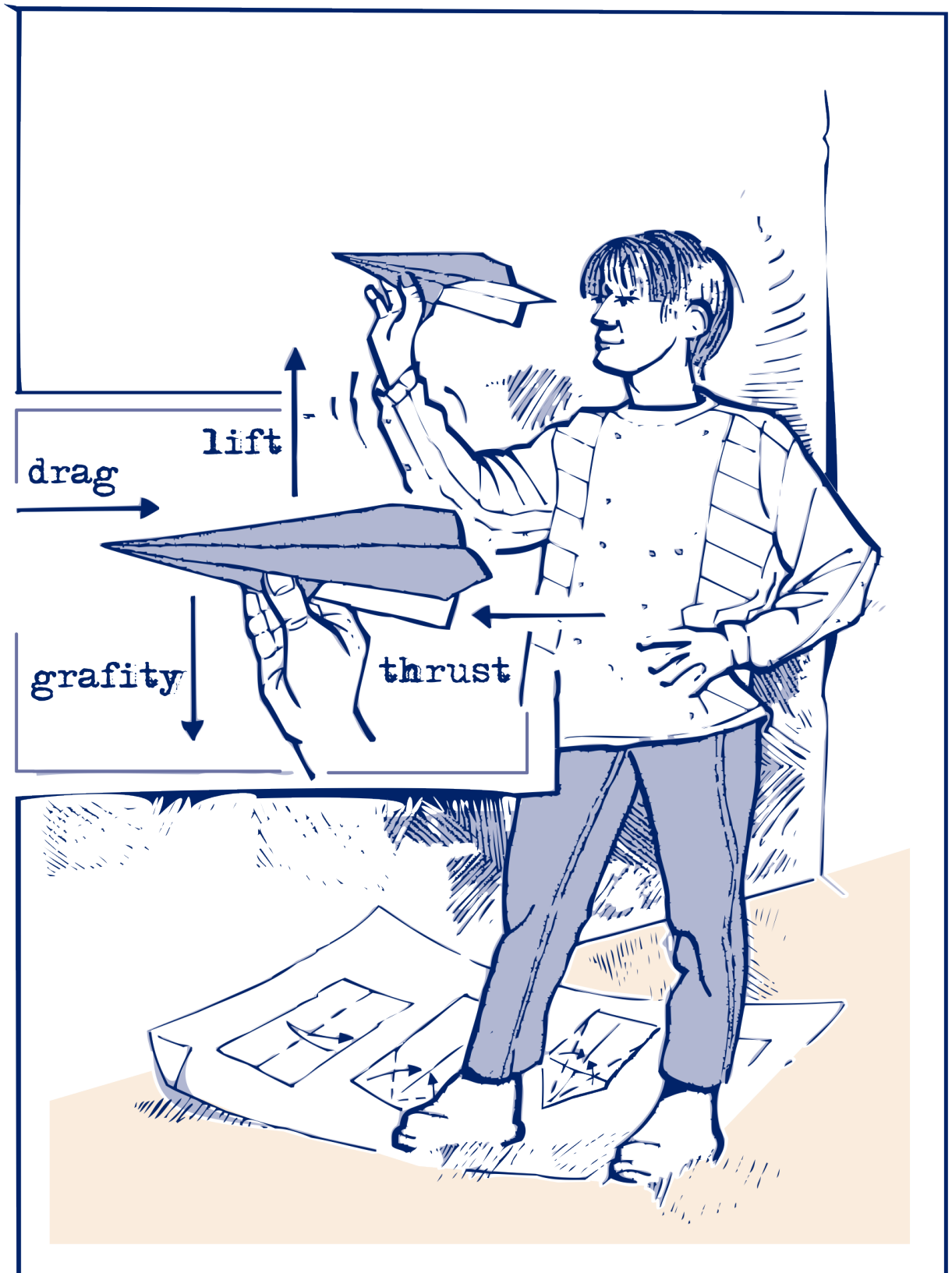
Hint

Er wordt een hint gegeven die je kan helpen bij het oplossen van de opgave. Je vindt de hints achterin het boek.



Facultatief

Deze opgaven/paragraaf kun je overslaan zonder de draad kwijt te raken.



6.1 Coördinaten en vectoren

Lijnen in de ruimte

Notaties en afspraken

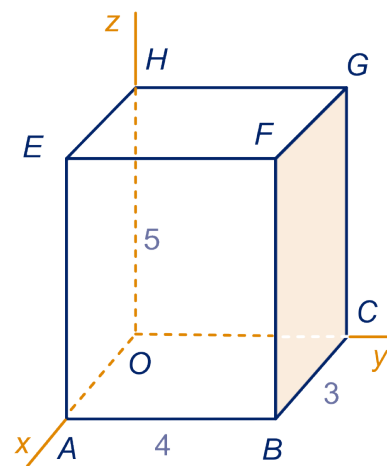
In de figuur is een balk in een assenstelsel getekend. Dat assenstelsel is zó gekozen dat $A(3,0,0)$, $C(0,4,0)$ en $H(0,0,5)$. Met $\overrightarrow{AB}$ bedoelen we de vector die punt A naar punt B schuift. Je hebt de notatie al in het hoofdstuk 'De kracht van vectoren' uit vwo 4 gezien. De **vector** $\overrightarrow{AG}$ is de verschuiving: 3 eenheden in de negatieve x -richting, 4 eenheden in de positieve y -richting en 5 eenheden in de positieve z -richting. We noteren dat zó:

$$\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ We noemen } -3, 4 \text{ en } 5 \text{ de } \mathbf{kentallen} \text{ van } \overrightarrow{AG}. \text{ Verder}$$

schrijven we voor de vector die O naar A verplaatst ook wel $\vec{a}$.

Dan is bijvoorbeeld $\vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

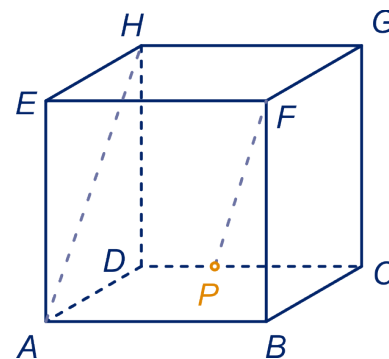
Met **vlak** OEC bedoelen we het vlak door de punten O , E en C . Dat vlak loopt in alle richtingen oneindig ver door. In dat vlak ligt bijvoorbeeld het punt E , maar ook het punt $(30,100,50)$, ga dat na.



1

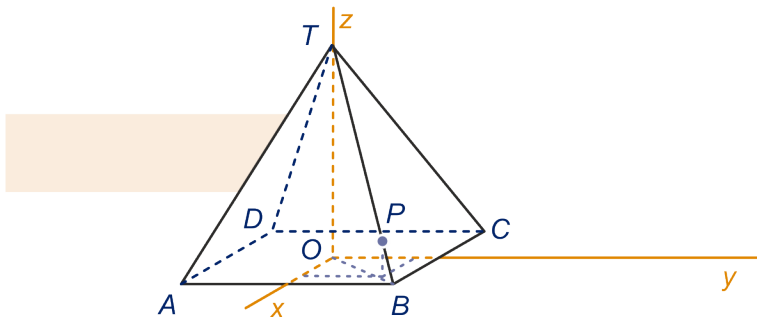
$ABCD.EFGH$ is een kubus. Oppervlakkig gezien lijken de lijnen FP en AH evenwijdig te lopen. Dit kan natuurlijk niet. Met vectoren kun je dat laten zien. We kiezen een assenstelsel met D als oorsprong en $A(6,0,0)$, $B(6,6,0)$ en $H(0,0,6)$. P is het punt $(0,2,0)$.

- Geef de vectoren $\overrightarrow{PF}$ en $\overrightarrow{AH}$.
- Hoe kun je uit a concluderen dat de lijnen FP en AH niet evenwijdig lopen?



2

$T.ABCD$ is een regelmatige vierzijdige piramide met $A(4,-4,0)$, $B(4,4,0)$ en $T(0,0,8)$.



- Geef de coördinaten van C en D .

6.1 Coördinaten en vectoren

Pligt op ribbe BT zó, dat $PT = 3 \cdot BP$.

b Bepaal met gelijkvormigheid de coördinaten van P .

Een andere manier om de coördinaten van P te vinden gaat als volgt.

c Vul in: $\overrightarrow{BT} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$, $TP = 3 \cdot BP$, dus: $\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$.

Je komt dus vanuit B in P door 1 eenheid in de negatieve x -richting, 1 eenheid in de negatieve y -richting en 2 eenheden in de z -richting te gaan.

$$\text{Dus } P = (4 + -1, 4 + -1, 0 + 2) = (3, 3, 2).$$

Punt R verdeelt ribbe BT zó, dat $BR : BT = 3 : 7$.

d Bereken zoals in c. de coördinaten van R .

Opmerking

Elk punt op lijn BT kan vanuit B bereikt worden door in de richting van BT te lopen of in tegengestelde richting.

Elk punt van lijn BT heeft dus coördinaten van de vorm:

$(4 + 4t, 4 + 4t, 0 + 8t)$, waarbij t een willekeurig getal voorstelt.

We schrijven in het vervolg ook: $(4 - 4t, 4 - 4t, 0 + 8t)$ als

$(4, 4, 0) + t \cdot (-4, -4, 8)$ en als $(4, 4, 0) + (-4t, -4t, 8t)$.

We noemen $(x, y, z) = (4, 4, 0) + (-4t, -4t, 8t)$ een **parametervoorstelling** (pv) van lijn BT .

Dit betekent: elke waarde van t die je invult, geeft een punt van lijn BT en omgekeerd krijg je elk punt van lijn BT door een waarde van t in te vullen.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ is een } \mathbf{vectorvoorstelling} \text{ van lijn } BT. \text{ De}$$

vector $\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ geeft de richting van lijn BT aan en heet daarom

richtingsvector van lijn BT .

In plaats van $\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ kun je natuurlijk ook $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ als

richtingsvector nemen.

De variabele t noemen we de **parameter**.

We schrijven in plaats van $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ ook $(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)$ en in plaats van $(k \cdot a_1, k \cdot a_2, k \cdot a_3)$ ook $k \cdot (a_1, a_2, a_3)$.

6.1 Coördinaten en vectoren



Opmerking

In het voorgaande theorieblok zijn vectoren opgeteld en met getallen vermenigvuldigd. Dit alles gaat volkomen analoog aan hetgeen in het eerder genoemde hoofdstuk *De kracht van vectoren* in twee dimensies gedaan is. We zullen niet steeds alles weer opnieuw voor vectoren in drie dimensies definiëren. Er zijn meer pv's en vectorvoorstellingen te geven van eenzelfde lijn.

3

We gaan verder met opgave 2.

- a Bereken welk punt op ribbe BT gelijke y - en z -coördinaat heeft.

$(x, y, z) = (0, 0, 8) + t \cdot (-1, -1, 2)$ oftewel $(x, y, z) = (-t, -t, 8 - 2t)$ is ook een pv van lijn BT .

- b Ga dat na.
c Geef een pv van lijn AT .

4



$ABCO.EFGH$ is de kubus met $A(4, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$ en $H(0, 0, 4)$. P is een punt in het voorvlak van de kubus. Vlak BHP noemen we V .

- a Teken op het werkblad het snijpunt van vlak V met ribbe AE .

Lijn k gaat door P en is evenwijdig aan diagonaal BH .

- b Teken het snijpunt van k met de linker zijkant van de kubus. Licht je antwoord toe.

Veronderstel dat P het punt $(4, 1, 2)$ is.

- c Bereken de coördinaten van het snijpunt uit b met behulp van een pv van k .

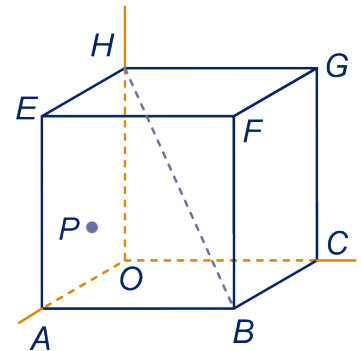
m is de lijn door P evenwijdig aan lijn AC .

- d Teken op het werkblad het snijpunt van m met de rechter zijkant van de kubus. Licht je antwoord toe.



Hint 1.

- e Bereken de coördinaten van het snijpunt uit d.



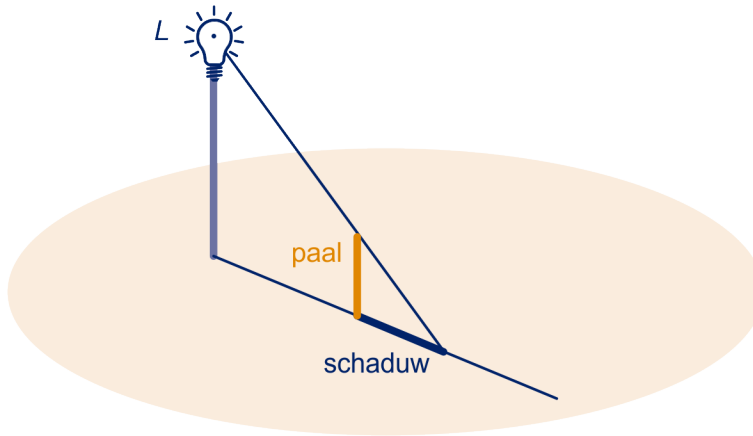
6.1 Coördinaten en vectoren



Opmerking

Een lantaarnpaal met lichtpunt in L werpt een schaduw van een stok op de grond.

Hieronder zie je hoe je die schaduw kunt vinden.

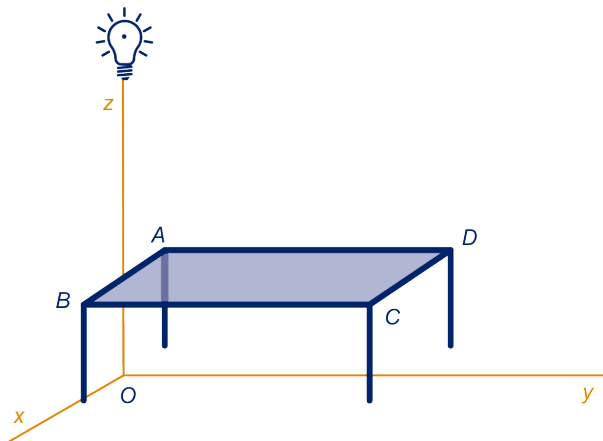


De schaduw van de top van de stok ligt op de lijn door de voet van de lantaarnpaal en de voet van de stok. Er is aangenomen dat de stok en de lantaarnpaal in één vlak liggen.

5



Op het werkblad is een tafel getekend met ijzeren frame en glazen blad. Het blad is 80 bij 120 cm en heeft hoogte 40 cm boven de vloer. A , B , C en D zijn de hoekpunten van het blad. Midden boven lijnstuk AB hangt een lichtpunt op hoogte 120 cm boven de vloer.



- Teken op het werkblad de schaduw van het tafelframe op de vloer.
- Bereken de afmetingen van de schaduw van het blad.

We voeren coördinaten in: het lichtpunt hangt in $L(0,0,12)$, $A = (-4,0,4)$ en $C = (4,12,4)$.

6.1 Coördinaten en vectoren

- c Bereken met behulp van een pv van lijn LC de coördinaten van de schaduw van C .

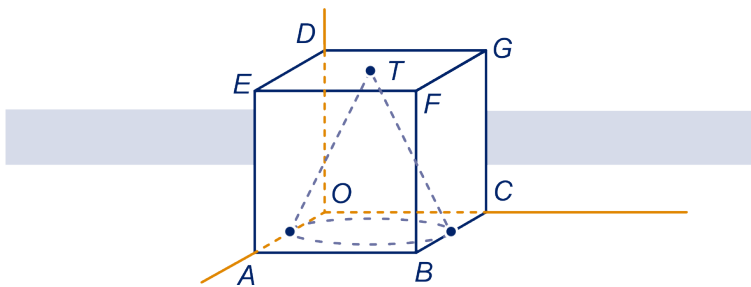
Op tafel ligt een muntstuk met een straal van 1 cm en middelpunt $(2,3,4)$.

- d Beschrijf de schaduw van het muntstuk zo volledig mogelijk. Licht je antwoord toe.

6



$OABC.DEFG$ is een recht blok met $A(40,0,0)$, $B(0,30,0)$ en $D(0,0,40)$. In het blok zit een kegel met top $T(20,15,40)$. De grondcirkel van de kegel ligt in het Oxy -vlak en heeft straal 15. Lijn OF snijdt de kegel in twee punten S en U . Het punt dat het dichtst bij O ligt is S .



- a Teken S en U op het werkblad.



Hint 2.

- b Teken rechthoek $OBFD$ op schaal met daarin de doorsnede van de kegel en geef de punten S en U erin aan.
- c Bereken de hoogte van S en van U met gelijkvormigheid.

We kunnen de coördinaten van S (en U) ook met behulp van parametervoorstellingen van lijnen berekenen.

Lijn OB snijdt de grondcirkel van de kegel in P en Q (P ligt het dichtst bij O).

- d Bereken de coördinaten van P .
- e Geef een parametervoorstelling van lijn TP .

Alle punten van lijn OF hebben twee coördinaten gelijk.

- f Welke en waarom?

Hoe kun je de coördinaten van S nu met behulp van de pv in d berekenen?

Klopt het met de hoogte die je in b berekend hebt?

6.1 Coördinaten en vectoren

7



$T.OABC$ is een regelmatige vierzijdige piramide met $A(4,0,0)$, $C(0,4,0)$ en $T(2,2,6)$. M is het midden van ribbe AT en N van ribbe CT . In B schijnt een lampje.

- a Teken de schaduw van lijnstuk MN op de zijvlakken OAT en OCT van de piramide.



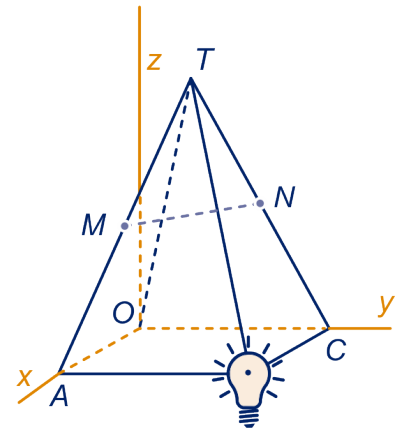
Hint 3.

Het zal je niet meevallen de hoogte van de knik van de schaduw met gelijkvormigheid te berekenen. Gemakkelijker gaat dat met een parametervoorstelling.

- b Geef een pv van lijn OT , gebruik als parameter de variabele t .

Geef ook een pv van de lijn door B en het midden van MN , gebruik als parameter de variabele s .

- c Wat moet je voor s en t nemen om in beide pv's hetzelfde punt te krijgen?
d Op welke hoogte bevindt de knik van de schaduw zich?



8

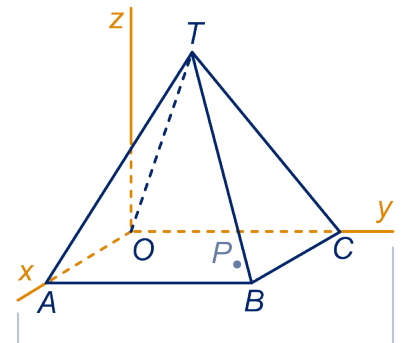


$T.ABCO$ is een regelmatige vierzijdige piramide met $A(6,0,0)$, $C(0,6,0)$ en $T(3,3,6)$. In het grondvlak van de piramide ligt het punt $P(4,5,0)$.

- a Teken de snijlijn van vlak TAP met de rechter zijkant van de piramide.
b Teken het snijpunt van de lijn door P evenwijdig aan lijn TA met de rechter zijkant van de piramide.

S is het snijpunt van vlak TBC met de z -as.

- c Teken S op het werkblad.
d Bereken de coördinaten van S .



9

In een woestijnachtig oorlogsgebied stijgen jagers op om de vijandelijke stellingen te bestoken.



6.1 Coördinaten en vectoren

Luchtafweergeschut probeert de jagers neer te halen. In een assenstelsel kunnen we de situatie als volgt beschrijven. In punt $(4,12,0)$ starten de jagers in de richting $(0,-7,1)$. In punt $(8,2,0)$ worden raketten afgeschoten in de richting $(-4,1,1)$.

- a Maak een tekening van de situatie in een assenstelsel.
- b Ga na dat de baan van de jagers en de baan van de raketten elkaar niet snijden.

Het afweergeschut kan niet horizontaal gedraaid worden, maar wel verticaal.

- c Wat moet de afvuurrichting (geef een vector) worden opdat de banen elkaar wel snijden?

Opmerking

Als je het snijpunt van twee lijnen waarvan je pv's hebt, wil berekenen, moet je verschillende variabelen voor de parameters nemen. Zie bijvoorbeeld opgave 7c. Als je dezelfde variabelen voor de parameters neemt, ga je er vanuit dat je op hetzelfde moment in het snijpunt bent.



6.2 Het inproduct in de ruimte

In het hoofdstuk ‘Rekenen aan lijnen’ hebben we gezien dat het inproduct een zeer bruikbaar instrument is. Dat zullen we in de loop van deze paragraaf ook in de ruimte introduceren. We hebben het inproduct onder andere gebruikt om de hoek tussen lijnen te berekenen. Eerst zullen we afspreken wat we met de hoek tussen twee lijnen in de ruimte bedoelen.

Onderlinge ligging van lijnen

In het tweedimensionale vlak (het platte vlak) heb je twee mogelijkheden voor de onderlinge ligging van twee verschillende lijnen:

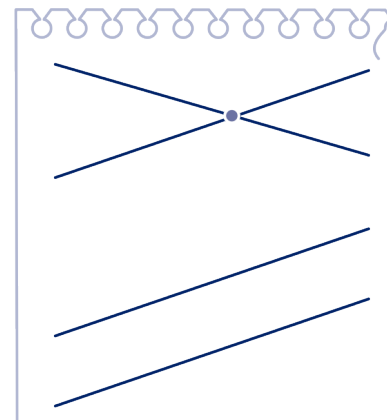
- ze snijden elkaar,
- ze zijn evenwijdig.

Als twee lijnen elkaar snijden, heb je vier hoeken. Als de lijnen loodrecht op elkaar staan, zijn de vier hoeken even groot, namelijk 90° . Als ze niet loodrecht op elkaar staan, heb je twee even grote stompe hoeken en twee even grote scherpe hoeken. Met de hoek tussen de twee lijnen bedoelen we de grootte van een van de scherpe hoeken.

In de driedimensionale ruimte heb je ook nog een derde mogelijkheid voor de onderlinge ligging van twee lijnen:

- ze kruisen elkaar.

Een voorbeeld hiervan heb je gezien in opgave 9b.



10

Bekijk kubus $ABCD.EFGH$ hiernaast. M is het midden van ribbe BF .

Zeg van elk van de volgende lijnenparen of ze elkaar snijden, evenwijdig zijn of elkaar kruisen.

BG en AH ,

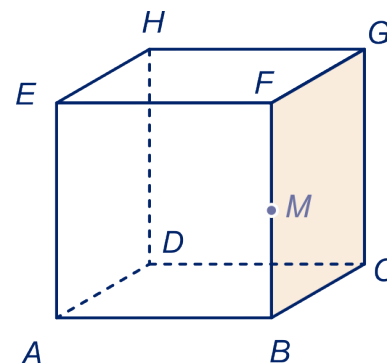
BG en ED ,

HM en BD ,

AM en GH .

Als twee lijnen elkaar kruisen, is er geen vlak te vinden waar beide lijnen in liggen.

Zie de figuur bij opgave 10: we zeggen dat de lijnen BG en ED loodrecht op elkaar staan, hoewel ze elkaar niet snijden.



Definitie

Met de **hoek van twee (kruisende) lijnen** bedoelen we de hoek die ze met elkaar maken als je (een van) beide evenwijdig verschuift, totdat ze elkaar snijden.



6.2 Het inproduct in de ruimte



Voorbeeld

Je kunt lijn BG evenwijdig verschuiven tot lijn AH . Lijn AH snijdt lijn ED loodrecht. Dus de lijnen BG en ED staan loodrecht op elkaar.

11



Zie de figuur bij opgave 10.

a Geef twee lijnen die lijn DF loodrecht kruisen.

Teken op het werkblad de hoek tussen de volgende lijnen en bepaal hun grootte in graden nauwkeurig en als het kan exact.

- b AC en lijn GM ,
 AB en lijn HM ,
 AF en lijn DE .



Hint 4.

Het inproduct

12

Bekijk het blok $ABCO.EFGH$ hiernaast. We kiezen een assenstelsel in de ruimte. Dat doen we zoals gebruikelijk. A ligt op de x -as ligt, C op de y -as en H op de z -as.

- a Wat is de lengte van OF als de ribben van het blok lengte 3, 4 en 5 in de x -, y - en z -richting hebben?
- b Wat is de lengte van OF als de ribben van het blok lengte p , q en r hebben?
- c Geef de kentallen van de vector $\overrightarrow{BH}$.
Wat is zijn lengte?



Als $X = (x, y, z)$, dan is de lengte van $\overrightarrow{OX} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, voor alle x , y en z .

De lengte van een vector $\vec{v}$ noteren we als $|\vec{v}|$.

Zie ook hoofdstuk 17 van Vwo2 de paragraaf 'De ruimte in'

13

Gegeven zijn de punten $P(1,2,3)$ en $Q(-1,3,-3)$.

- a Geef de kentallen van $\overrightarrow{PQ}$ en bereken $|\overrightarrow{PQ}|$ exact.

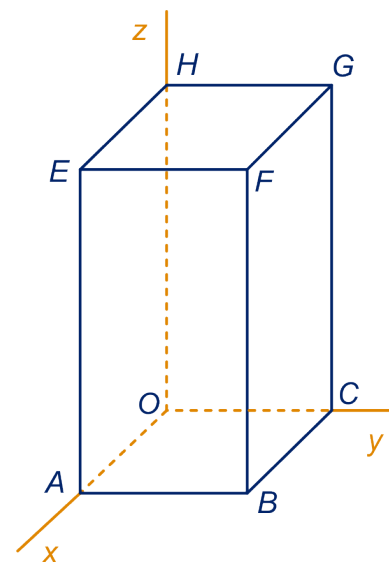
$A = (a_1, a_2, a_3)$ en $B = (b_1, b_2, b_3)$.

- b Geef de kentallen van $\overrightarrow{AB}$ en $|\overrightarrow{AB}|$.



Als $A = (a_1, a_2, a_3)$ en $B = (b_1, b_2, b_3)$, dan $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$ en

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$



6.2 Het inproduct in de ruimte

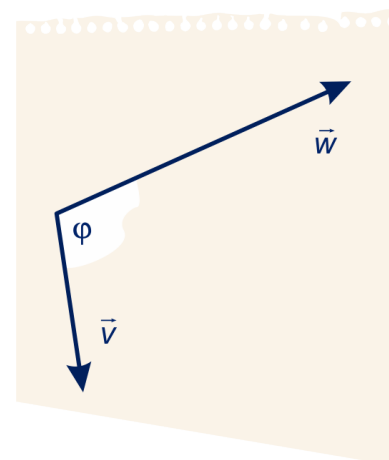
Analoog aan wat we in twee dimensies gedaan hebben (zie 'De kracht van vectoren') definiëren we het inproduct.

Het **inproduct** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ is: $v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3$.

We noteren het inproduct van $\vec{v}$ en $\vec{w}$ als: $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

Er geldt: $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\varphi)$, waarbij φ de hoek is tussen de vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$.

Het bewijs volgt direct uit de cosinusregel, net zoals in twee dimensies, zie het hoofdstuk 'Rekenen aan lijnen' van Vwo5.



Voorbeeld

De hoek tussen de lijn met $p_v(x, y, z) = (1 + t, 2 - t, 3 + 2t)$ en de lijn met $p_w(x, y, z) = (1 - 2t, 2 + 4t, 3)$ kun je als volgt in graden nauwkeurig berekenen.

Richtingsvectoren van de lijnen zijn: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Als α de hoek tussen die richtingsvectoren is, dan

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\alpha); \vec{v} \cdot \vec{w} = -6 \text{ en } |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| = 2\sqrt{30},$$

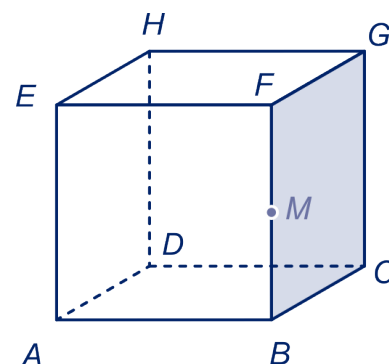
$$\text{dus } \cos(\alpha) = \frac{-6}{2\sqrt{30}} = -0,547\dots, \text{ dus } \alpha = 123^\circ.$$

De hoek tussen de lijnen is dan 57° .

In opgave 11b heb je de hoek tussen de lijnenparen

AC en GM , AB en HM en AF en DE berekend.

Doe dat nog eens met het inproduct, zoals in het voorbeeld.



6.2 Het inproduct in de ruimte

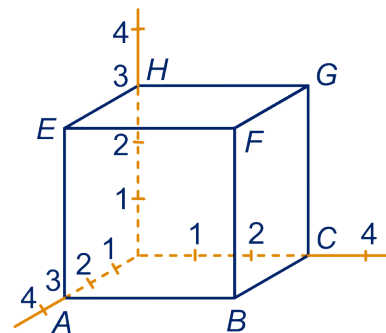
15

$ABCO.EFGH$ is een kubus met ribben van lengte 3, zie figuur.

- a Laat met behulp van het inproduct zien dat de lijnen AC en OF loodrecht op elkaar staan.

P is een punt ribbe FB , dus P heeft coördinaten $(3,3,z)$, voor zekere waarde van z tussen 0 en 3.

- b Bereken z als gegeven is dat OP loodrecht op EC staat.
 c Bereken z als AG en HP loodrecht op elkaar staan.
 d Geef vier vectoren met verschillende richting die loodrecht op lijn OF staan.



16

Het bouwsel in de figuur kun je je voorstellen als een recht driezijdig prisma met grondvlak OAB waarvan een stuk 'afgezaagd' is. Het zaagvlak is driehoek CDE .

Er is een assenstelsel aangebracht zó, dat

$O = (0,0,0)$, $A = (6,0,0)$, $B = (0,6,0)$, $C = (0,0,8)$, $D = (6,0,4)$ en $E = (0,6,6)$.

- a Bereken de inhoud van het bouwsel exact.



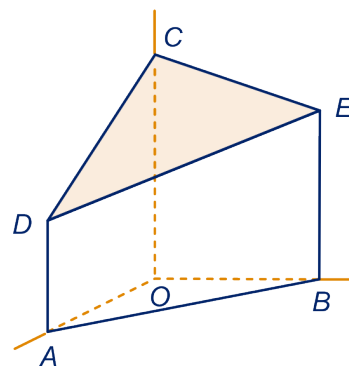
Hint 5.

Op lijnstuk DE ligt een punt X zó, dat de lijnen DE en CX loodrecht op elkaar staan.

- b Bereken de coördinaten X exact.



Hint 6.

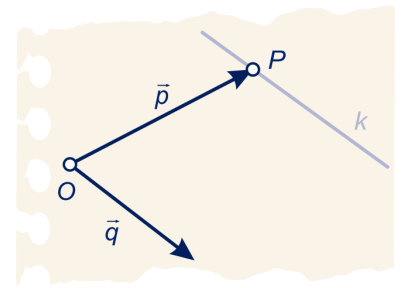


6.3 Parametervoorstelling en vergelijking van een vlak

Parametervoorstelling van een vlak

Gegeven is een lijn k en een richtingsvector $\vec{q}$ van k . Vanuit een punt P van k kun je elk ander punt van k bereiken door P over een veelvoud van $\vec{q}$ te verschuiven.

Dan is $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{q}$, waarbij je voor t alle mogelijke getallen neemt, een vectorvoorstelling van k . Door de oorsprong O over deze verzameling vectoren te verschuiven, krijg je de hele lijn k . Bij elk punt van k hoort precies één waarde van t . Zie 'De kracht van vectoren'.



Om vanuit een punt van een vlak elk ander punt van dat vlak door schuiven te bereiken, heb je twee richtingsvectoren, onafhankelijk van elkaar, nodig.

17

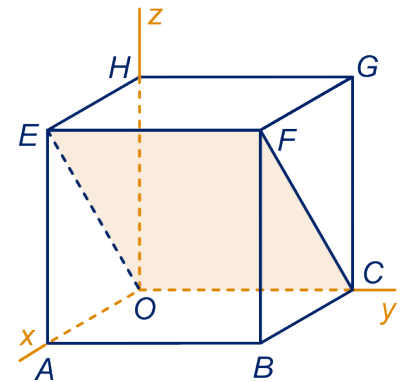
In de figuur is op de bekende manier een kubus in een assenstelsel getekend. Neem aan dat de ribben van de kubus 2 zijn. V is het vlak door de punten O , C en E .

Twee richtingsvectoren van V (onafhankelijk van elkaar) zijn:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Elk punt van V kun je bereiken door O te verschuiven over $p \cdot \vec{r} + q \cdot \vec{s}$ voor zekere getallen p en q .

- Welke getallen moet je voor p en q nemen om in het midden van de kubus uit te komen?
En in het midden van het 'rechter' zijvlak?
- Welke getallen moet je voor p en q nemen om in het midden van ribbe EF uit te komen?



Het punt $(7, -10, 7)$ ligt ook in V .

- Wat moet je voor p en q nemen om daar te komen?

We noemen $\vec{x} = p \cdot \vec{r} + q \cdot \vec{s}$, waarbij p en q alle mogelijke waarden aannemen, een vectorvoor (vv) van V (gegevens uit opgave 17).

De bij deze vectorvoorstelling horende parametervoorstelling (pv) van V is: $(x, y, z) = (p, q, p)$, ga dat na.



6.3 Parametervoorstelling en vergelijking van een vlak

18

We gaan verder met opgave 17 en verschuiven V over $\vec{k}$, zie figuur. Je krijgt vlak W . Lijn AB ligt in vlak W .

Een vv van W is: $\vec{x} = \vec{k} + p \cdot \vec{r} + q \cdot \vec{s}$.

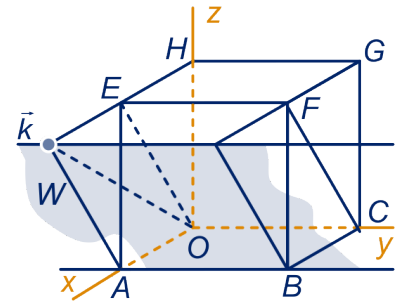
a Schrijf de bijbehorende pv van W op.

m is de lijn met pv $(x, y, z) = (t, 2 - 2t, 2t)$.

b Bereken de coördinaten van de snijpunten van m met de ribben van de kubus.

m snijdt W .

c Bereken de coördinaten van het snijpunt met behulp van de pv's van W en m .



19



We gaan verder met opgave 17.

U is het vlak met vv $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a Geef de bijbehorende pv van U .

b Welke hoekpunten van de kubus liggen in U ?

Het snijpunt van lijn OF met U noemen we S .

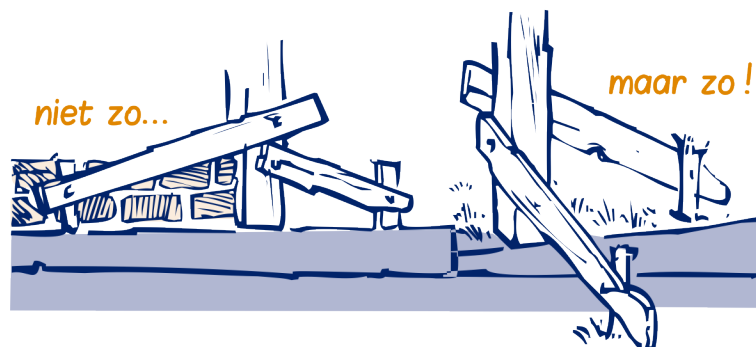
c Teken S op het werkblad.

d Bereken de coördinaten van S .

Vergelijkingen van vlakken

Vouw een vel papier dubbel. Open de vouw gedeeltelijk. Het vel papier kan nu op tafel gezet worden zonder dat het omvalt. De vouw staat loodrecht op het tafelblad. "De vouw staat in het lood."

Als een metselaar een muur gaat metselen, zet hij eerst wat palen recht omhoog: hij stelt profielen. Zo'n profiel staat pas recht als het vanuit twee onafhankelijke richtingen gezien recht staat. Dan staat het vanuit elke richting gezien recht.



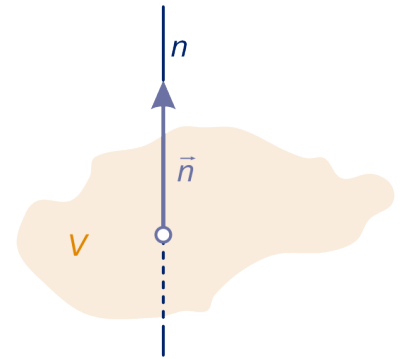
6.3 Parametervoorstelling en vergelijking van een vlak



Een lijn n staat loodrecht op een vlak V (maakt met elke lijn in V een hoek van 90°) als hij loodrecht op twee niet-parallelle lijnen van V staat.

n heet een **normaal** van V en een richtingsvector $\vec{n}$ van n heet **normaalvector** van V .

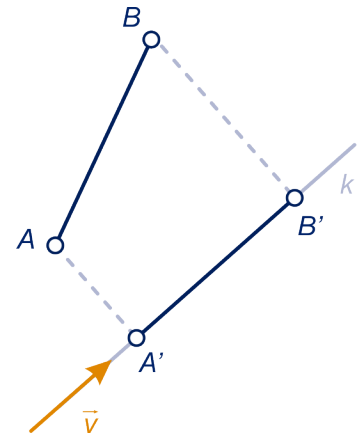
In 'Rekenen aan lijnen' hebben we de volgende stelling afgeleid. Deze stelling geldt ook in de ruimte; het bewijs gaat op dezelfde manier.



Stelling

Lijnstuk AB wordt loodrecht op een lijn k geprojecteerd.

Dan is de lengte van de projectie $\frac{|\vec{AB} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|}$.



Je kunt de stelling ook in woorden formuleren.

De lengte van de projectie krijg je als volgt. Neem een richtingsvector van k , bereken het inproduct hiervan met de vector $\vec{AB}$. Neem van het resultaat de absolute waarde en deel door de lengte van de richtingsvector van k die je gekozen hebt.

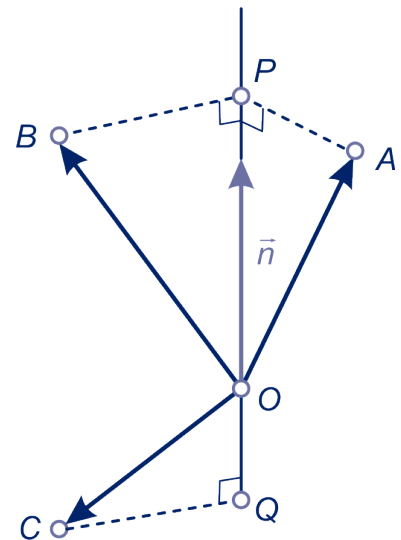
20

Gegeven is een lijn n door de oorsprong O ; $\vec{n}$ is een richtingsvector van n met lengte 4. De punten A en B hebben dezelfde (loodrechte) projectie P op n . De lengte van OP is 6. De projectie van C op n is Q en de lengte van OQ is 2. De hoeken die $\vec{a}$ en $\vec{b}$ met $\vec{n}$ maken zijn scherp; de hoek die $\vec{c}$ met $\vec{n}$ maakt is stomp.

a Bereken $\vec{n} \cdot \vec{a}$, $\vec{n} \cdot \vec{b}$ en $\vec{n} \cdot \vec{c}$ exact.

Punten X waarvoor $\vec{x}$ hetzelfde inproduct met $\vec{n}$ heeft als $\vec{a}$, hebben dezelfde projectie P op lijn n .

b Beschrijf de ligging van die punten X .



Stelling

Gegeven is een lijn n met richtingsvector $\vec{n}$ en een punt A .

De punten X waarvoor geldt dat $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{a}$ vormen een vlak V door A loodrecht op lijn n . Dus n is een normaal en $\vec{n}$ een normaalvector van V .

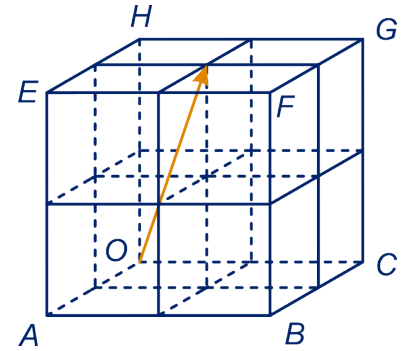
6.3 Parametervoorstelling en vergelijking van een vlak

21

$ABCO.EFGH$ is een kubus met ribben 2 met $A(2,0,0)$, $C(0,2,0)$ en $H(0,0,2)$. N is het midden van het bovenvlak van de kubus.

We bekijken de punten $X(x, y, z)$ met $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{a}$. Zij vormen een vlak V .

- Laat zien: X ligt in $V \Leftrightarrow x + y + 2z = 2$.
- Zoek punten (x, y, z) op de ribben van de kubus die aan de vergelijking $x + y + 2z = 2$ voldoen en teken de doorsnede van V met de kubus.



Bekijk de vergelijking $y + 2z = 2$.

Een punt dat aan de vergelijking voldoet is B . Je kunt de vergelijking schrijven als $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{b}$ voor zekere vector $\vec{n}$.

- Welke vector $\vec{n}$?

Dus de punten die aan de vergelijking $y + 2z = 2$ voldoen

vormen een vlak W door B loodrecht op de vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Teken de doorsnede van W met de kubus. Bereken bijvoorbeeld de punten van W die op de ribben van de kubus liggen.
- Hoe zie je aan de vergelijking $y + 2z = 2$ dat het bijbehorende vlak evenwijdig is aan de x -as?
- Geef een pv $(x, y, z) = (\dots, \dots, \dots)$ van de snijlijn van de vlakken V en W en ga na dat de punten $(x, y, z) = (\dots, \dots, \dots)$ aan de gegeven vergelijkingen van V en W voldoen.



De punten (x, y, z) met $ax + by + cz = d$, waarbij $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ niet

de nulvector is, vormen een vlak met normaalvector $\vec{n}$.

Als $a = 0$ (of $b = 0$ of $c = 0$), dan is het vlak evenwijdig met de x -as (of de y -as of de z -as).



Opmerking

In opgave 21 heb je punten op de ribben van een kubus moeten aangeven die aan een bepaalde vergelijking voldoen. Buiten de kubus liggen natuurlijk ook nog punten die aan die vergelijking voldoen.

De ligging van een vlak in een assenstelsel kan vaak goed geïllustreerd worden door de snijpunten met coördinaat-assen te bepalen en deze te verbinden.

Dat bekijken we in het volgende.

6.3 Parametervoorstelling en vergelijking van een vlak

Een vlak en zijn snijpunten met de coördinaat-assen

22



$ABCO.EFGH$ in de figuur is een kubus met ribben 4 en V is het vlak met vergelijking $x + y + z = 6$.

- Bepaal de coördinaten van de snijpunten van V met de coördinaat-assen en teken die punten op het werkblad. Verbind de drie snijpunten met elkaar.
- Bepaal coördinaten van de snijpunten van V met de ribben van de kubus.

Volgens de stelling hierboven is $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ normaalvector van

V , dus ook $\overrightarrow{OF}$. We willen dat ook 'meetkundig' inzien. Daarvoor moeten we laten zien dat lijn OF loodrecht op twee niet-evenwijdige lijnen van V staat.

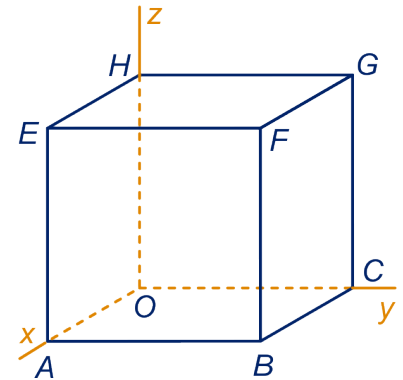
- Geef een meetkundig argument waarom de lijnen OF en BG loodrecht op elkaar staan.

Omdat lijn BG loodrecht op vlak $OCFE$ staat, staat lijn OF ook loodrecht op lijn BG .

Het midden van van diagonaal EG noemen we N .

Omdat lijn OF loodrecht op V staat, moet lijn OF ook loodrecht op lijn BN staan.

- Kun jij dat meetkundig inzien in rechthoek $OBFH$?



23

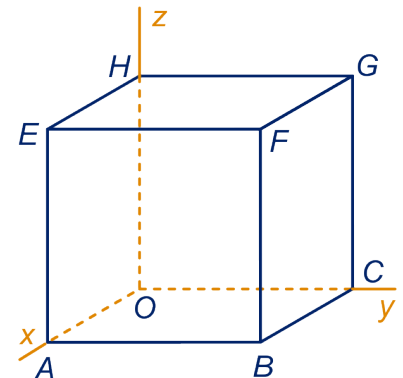


We gaan verder met de kubus van de vorige opgave. U is het vlak met vergelijking $x + y + 2z = 6$.

- Bepaal de coördinaten van de snijpunten van U met de coördinaat-assen en teken die punten op het werkblad. Verbind de drie snijpunten met elkaar.
- Bepaal de snijpunten van U met de ribben van de kubus.
- Geef een normaalvector van U .

M is het midden van ribbe $\underline{BF}$ en N het midden van EG zoals in de vorige opgave. Dan is $\overrightarrow{ON}$ ook een normaalvector van U , het is namelijk een veelvoud van de vector die je in c gegeven hebt. We willen weer meetkundig zien dat ON loodrecht op U staat.

- Waarom staat ON loodrecht op EG ?
- Hoe zie je in rechthoek $OBFH$ dat ON loodrecht op MN staat?



6.3 Parametervoorstelling en vergelijking van een vlak



Opmerking

Een vlak is vastgelegd door drie punten die niet op één lijn liggen. Het vlak door de punten A , B en C noemen we vlak ABC .



De kortste verbinding van een punt P met een vlak V is het loodrecht verbindingslijnstuk, dus de lengte van lijnstuk PQ , waarbij lijn PQ normaal is van V en Q in V ligt.

24



De vlakken U en MEG zijn evenwijdig.

- Waarom?
- Bepaal het kortste verbindingslijnstuk van O met vlak EGM en bereken de afstand van O tot vlak EGM exact.

Het kortste verbindingslijnstuk van O tot vlak ACH ligt in rechthoek $OBFH$.

- Laat dat meetkundig zien.



Hint 7.

- Bereken de afstand van O tot vlak ACH in die rechthoek.

25

We bekijken de vergelijking $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$. Dit is de vergelijking van een vlak V , want het is een lineaire vergelijking.

- Laat zien dat de punten A , C en H in V liggen.

Door de vergelijking te schrijven in de vorm $ax + by + cz = d$, kun je een normaalvector van vlak V vinden.

- Doe dat.

We bekijken het vlak W met vergelijking $\frac{x}{3} + \frac{z}{5} = 1$.

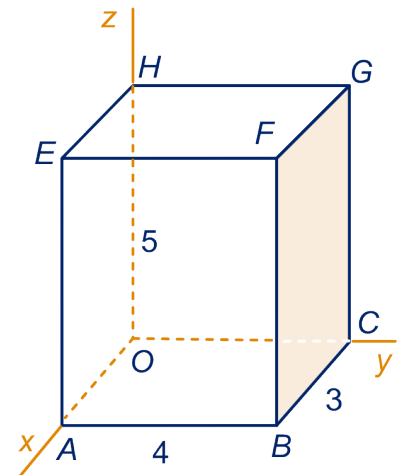
- Bepaal de snijpunten van dit vlak met de coördinaatassen. (Dat zijn er maar twee.)

Een punt ligt in W . Als je zijn y -coördinaat verandert, dan blijft het punt in W .

- Leg uit hoe dat komt.

W is dus evenwijdig met de y -as en snijdt de andere coördinaat-assen in $(3,0,0)$ en $(0,0,5)$, het is dus vlak ABH .

- Bepaal een normaalvector van vlak ABH .



6.3 Parametervoorstelling en vergelijking van een vlak



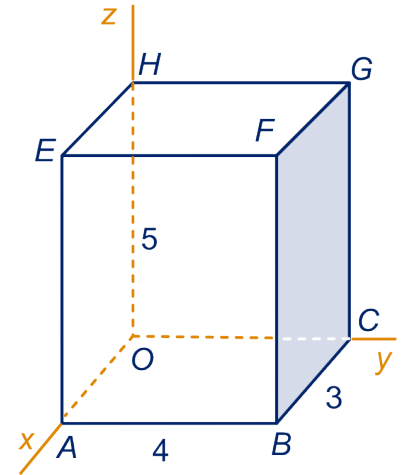
In het volgende zijn a , b en c getallen niet gelijk aan 0.

- Het vlak dat de coördinaatassen snijdt in $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ en $(0,0,c)$ heeft vergelijking $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.
- Het vlak evenwijdig met de x -as, dat de y -as snijdt in $(0,b,0)$ en de z -as in $(0,0,c)$, heeft vergelijking $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.
- Het vlak evenwijdig met het Oxy -vlak dat de z -as in $(0,0,c)$ snijdt heeft vergelijking $\frac{z}{c} = 1$.

26

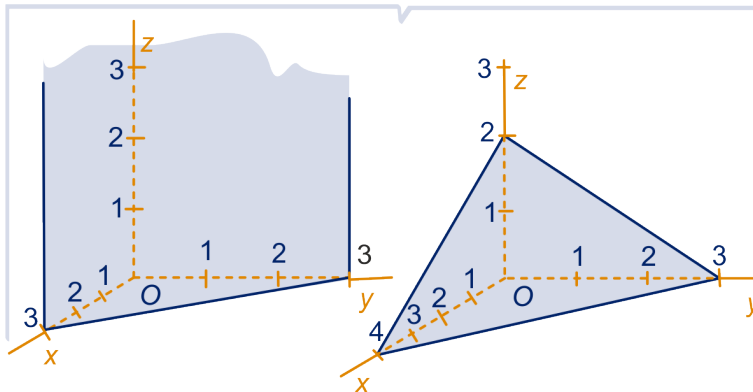
We gaan verder met het blok uit de vorige opgave.

- Bereken de coördinaten van de snijpunten van vlak BEG met coördinaatassen.
- Geef een vergelijking van vlak BEG en bepaal daarmee een normaalvector van vlak BEG .
- Geef een vergelijking van vlak BEH en een normaalvector van vlak BEH .
- Geef een vergelijking van het vlak door O evenwijdig aan BEH .



Opmerking

Als je een vergelijking van een vlak hebt, kun je daar vaak een mooi ruimtelijk plaatje bij maken, door in ieder geval de snijpunten van dat vlak met de coördinaat-assen te tekenen. In figuur 1 is het vlak met vergelijking $x + y = 3$ getekend (dat is evenwijdig met de z -as) en in figuur 2 het vlak met vergelijking $3x + 4y + 6z = 12$.



6.3 Parametervoorstelling en vergelijking van een vlak

27



Bepaal de snijpunten van de volgende vlakken met de coördinaatassen en maak van elk vlak een plaatje zoals in de voorgaande opmerking.

$$2x + 3y + 12z = 6$$

$$2x + 3y = 6$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$$

$$x + 3z = 3$$

$$x - y = 0$$

$$2x = 4$$

28

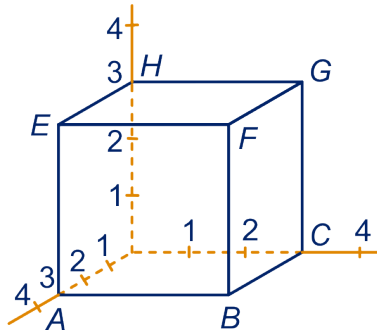


De kubus $ABCO.EFGH$ heeft ribbe 3. A , C en H liggen op de coördinaatassen.

V is het vlak met vergelijking $2x + y + z = 4$.

- a Bereken de coördinaten van de snijpunten van V met de coördinaatassen en teken V op het werkblad.

V snijdt ribbe HG .



- b Bereken de coördinaten van het snijpunt.



Hint 8.

- c Bereken de coördinaten van de andere snijpunten van V met ribben van de kubus.

V 'zaagt' de kubus als het ware in twee stukken.

- d Kleur het zaagvlak.

29

$T.ABCD$ is een regelmatige vierzijdige piramide met:

$A(3, -3, 0)$, $B(3, 3, 0)$, $C(-3, 3, 0)$, $D(-3, -3, 0)$ en $T(0, 0, 6)$. V is het vlak met vergelijking $y + z = 3$.

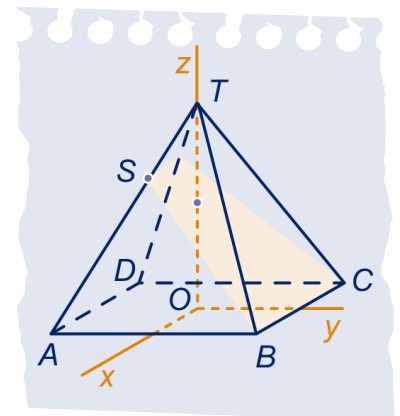
V snijdt ribbe AT .

Bereken de coördinaten van het snijpunt.

30

Vlak U heeft vergelijking $2x + 3y + 4z = 6$, vlak V heeft vergelijking $4x + 6y + 8z = 17$.

- a Herschrijf de gegeven vergelijking van V tot $2x + 3y + 4z = \dots$
Welk getal moet er ingevuld worden?



6.3 Parametervoorstelling en vergelijking van een vlak

- b Hoe zie je aan de vergelijkingen van U en V dat ze geen gemeenschappelijke punten hebben?

Dus zijn U en V evenwijdig.

W is het vlak met vergelijking $x + ay + bz = 20$ voor zekere getallen a en b .

Vlak U is evenwijdig met vlak W .

- c Welke zijn de getallen a en b ?

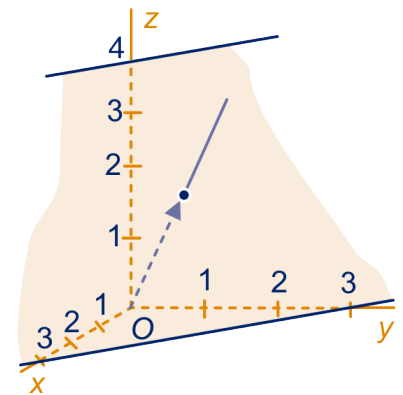
31

Kogel door de tent

Een dakdeel van een tent ligt in het vlak dat de coördinaatassen snijdt in $(3,0,0)$, $(0,3,0)$ en $(0,0,4)$.



figuur 1



figuur 2

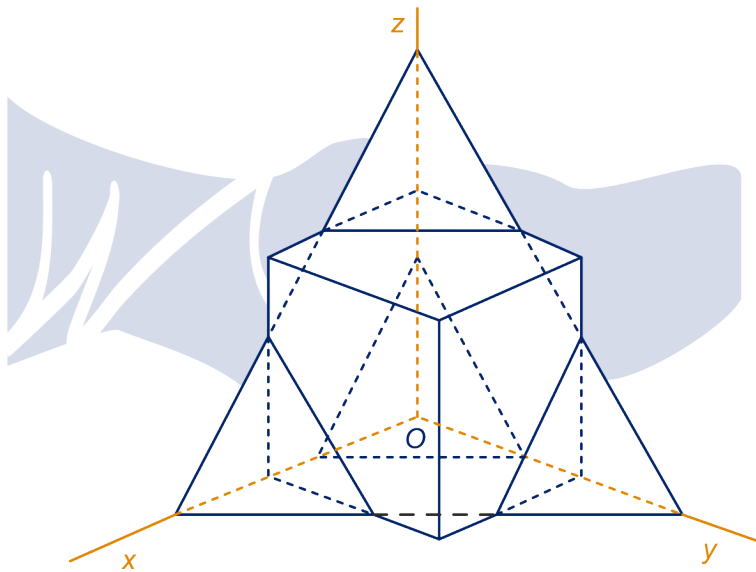
- a Geef een vergelijking van dat vlak.

Vanuit de oorsprong $O(0,0,0)$ in de tent wordt een kogel

afgevuurd in de richting $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- b Bereken de coördinaten van het punt waar de kogel de tent verlaat.

Hieronder zijn twee vlakken getekend.



Beide vlakken snijden de kubus in middens van ribben. De getekende kubus heeft ribben van lengte 6.

a Geef van elk van de twee vlakken een vergelijking.

De twee vlakken snijden de kubus in drie stukken.

b Bereken de inhoud van het deel waarin het punt $(6,0,0)$ ligt.

Het is niet altijd eenvoudig om de snijpunten van een vlak met de coördinaatassen te bepalen. Daarom bekijken we in de volgende opgaven een andere manier om een vergelijking van een vlak te vinden.

Vergelijking van een vlak met behulp van een pv

Voorbeeld

V is het vlak door $A(2,3,1)$, $B(4,3,2)$ en $C(0,0,3)$. We zoeken een normaalvector $\vec{n}$ van V .

Onafhankelijke richtingen in V zijn: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ Voor

elk getal b staat de vector $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ -2 \end{pmatrix}$ loodrecht op $\vec{AB}$. We zoeken

een getal b zo dat $\vec{n}$ ook loodrecht staat op $\vec{AC}$.

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \Leftrightarrow -2 \cdot 1 + -3 \cdot b + 2 \cdot -2 = 0.$$

6.3 Parametervoorstelling en vergelijking van een vlak

Dus $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ is normaalvector van V .

Een vergelijking van V is dus van de vorm: $x - 2y - 2z = d$, voor een of ander getal d dat je kunt vinden door de coördinaten van een punt van V , bijvoorbeeld A in de vergelijking in te vullen. Je vindt dan $x - 2y - 2z = -6$ als vergelijking van V .

33

Stel van de volgende vlakken een vergelijking op.

- het vlak door de punten $(1,2,3)$, $(1,4,5)$ en $(2,6,0)$
- het vlak door de punten $(1,2,3)$, $(2,4,5)$ en $(2,4,0)$.
- het vlak door de punten $(1,2,3)$, $(2,4,5)$ en $(-4,1,3)$.
- het vlak door de punten $(1,2,3)$, $(4,2,3)$ en $(2,6,0)$.

Om een normaalvector te vinden gebruiken we een richting van het vlak die een component 0 heeft. Soms kost het moeite zo'n richting te vinden, maar het kan altijd. Hoe je dat moet doen, zie je in het volgende voorbeeld.



Voorbeeld

V is het vlak door $A(1,2,3)$, $B(3,1,4)$ en $C(0,4,5)$.

Richtingen in V zijn: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bij deze

twee richtingen maken we een nieuwe richting van vlak V :

$\vec{AB} + 2 \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Voor elk getal a staat $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ loodrecht

op $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. We zoeken een getal a zo dat $\vec{n}$ ook loodrecht staat op

$\vec{AB}$ (of $\vec{AC}$).

$\vec{AB} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow a = 4$, een vergelijking van V is dus:

$4x + 5y - 3z = d$. Het punt $(1,2,3)$ ligt in V , dit geeft $d = 5$.

Een vergelijking van V is dus: $4x + 5y - 3z = 5$.



Opmerking

In paragraaf 5 wordt een andere manier behandeld om een normaalvector van een vlak te vinden.

6.3 Parametervoorstelling en vergelijking van een vlak

34

Stel van de volgende vlakken een vergelijking op.

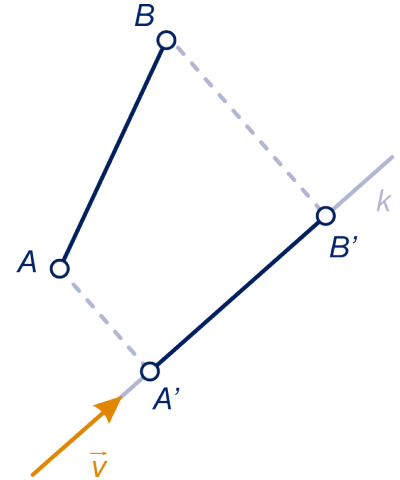
- het vlak door de punten $(1,2,3)$, $(2,1,-3)$ en $(7,0,5)$
- het vlak door de punten $(3,0,0)$, $(0,-2,1)$ en $(5,2,2)$.
- het vlak door de punten $(1,2,3)$, $(1,0,0)$ en $(4,1,1)$.
- het vlak door de punten $(1,1,3)$, $(3,5,5)$ en $(0,-1,2)$.

We hebben eerder deze paragraaf de volgende stelling gebruikt.

Als lijnstuk AB loodrecht op een lijn wordt k geprojecteerd en $\vec{v}$ een richtingsvector van k is, dan is de lengte van de projectie

$$\frac{|\vec{AB} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|}.$$

Deze stelling kun je ook goed gebruiken om de afstand van een punt tot een vlak te berekenen. Hoe dat gaat zie je in de volgende opgave.



35

V is het vlak met vergelijking $2x - 3y + 4z - 11 = 0$ en P het

punt $(1,2,3)$. Dan is $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ normaalvector van V .

Het punt $A(1,-3,0)$ ligt in V .

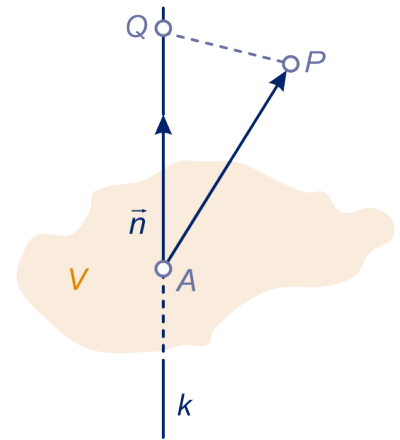
a Bereken $\vec{n} \cdot \vec{AP}$ en $|\vec{n}|$.

De projectie van $\vec{AP}$ op de lijn k door A met richtingsvector $\vec{n}$, kan niet schelen welke, is de afstand van P tot V , zoals duidelijk wordt uit de figuur.

b Bereken die afstand exact.

Omdat $\vec{n} \cdot \vec{AP} = \vec{n} \cdot \vec{p} - \vec{n} \cdot \vec{a}$, geeft $\vec{n} \cdot \vec{AP}$ hetzelfde getal als dat je krijgt door de coördinaten van P in te vullen in $2x - 3y + 4z - 11$.

c Ga dat na.



Dus de afstand van P tot V krijg je door de coördinaten van P in te vullen in $2x - 3y + 4z - 11$, daarvan de absolute

waarde te nemen en vervolgens te delen door $\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right|$.

In het algemeen gaat het zo.

V is een vlak met normaalvector $\vec{n}$ en P een punt buiten V .

6.3 Parametervoorstelling en vergelijking van een vlak

De afstand van P tot V bepalen we door de stelling op de voorgaande bladzijde toe te passen.

Neem een punt A van V . k is de lijn door A met richtingsvector $\vec{n}$. Dan is de afstand van P tot V gelijk aan de lengte van AQ , waarbij Q de projectie van P op k is.

Volgens de stelling is de afstand dus:
$$\frac{|\vec{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}.$$

Neem aan: $A = (a_1, a_2, a_3)$, $P = (p_1, p_2, p_3)$ en $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$,

Een vergelijking van V is $n_1x + n_2y + n_3z - d = 0$ voor een of ander getal d .

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{AP} &= n_1 \cdot (p_1 - a_1) + n_2 \cdot (p_2 - a_2) + n_3 \cdot (p_3 - a_3) \\ &= n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2 + n_3 \cdot p_3 - (n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + n_3 \cdot a_3) \\ &= n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2 + n_3 \cdot p_3 - d \text{ want } n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + n_3 \cdot a_3 = d \\ &\text{omdat } A \text{ in } V \text{ ligt.} \end{aligned}$$

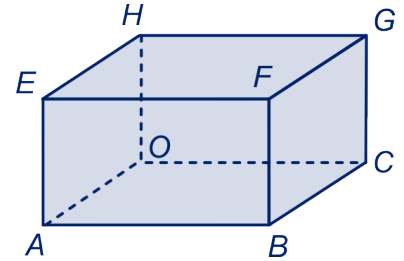
V is het vlak met vergelijking $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z - d = 0$ en P het punt (p_1, p_2, p_3) . Dan is de afstand van P tot V gelijk aan:

$$\frac{|n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2 + n_3 \cdot p_3 - d|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}.$$

Voorbeeld

In de figuur is een recht blok getekend, met $A(7,0,0)$, $C(0,7,0)$ en $H(0,0,4)$. We bepalen de afstand van F tot vlak ACH . Een vergelijking van vlak ACH is $\frac{x}{7} + \frac{y}{7} + \frac{z}{4} = 1$.

Deze vergelijking kun je schrijven als: $4x + 4y + 7z - 28 = 0$. De afstand van $F(7,7,4)$ is dus:
$$\frac{|4 \cdot 7 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 4 - 28|}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2}} = 6\frac{2}{9}.$$



36

Bereken de afstand van

1. $O(0,0,0)$ tot het vlak met vergelijking $x + 2y + 3z = 10$,
2. $A(1,2,3)$ tot het vlak met vergelijking $x + 2y - 3z = 12$,
3. $A(1,2,3)$ tot het vlak door de punten $(2,2,-3)$, $(0,6,0)$ en $(6,3,0)$.

37

k is de lijn door de punten $(1,-1,2)$ en $(3,3,3)$. V is het vlak met vergelijking $x + 2y - 2z = 12$.

- a Geef een pv van k .
- b Bereken de punten van k die afstand 3 tot V hebben.

6.3 Parametervoorstelling en vergelijking van een vlak

38

In opgave 32 is een kubus in drie stukken gezaagd. In die opgave hebben we de inhoud van het middelste stuk uitgerekend. We willen nu weten hoe 'dik' dat stuk is. Dat is de afstand van het vlak met vergelijking $x + y + z = 3$ tot het vlak met vergelijking $x + y + z = 9$.
Bereken die afstand.

39

Het blok in de figuur is in een assenstelsel getekend. Het is 4 hoog, 2 breed en 3 diep.

- a Geef een vergelijking van vlak ACH .
- b Bereken de afstand van O tot vlak ACH .

De inhoud van piramide $OACH$ is: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4$.

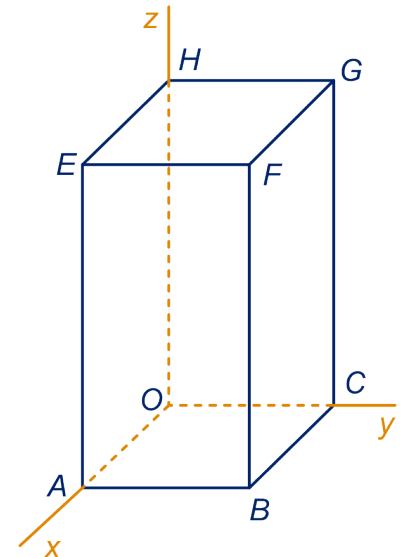
- c Leg dat uit.



Hint 9.

De oppervlakte van driehoek ACH kun je berekenen met behulp van het antwoord op b en de inhoud van de piramide.

- d Hoe? Wat vind je voor de oppervlakte van driehoek ACH ?



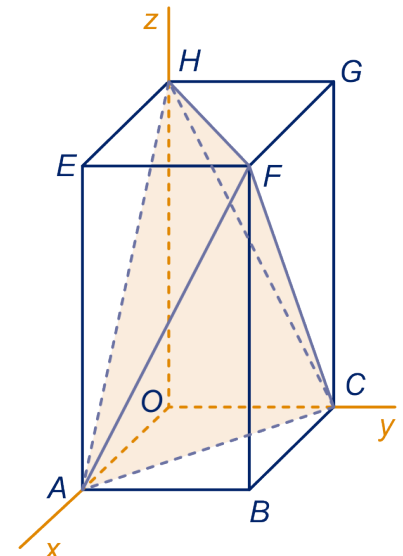
40

We werken met hetzelfde blok als in de vorige opgave. We berekenen de inhoud van piramide $ACHF$. Dat kan bijvoorbeeld door driehoek ACH als grondvlak te nemen. De hoogte van de piramide is dan de afstand van F tot vlak ACH . De oppervlakte van driehoek ACH heb je in opgave 39 al berekend.

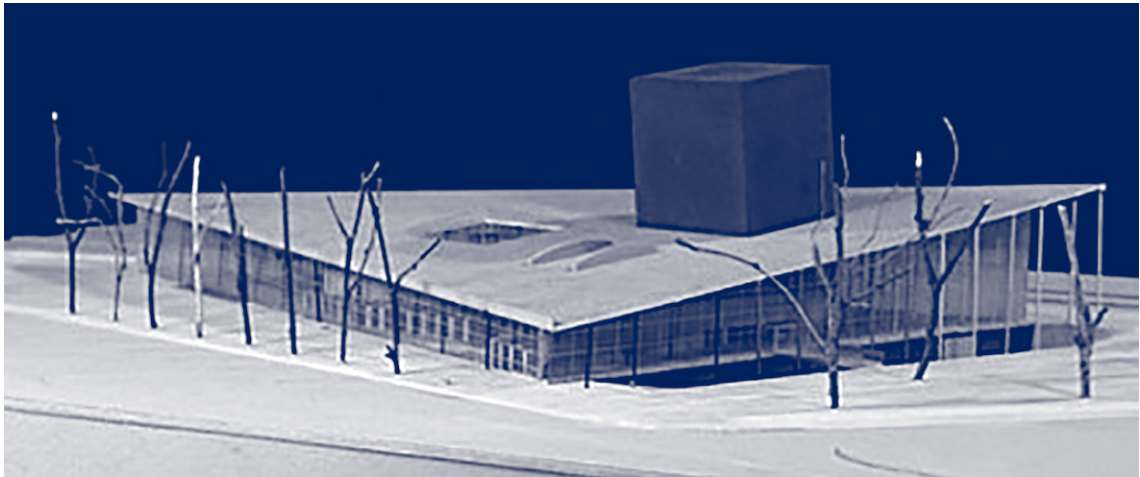
- a Bereken de afstand van F tot vlak ACH .
- b Bereken de inhoud van de piramide $ACHF$.

Je kunt de de inhoud van piramide $ACHF$ ook berekenen door van de inhoud van het blok de inhoud van vier piramides af te trekken. De vier piramides hebben alle dezelfde inhoud.

- c Voer die berekening uit.



6.3 Parametervoorstelling en vergelijking van een vlak



In het niet gekozen ontwerp voor het architectuurstudiecentrum van Rem Koolhaas is de schoorsteen een normaal van het dakvlak.

De hoek van twee vlakken

Op de foto staat een huis met aangebouwde vleugel. De dakvlakken van het huis en van de vleugel hebben een hellingshoek van 45° . De nok van het garagedak staat loodrecht op die van het huis. Waar het dak van de vleugel overgaat in het dak van het huis is een goot gemaakt, een zogenaamde kilgoot.



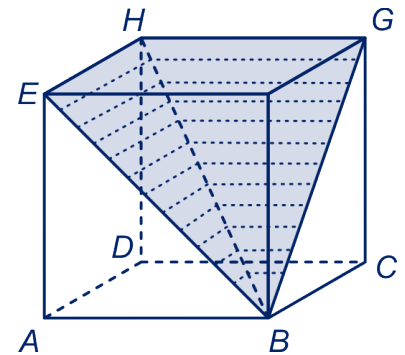
- a Wat denk je, is de hellingshoek van de kilgoot ook 45° , is hij kleiner of is hij groter?

De kilgoot is een gevouwen rechthoekige plaat. De vouwhoek is de hoek van de twee dakvlakken.

- b Wat denk je, is de vouw 90° , is hij kleiner of is hij groter?

We kunnen de vragen in a en b vertalen naar een situatie in een kubus $ABCD.EFGH$. De dakvlakken zijn de vlakken BEH en BGH . De vouw in de kilgoot is de snijlijn van die vlakken.

- c Bereken de hellingshoek van de kilgoot in graden nauwkeurig. Het berekenen van de vouwhoek komt later wel.



6.4 Hoeken

42

a Vouw een rechthoekig vel papier dubbel (de vouw evenwijdig aan een bladrand) en open de vouw weer gedeeltelijk: je hebt twee vlakken met de vouw als snijlijn. Kun je de hoek van beide vlakdelen aanwijzen? In welke richting moet je kijken om de hoek goed te zien?

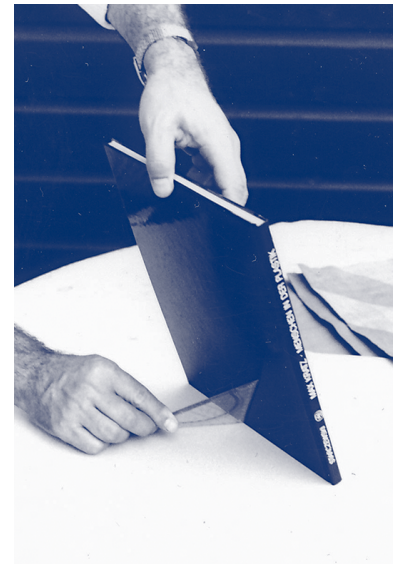
b Vouw een vel papier, maar nu zo', dat de vouw niet evenwijdig met de bladrand is. Open de vouw gedeeltelijk. Kun je nu de hoek van beide vlakdelen aanwijzen? In welke richting moet je kijken om de hoek goed te zien?



43

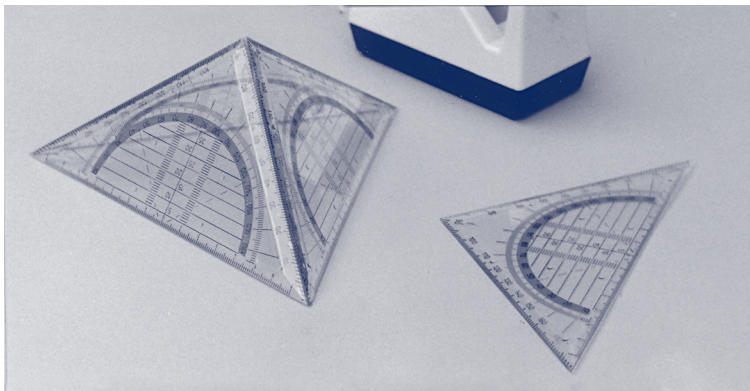
a Houd een boek schuin op tafel. Je geodriehoek past met de rechte hoek in de hoek tussen het boek en de tafel, dus met de ene zijde op tafel en de andere zijde tegen het boek. Hoe je het boek ook laat hellen, het past altijd.

b We gaan de geodriehoek nu met een van de hoeken van 45° proberen te passen in de hoek die het boek met de tafel maakt. Kan dat ook altijd? Je kunt dus altijd wel een lijn in het ene vlak en een lijn in het andere vlak vinden die een hoek van 45° met elkaar maken. En die een hoek van 90° met elkaar maken. De hoek van twee vlakken vind je dus niet door in beide vlakken een willekeurige lijn te nemen en de hoek tussen die lijnen te bekijken.



44

Met plakband zijn drie geodriehoeken met de korte zijden aan elkaar geplakt, zodat ze een driedzijdige piramide vormen (het grondvlak is de tafel).



Hoe groot is, denk je, de hoek tussen twee geodriehoeken? Als je het antwoord niet zeker weet, leg de constructie dan maar eens met één van de geodriehoeken op de tafel.

6.4 Hoeken

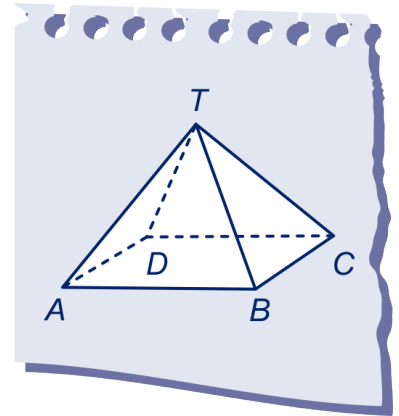
45



$ABCD.T$ is een piramide waarvan alle ribben lengte 6 hebben. In welke richting moet je kijken om de hoek van vlak ADT met het grondvlak goed te kunnen zien?

Teken die hoek op het werkblad.

Bereken die hoek in graden nauwkeurig.



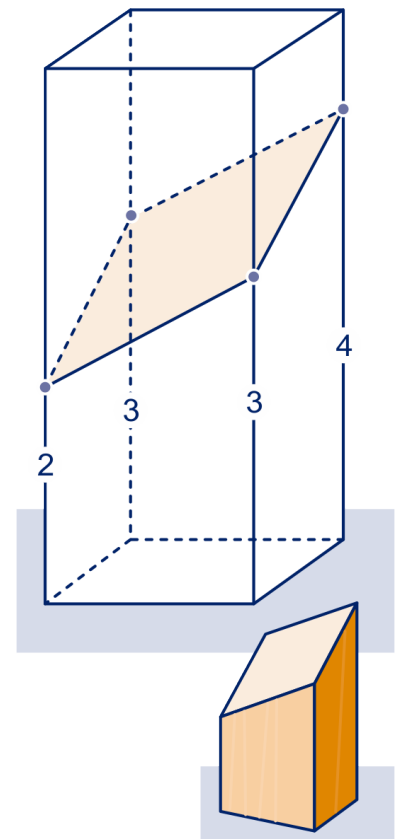
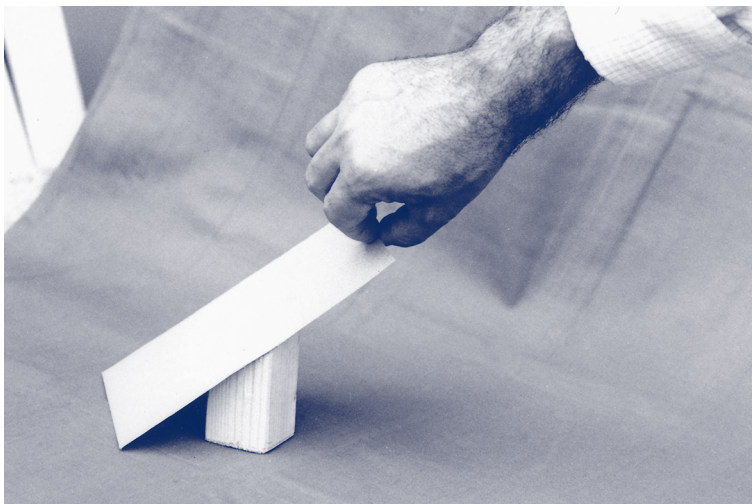
46



Een recht blok met een grondvlak van 2 bij 2 is schuin afgezaagd. Het zaagvlak snijdt de verticale ribben op hoogte 2, 3, 4 en 3. We bekijken de hellingshoek van het zaagvlak ten opzicht van het grondvlak van het blok.

- a Teken die hoek op het werkblad.
- b Bereken die hoek in graden nauwkeurig.

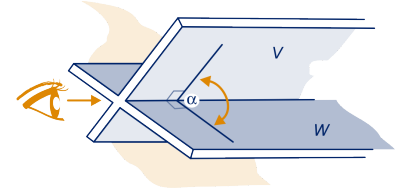
De hoek kun je ook goed als volgt zichtbaar maken. Zet het afgezaagde blok (met het grondvlak) op de tafel en houd een rechthoekig stuk karton op het schuine zaagvlak zó, dat een rand van het karton op de tafel rust. De hoek die het karton met de tafel maakt is de hellingshoek.



6.4 Hoeken



De hoek die twee snijdende vlakken V en W met elkaar maken is de hoek die je ziet als je in de richting van de snijlijn kijkt. Deze hoek noemen we ook wel de **standhoek** van V en W . De standhoek staat loodrecht op de snijlijn. Je kunt die hoek berekenen in een aanzicht in de richting van de snijlijn.



47

V en W zijn twee vlakken die elkaar snijden onder een hoek van 45° .

- a Waar of niet waar? Geef commentaar op elk van de volgende beweringen.
- Er is een lijn in V en een lijn in W die elkaar snijden onder een hoek van 77° .
 - Er is een lijn in V en een lijn in W die elkaar snijden onder een hoek van 45° .
 - Er is een lijn in V en een lijn in W die elkaar snijden onder een hoek van 27° .

l is een lijn in V en m een lijn in W .

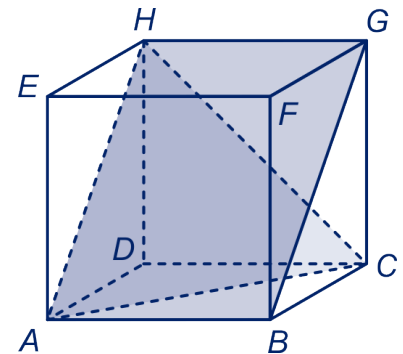
- b Hoe groot kan de hoek tussen l en m zijn?

48



In de figuur is kubus $ABCD.EFGH$ getekend. De snijlijn van de vlakken ACH en $ABGH$ is lijn AH .

- a Geef op het werkblad de standhoek van de twee vlakken aan.
- b Bereken die hoek in graden nauwkeurig.

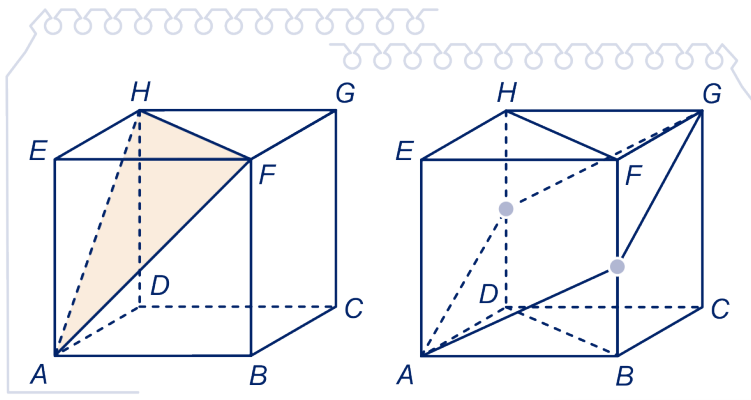


49



$ABCD.EFGH$ is een kubus.

- a Geef op het werkblad de standhoek van vlak AFH en het grondvlak aan. Zie de figuur hieronder links. Bereken die hoek in graden nauwkeurig.



N is het midden van HD , M van FB , zie figuur hierboven rechts.

6.4 Hoeken

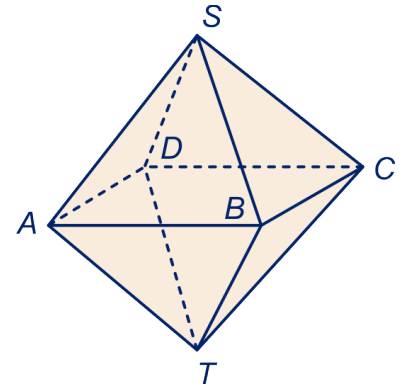
50



- b Bereken de standhoek van de vlakken $AMGN$ en $BFHD$ aan op het werkblad.

$ABCD.ST$ is een regelmatig achthoek.

- a Geef op het werkblad de standhoek tussen de grensvlakken TAD en TBC aan. Bereken die hoek in graden nauwkeurig.
- b Geef op het werkblad de standhoek van de grensvlakken TAD en TCD aan. Bereken die hoek in graden nauwkeurig.

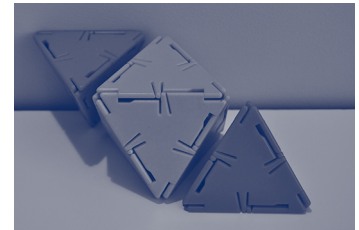


51

- a Bereken de hoek tussen twee grensvlakken van een regelmatig viervlak.

Met twee regelmatige viervlakken en een achthoek met dezelfde ribbe kun je een scheef blok bouwen.

- b Wat zegt dit over je antwoorden op opgave 50b en opgave 51a?



Opmerking

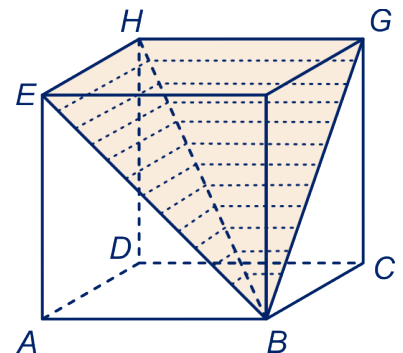
Voor de hoek tussen twee vlakken maken we een soortgelijke afspraak als bij de hoek van twee snijdende lijnen. Met die hoek bedoelen we de scherpe (eventueel rechte) hoek. In opgave 50b heb je als antwoord 109° gegeven. Het gaat hier ook niet om de hoek van twee (onbegrensde) vlakken, maar om de hoek tussen twee begrensde vlakdelen en die kan (net zoals de hoek tussen twee lijnstukken in bijvoorbeeld een driehoek) stomp zijn.

52

De vouw in de kilgoot

We komen terug op opgave 41 en berekenen de hoek van de vlakdelen BEH en BGH in kubus $ABCD.EFGH$. Het punt P ligt op diagonaal BH zó, dat EP loodrecht op BH staat. Zeg dat de ribben van de kubus lengte 6 hebben.

- a Bereken dan BP .
Wat is dus de verhouding $BP : HP$?
- b Bereken hoek EPG .



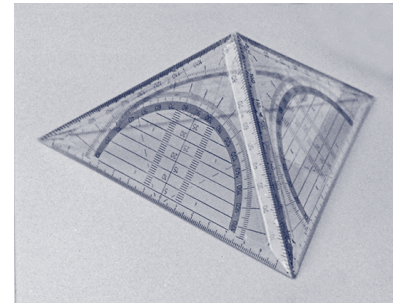
6.4 Hoeken

53

De drie geodriehoeken

We bekijken het bouwspel van opgave 44 nog eens. Het gaat dus over een driezijdige piramide waarvan de opstaande grensvlakken drie geodriehoeken zijn. De lange zijde van een geodriehoek is 16 cm. We hebben in opgave 44 gezien dat de hoek van twee opstaande grensvlakken 90° is.

- Bereken exact de inhoud van de piramide; neem een geodriehoek als “grondvlak”.
- Bereken met behulp van a exact hoever de top van de piramide boven de tafel komt.
- Bereken de hoek die een geodriehoek met het vlak van de tafel maakt.



54



De hoek tussen een lijn en een vlak.

Op het werkblad staat (twee keer) een bovenaanzicht van een plein met een scheve toren. Anneke loopt in een kring om de toren.

- Kleur de plaatsen op haar rondwandeling van waaruit ze niet ziet dat de toren scheef staat.
- Kleur ook de plaatsen van waaruit ze goed ziet hoe scheef de toren staat.

De toren van Pisa staat 4 meter uit het lood. Hij is 54 m hoog (verticaal gemeten).

- Hoeveel graden staat hij uit het lood? Hoe groot is de hoek die de toren met de begane grond maakt?



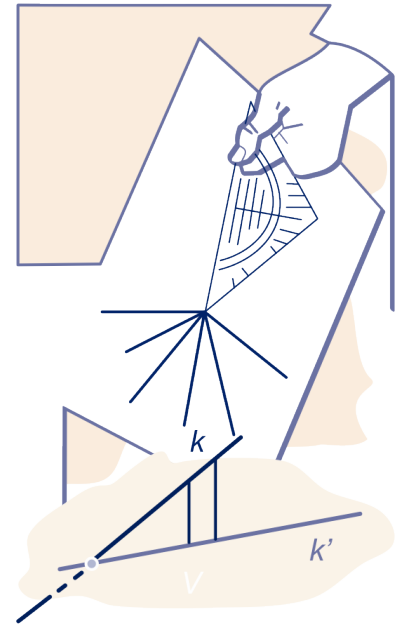
6.4 Hoeken

55

Leg een stuk papier op tafel. Zet de geodriehoek met de lange zijde op het papier, loodrecht op de tafel.

Waar of niet waar? Geef commentaar op de volgende beweringen.

- Er is een lijn op papier die een hoek van 77° met een korte zijde van de geodriehoek maakt.
- Er is een lijn op papier die een hoek van 45° met een korte zijde van de geodriehoek maakt.
- Er is een lijn op papier die een hoek van 23° met een korte zijde van de geodriehoek maakt.



De lijn k snijdt het vlak V . De loodrechte projectie van k op V noemen we k' . Onder de hoek die k maakt met V zullen we verstaan de hoek tussen k en k' . Dat is de kleinste hoek die k maakt met lijnen in V .

56



In de figuur staat de kubus $ABCD.EFGH$. Het vlak door de punten A , B en G , in de figuur gekleurd, noemen we V .

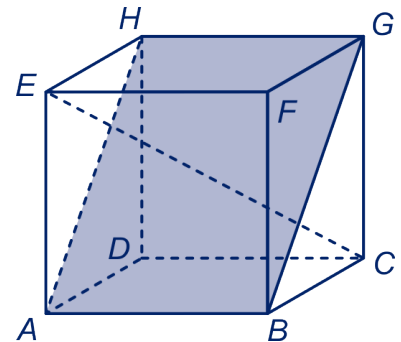
We gaan de hoek α bepalen die zijvlaksdiaagonaal EC maakt met V .

De projectie van E op V noemen we N .

- a Teken N op het werkblad en geef α aan.
Bereken α vervolgens in graden nauwkeurig.

β is de hoek die lichaamsdiagonaal EC met V maakt. Het snijpunt van lijn EG met V noemen we M .

- b Teken M en vervolgens β op het werkblad.
Bereken β in graden nauwkeurig.



57

$ABCD.EFGH$ is een kubus met ribben van lengte 6. M is het midden van ribbe FG . We bepalen de hoek die lijn AM maakt met vlak V , het vlak door de punten A , C en H .

We brengen een assenstelsel aan zó, dat $D = (0,0,0)$, $A = (6,0,0)$, $C = (0,6,0)$ en $H = (0,0,6)$

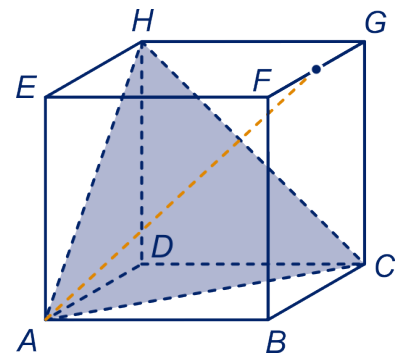
- a Geef een vergelijking van V .

De (loodrechte) projectie van M op V noemen we N .

- b Bereken de coördinaten van N .

 Hint 10.

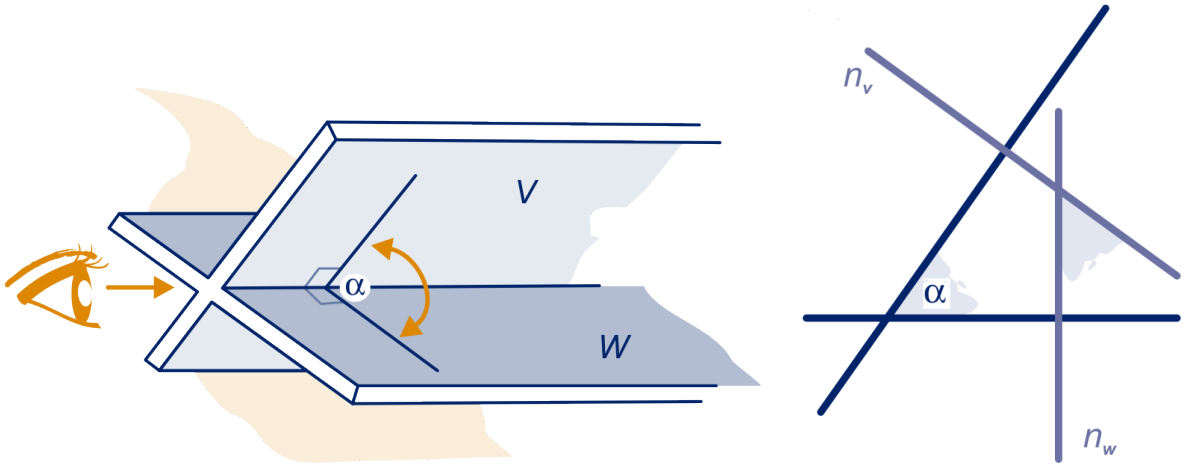
- c Bereken α , de hoek die lijn AM met vlak V maakt in graden nauwkeurig.



6.4 Hoeken

Hoeken berekenen met normalen

De hoek tussen twee vlakken is gelijk aan de hoek tussen normalen van die vlakken.



In de linker figuur is dat α . Als je in de richting van de snijlijn van de vlakken kijkt, zie je α zoals in de rechter figuur. Je gaat eenvoudig na dat de hoek tussen V en W gelijk is aan de hoek tussen n_v en n_w , waarbij n_v en n_w normalen van V en W zijn.

Opmerking

In hetgeen volgt, moet je nogal eens een normaalvector van een vlak bepalen. Tot nu toe hebben we twee manieren gezien om die te vinden en in de volgende paragraaf volgt nog een derde manier. We herhalen die twee manieren nog eens.

- Je kent de snijpunten met de assen.

Bijvoorbeeld:

het vlak V snijdt de coördinaat-assen in $(6,0,0)$, $(0,2,0)$ en $(0,0,5)$.

Dan is $\frac{x}{6} + \frac{y}{2} + \frac{z}{5} = 1$ oftewel $5x + 15y + 6z = 30$ een

vergelijking van V , dus $\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}$ is een normaalvector van V .

Of:

W snijdt de x -as in $(6,0,0)$, de z -as in $(0,0,2)$ en de y -as niet, dan is $\frac{x}{6} + \frac{z}{2} = 1$ oftewel $x + 3z = 6$ een vergelijking van W ,

dus $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ een normaalvector van W .

6.4 Hoeken

- Je kent een vectorvoorstelling van het vlak.
Bijvoorbeeld een vectorvoorstelling van U is

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Richtingsvectoren van U zijn: $\vec{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Nu creëer je eerst een richtingsvector van U met een kental

gelijk aan 0, bijvoorbeeld: $\vec{u} = \vec{s} + 2\vec{t} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dan staat $\vec{n} = \begin{pmatrix} 11 \\ -9 \\ a \end{pmatrix}$ loodrecht op $\vec{u}$ voor elke a , want

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0.$$

Nu kies je het getal a zó, dat ook $\vec{n} \cdot \vec{s} = 0$, dus $a = -3$. Dan is

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 11 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$ een normaalvector van U , want hij staat loodrecht

op twee verschillende richtingen van U , namelijk op $\vec{u}$ en $\vec{s}$.

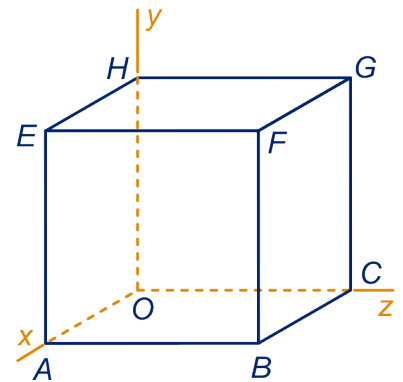
Voorbeeld

$ABCO.EFGH$ is een kubus, met $A(1,0,0)$, $C(0,1,0)$ en $H(0,0,1)$. De hoek tussen de vlakken $BCHE$ en $ABHG$ bepaal je met normalen als volgt.

Een normaal van vlak $BCHE$ heeft richtingsvector $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

en een normaal van vlak $ABHG$ heeft richtingsvector $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Noem de hoek tussen deze vectoren α , dan $\cos(\alpha) =$

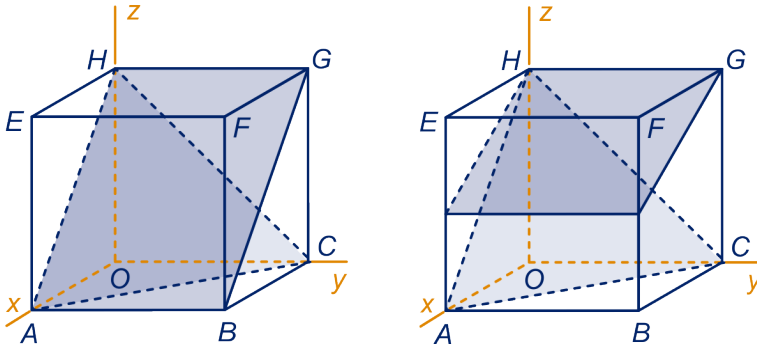
$$\frac{\vec{g} \cdot \vec{e}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \text{ dus } \alpha = 60^\circ.$$



6.4 Hoeken

58

De kubus is als in het voorbeeld. In opgave 48 heb je de hoek tussen de vlakken $ABHG$ en ACH berekend, zie de figuur hieronder links.



- a Doe dat nu nog eens met normaalvectoren.

Vlak $ABHGABHG$ wordt om lijn HG gedraaid totdat het door het midden M van ribbe EA gaat, zie de figuur hier rechtsboven.

- b Bereken de hoek die de twee vlakken nu maken in graden nauwkeurig.

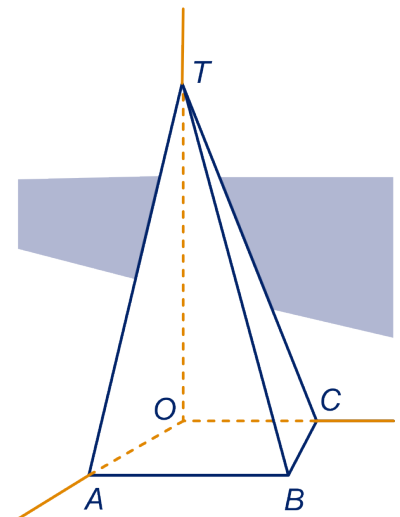
Opmerking

Merk op dat dit rekenwerk de zaak sterk vereenvoudigt. In opgave 58b moet je alleen al om de snijlijn van de vlakken te bepalen goed nadenken, als je de standhoek wilt bepalen.

59

$ABCO.T$ is een piramide met $A(6,0,0)$, $B(6,6,0)$, $C(0,4,0)$, en $T(0,0,10)$.

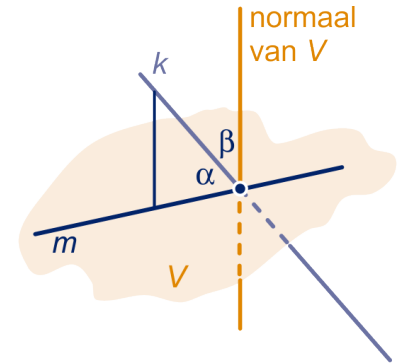
- Bereken de volgende hoeken met het inproduct in graden nauwkeurig: hoek ABC , hoek BTC , de hoek tussen de lijnen BT en OC .
- Bereken hoeveel graden (in één decimaal nauwkeurig) lijn BT uit het lood staat ten opzichte van vlak ABC .
- Bereken de hoek tussen de vlakken TAB en TBC in graden nauwkeurig.



6.4 Hoeken

In de figuur is lijn m de projectie van lijn k op vlak V ; de hoek die lijn k met vlak V maakt is α . β is de hoek die k uit het lood staat. Er geldt: $\alpha + \beta = 90^\circ$.

V is een vlak met normaal n . De hoek die een lijn k met de normaal maakt is samen met de hoek die hij met V maakt 90° .



Voorbeeld

In de figuur is een recht blok $ABCO.EFGH$ getekend met $A(7,0,0)$, $C(0,7,0)$ en $H(0,0,4)$. De hoek die lijn GH met vlak ACH maakt kun je als volgt met het inproduct berekenen.

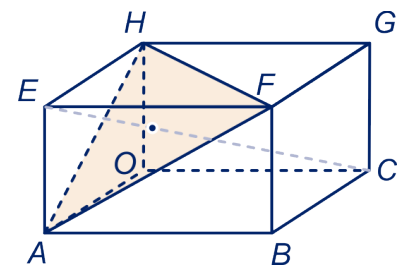
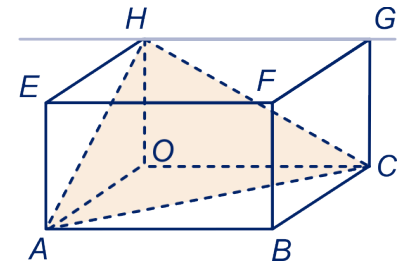
Vlak ACH heeft vergelijking $\frac{x}{7} + \frac{y}{7} + \frac{z}{4} = 1$, dus een

normaalvector van dat vlak is $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$. Een richtingsvector van

lijn GH is $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. De hoek die lijn GH ten opzichte van vlak

ACH uit het lood staat noemen we β , dan

$|\vec{n} \cdot \vec{y}| = |\vec{n}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\beta)$, dus $\beta = 64^\circ$ en de hoek die lijn GH met vlak ACH maakt is $90^\circ - \beta = 26^\circ$.



60

Het blok is als in het voorbeeld.

Bereken de hoek die lijn EC met vlak AFH maakt in graden nauwkeurig.

61

Gegeven zijn de punten $A(6,0,0)$, $B(4,3,2)$ en $C(0,0,6)$.

- Geef een vergelijking van vlak OAB en van vlak OBC .
- Bereken de hoek die lijn BC met vlak OAB maakt in graden nauwkeurig.
- Bereken de hoek die de vlakken OAB en OBC maken in graden nauwkeurig.

62

We gaan de inhoud van het viervlak $OABC$ uit de voorgaande opgave berekenen.

- Bereken de afstand van C tot vlak OAB .

α is hoek AOB .

- Toon aan: $\sin(\alpha) = \sqrt{\frac{13}{29}}$.

 Hint 11.

6.4 Hoeken

De oppervlakte van driehoek OAB is gelijk aan $3\sqrt{13}$.

- c Toon dat aan.
- d Bereken de inhoud van viervlak $OABC$ exact.

6.5 Het uitproduct

In deze paragraaf wordt het uitproduct behandeld. Dat komt hier min of meer uit de lucht vallen. Het is een verkorte versie van de volgende paragraaf, waarin het uitproduct op meer natuurlijke wijze geïntroduceerd wordt.

Je kunt volstaan met één van beide paragrafen.

Definitie

Gegeven is een onafhankelijk paar vectoren $(\vec{a}, \vec{b})$ met

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

We definiëren de vector $\vec{a} \times \vec{b}$ als $\begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$.

We noemen $\vec{a} \times \vec{b}$ het **uitproduct** van $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

63

Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Bereken $\vec{a} \times \vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{a}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ en $\vec{c} \times \vec{a}$.

64

De vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ zijn als in de vorige opgave.

a Bereken $(2\vec{a}) \times \vec{b}$, $\vec{a} \times (2\vec{b})$ en $2(\vec{a} \times \vec{b})$.

b Bereken $\vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ en $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}$.

Wat is het verband tussen deze drie vectoren?

c Bereken $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ en $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$.

Wat je in bovenstaande opgaven gezien hebt, geldt algemeen,

Eigenschappen van het uitproduct

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ in het bijzonder $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$,
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$,
- $\vec{a} \times \vec{b}$ staat loodrecht op $\vec{a}$ en op $\vec{b}$.

Het bewijs van deze eigenschappen, volgt door 'uitschrijven'.

Hieronder volgt een voorbeeld.

Neem aan: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, dan:

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} =$$

6.5 Het uitproduct



$$a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0.$$

Neem aan: de punten A , B en C liggen niet op één lijn.

Dan is $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ een normaalvector van vlak ABC .

65

- a Leg uit dat bovenstaande volgt uit de eigenschappen van het uitproduct.

Gegeven zijn de punten $A(1,2,3)$, $B(2,3,5)$ en $C(3,1,6)$.

- b Bereken $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.
c Geef een vergelijking van vlak ABC .

66

De kubus in de figuur hiernaast heeft ribben van lengte 2. M is het midden van een ribbe en N het midden van het rechter grensvlak van de kubus.

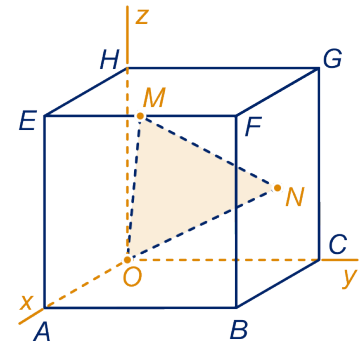
- a Bereken $\vec{n} = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{ON}$ en ook $|\vec{n}|$.

De hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{OM}$ en $\overrightarrow{ON}$ noemen we α .

- b Bereken $\cos(\alpha)$ en $\sin(\alpha)$ exact.

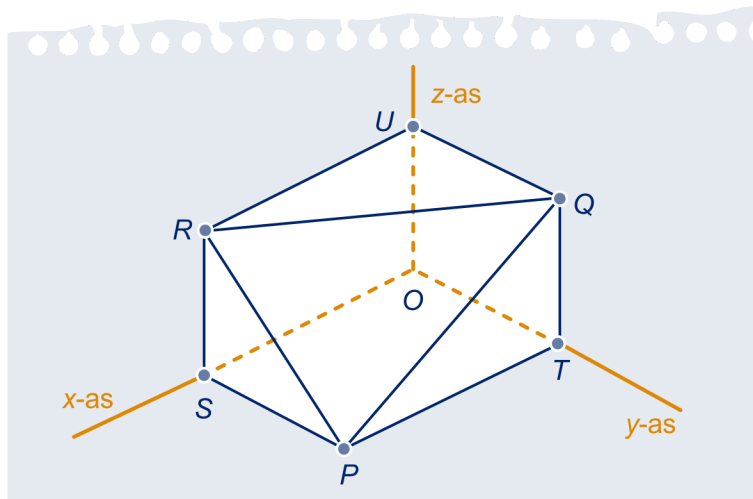
Hint 12.

- c Bereken de oppervlakte van het parallellogram met hoekpunten O , M en N .



67

In de figuur hieronder zijn $OSRU$ en $OTQU$ rechthoeken. Verder is $P(6,4,0)$, $Q(0,4,3)$ en $R(6,0,3)$.



- a Bereken $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$.
b Bereken de lengte van $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$.

De hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{PQ}$ en $\overrightarrow{PR}$ noemen we α .



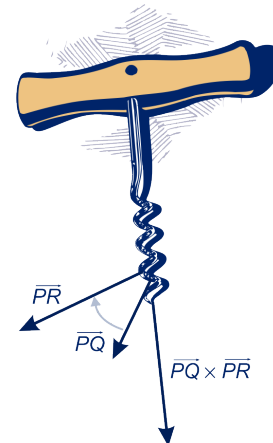
6.5 Het uitproduct

- c Bereken $\cos(\alpha)$ en $\sin(\alpha)$ exact.
- d Bereken de oppervlakte van het parallellogram met hoekpunten P , Q en R exact.
- e Bereken de coördinaten van de snijpunten van vlak PQR met de coördinaatassen.

Gegeven zijn drie punten P , Q en R die niet op één lijn liggen. In opgave 66 en opgave 67 heb je gezien dat de lengte van $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ gelijk is aan de oppervlakte van het parallellogram met hoekpunten P , Q en R .

Dit geldt algemeen. Het bewijs zullen we niet geven. Je kunt het nalezen in *De wetten van Kepler* van Maris van Haandel.

De richting van vector $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ kun je bepalen met de zogenaamde **kurkentrekkerregel**: $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ wijst in de richting waarin een kurkentrekker zich verplaatst, wanneer deze over de kleinste hoek van $\overrightarrow{PQ}$ naar $\overrightarrow{PR}$ wordt gedraaid.



Definitie

We noemen een rij van drie vectoren $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$ **positief geörienteerd** als een kurkentrekker over de kortste hoek van $\vec{p}$ naar $\vec{q}$ draaiend, in de richting van $\vec{r}$ beweegt, anders **negatief geörienteerd**.

We vatten een en ander hieronder nog eens samen.

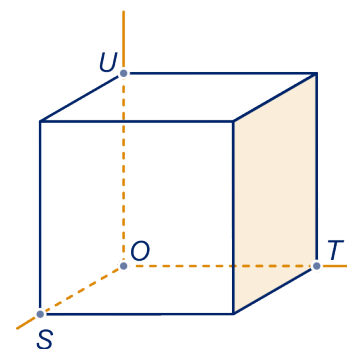
- $\vec{p} \times \vec{q} = -\vec{q} \times \vec{p}$ in het bijzonder $\vec{p} \times \vec{p} = \vec{0}$,
- $(\vec{p} + \vec{q}) \times \vec{r} = \vec{p} \times \vec{r} + \vec{q} \times \vec{r}$,
- $\vec{p} \times \vec{q}$ staat loodrecht op $\vec{p}$ en op $\vec{q}$,
- $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{p} \times \vec{q})$ is positief geörienteerd,
- De lengte van $\vec{p} \times \vec{q}$ is gelijk aan de oppervlakte van het parallellogram opgespannen door $\vec{p}$ en $\vec{q}$.

We schrijven $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- a Bereken $\vec{p} \times \vec{q}$, $\vec{q} \times \vec{r}$ en $\vec{r} \times \vec{p}$

We bekijken de balk met hoekpunten $O(0,0,0)$, $S(6,0,0)$, $T(0,5,0)$ en $U(0,0,4)$.

- b Bereken $(\vec{s} \times \vec{t}) \cdot \vec{u}$.



68

6.5 Het uitproduct

69

$ABCO.EFGH$ is een parallellepipedum met $A(5,0,0)$, $C(2,3,0)$ en $H(0,-2,6)$.

- Geef de coördinaten van de andere hoekpunten.
- Bereken de oppervlakte van het grondvlak en vervolgens de inhoud van het parallellepipedum.
- Bereken $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{h}$

In de opgaven 68 en 69 heb je voorbeelden gezien van de volgende stelling.

De inhoud van parallellepipedum $ABCD.EFGH$ gelijk is aan de absolute waarde van $(\vec{AB} \times \vec{AD}) \cdot \vec{AE}$.

Dit kun je als volgt inzien.

Neem aan: $\vec{n}$ is een normaalvector van vlak $ABCD$, dan is

$\frac{|\vec{AE} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$ de lengte van de projectie van de vector $\vec{AE}$ op

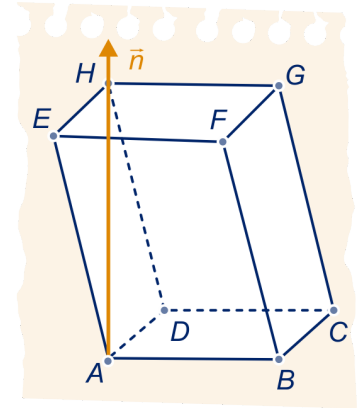
de lijn door A met richtingsvector $\vec{n}$, dus de hoogte van het parallellepipedum.

Als je dit met de oppervlakte van parallellogram $ABCD$ vermenigvuldigt, krijg je de inhoud van het parallellepipedum.

Neem nu voor $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AD}$, dan is $|\vec{n}|$ de oppervlakte van

$ABCD$, dus $\frac{|\vec{AE} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} |\vec{n}| = |(\vec{AB} \times \vec{AD}) \cdot \vec{AE}|$ is de

inhoud van $ABCD.EFGH$.



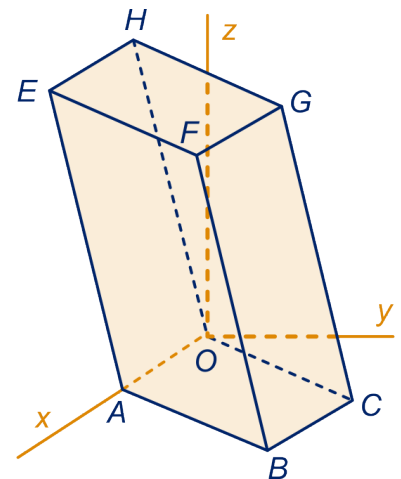
70

In de figuur staat parallellepipedum $ABCO.EFGH$, met $A(3,0,0)$, $C(6,5,0)$ en $H(-3,-3,5)$.

- Geef de coördinaten van de andere hoekpunten.
- Bereken de inhoud van het parallellepipedum.
- Bereken de inhoud van het prisma $ABC.EFG$.
- Bereken de inhoud van piramide $ABCF$.



Hint 13.



6.5 Het uitproduct

71

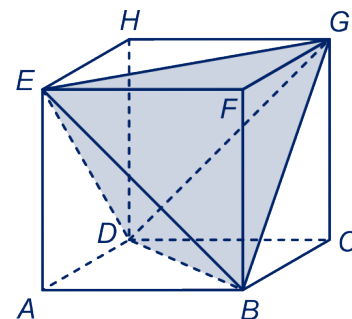
$ABCD.EFGH$ is een kubus met ribbe 1. In de kubus is viervlak $BDEG$ getekend.

a Ga na dat de inhoud van het viervlak gelijk is aan

$$\frac{1}{6} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en bereken de inhoud van het viervlak.}$$

Het viervlak krijg je door bij vier hoeken van de kubus piramides weg te halen.

b Bereken de inhoud van het viervlak door dit te gebruiken.

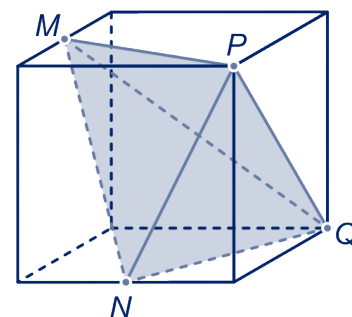


72

In de figuur is een kubus met ribbe 2 getekend.

M en N zijn middens van ribben en P en Q hoekpunten van de kubus.

Bereken de inhoud van piramide $MNPQ$.

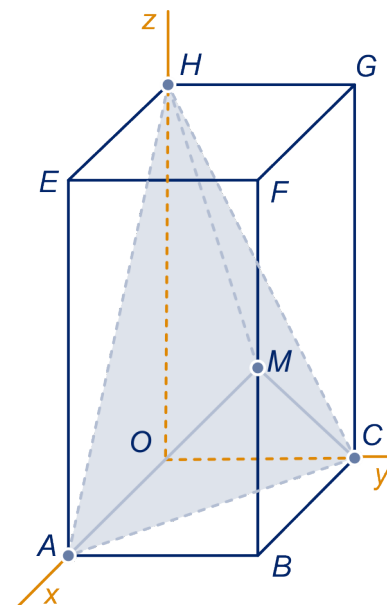


73

Blok $ABCO.EFGH$ is 4 hoog, 3 diep en 2 breed.

M is het midden van ribbe BF .

Bereken de inhoud van viervlak $ACHM$ exact.



6.6 Determinant en uitproduct

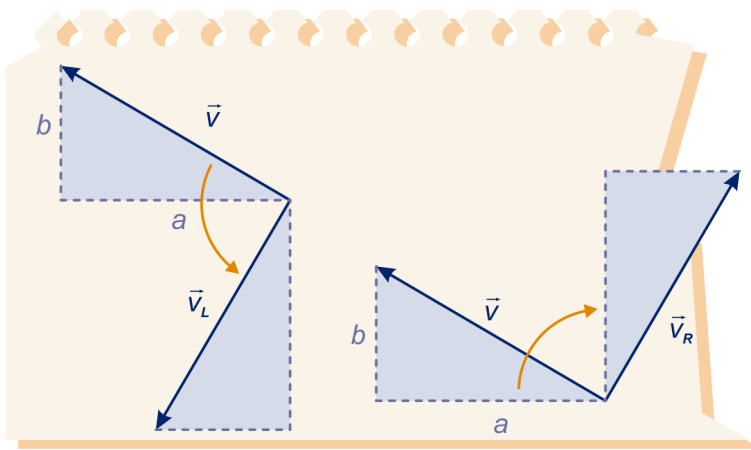
De determinant in dimensie 2

Het volgende is te vinden in hoofdstuk 5 *De kracht van vectoren* van 4vb deel2, of op 'internet'.

Gegeven is de vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. De vectoren $\vec{v}_L = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ en $\vec{v}_R = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ staan loodrecht op en zijn even lang als $\vec{v}$.

Als je $\vec{v}$ linksom over 90° draait, krijg je $\vec{v}_L$;

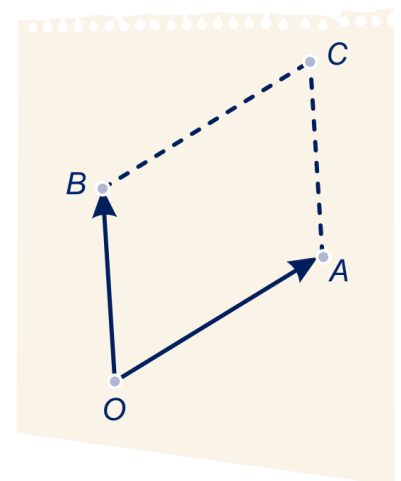
als je $\vec{v}$ rechtsom over 90° (met de wijzers van de klok mee) draait, krijg je $\vec{v}_R$.



Waarom dat zo is, zie je in het plaatje.
(a en b zijn de lengten van zijden waar ze bij staan.)

Gegeven zijn twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Met het **parallellogram opgespannen door $\vec{a}$ en $\vec{b}$** bedoelen we het parallellogram $OACB$ waarbij C het punt is met plaatsvector $\vec{a} + \vec{b}$.

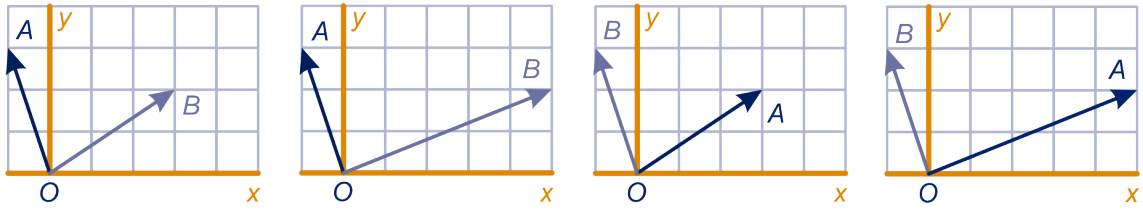
In het volgende bekijken we hoe je de oppervlakte van het parallellogram opgespannen door $\vec{a}$ en $\vec{b}$ met behulp van de kentallen van hun kentallen kunt berekenen.



6.6 Determinant en uitproduct

74

In de figuur hieronder zijn A en B roosterpunten. In de laatste twee roosters zijn de rollen van A en B verwisseld ten opzichte van de eerste twee.



- Bereken de oppervlakte van het parallellogram opgespannen door de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ exact.
- Bereken in de vier gevallen $\vec{a} \cdot \vec{b}_R$.

Er lijkt een verband te bestaan tussen de oppervlakte van het parallellogram opgespannen door $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en het inproduct van $\vec{a}$ en $\vec{b}_R$.

Dit bekijken we in de volgende opgave.

75



We gaan er vanuit dat $\vec{a}$ en $\vec{b}$ een echt parallellogram opspannen.

De hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}_R$ noemen we α .

Je draait over de kleinste hoek van $\vec{a}$ naar $\vec{b}$.

Als je linksom moet draaien, dan $0^\circ < \alpha < 90^\circ$,

als je rechtsom moet draaien, dan $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

- Ga na dat dit in de vier gevallen in de figuur klopt.

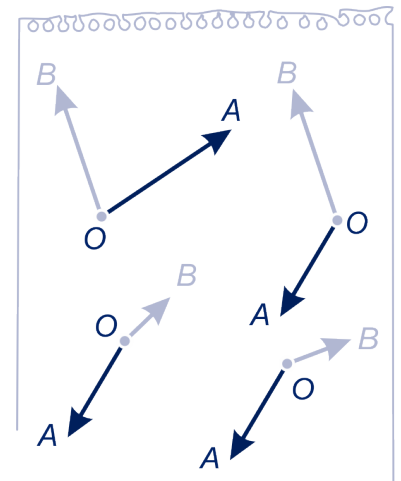
De oppervlakte van een parallellogram is $p \cdot q \cdot \sin(\beta)$, waarbij p en q twee aanliggende zijden van het parallellogram zijn en β de hoek tussen die zijden, zie hoofdstuk 2 paragraaf 5 van 4vb deel 1, ook op 'internet' te zien

De oppervlakte van het parallellogram opgespannen door $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is $\vec{a} \cdot \vec{b}_R$ als $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ en $-\vec{a} \cdot \vec{b}_R$ als $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

- Toon dat aan.

Als $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, dan is $\vec{a} \cdot \vec{b}_R = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$.

- Ga dat na.



6.6 Determinant en uitproduct



Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Draai $\vec{a}$ over de kleinste hoek om O naar $\vec{b}$, zie figuur.

Als dat *linksom* is, noemen we het paar vectoren $(\vec{a}, \vec{b})$

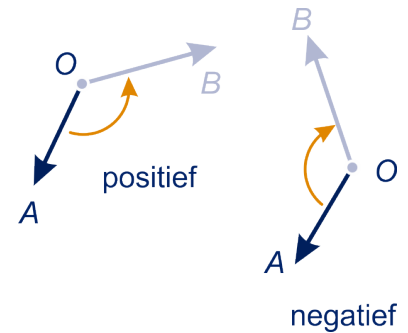
positief georiënteerd;

als dat *rechtsom* noemen we het paar **negatief georiënteerd**.

Met de **determinant** van het paar $(\vec{a}, \vec{b})$ ook wel de **georiënteerde oppervlakte** van het parallellogram opgespannen door $(\vec{a}, \vec{b})$ bedoelen we

- de oppervlakte van dat parallellogram als het paar $(\vec{a}, \vec{b})$ positief georiënteerd is,
- het tegengestelde van die oppervlakte als het paar $(\vec{a}, \vec{b})$ negatief georiënteerd is.

We noteren dit als $\det(\vec{a}, \vec{b})$, de **determinant** van $(\vec{a}, \vec{b})$.



Stelling 1

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1.$$



Opmerking

In plaats van $\det(\vec{a}, \vec{b})$ schrijven we vaak $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.



Een **roosterdriehoek** is een driehoek waarvan de hoekpunten roosterpunten zijn.

76

- a Bereken de oppervlakte van de twee parallellogrammen van opgave 74 met een determinant.

Gegeven zijn de punten $A(4,7)$, $B(10,3)$ en $C(8,10)$.

- b Bereken de oppervlakte van driehoek ABC met een determinant.

Als je de oppervlakte van een roosterdriehoek met 2 vermenigvuldigt, krijg je een geheel getal.

- c Leg dat uit.



De oppervlakte van een roosterdriehoek is minstens $\frac{1}{2}$.

6.6 Determinant en uitproduct

77

a Bereken $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ en $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$.

We veranderen de eerste determinant: we vermenigvuldigen de eerste kolom met -2; je krijgt: $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$.

b Kun je zonder veel te rekenen zeggen hoe groot de determinant nu is?

De eerste twee determinanten hebben de tweede kolom hetzelfde. We tellen de eerste kolommen op: $\begin{vmatrix} 1 + 2 & 2 \\ -3 + -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}$

c Bereken de determinant die je zo krijgt.

Neem aan $\det(\vec{a}, \vec{b}) = 20$.

d Wat is dan $\det(\vec{b}, \vec{a})$?

78



Als een roosterdriehoek een inwendig roosterpunt heeft, is zijn oppervlakte minstens $1\frac{1}{2}$.

a Toon dat aan.

Op de zijde van een roosterdriehoek ligt een roosterpunt. Dan is de oppervlakte van de driehoek minstens 1.

b Toon dat aan.

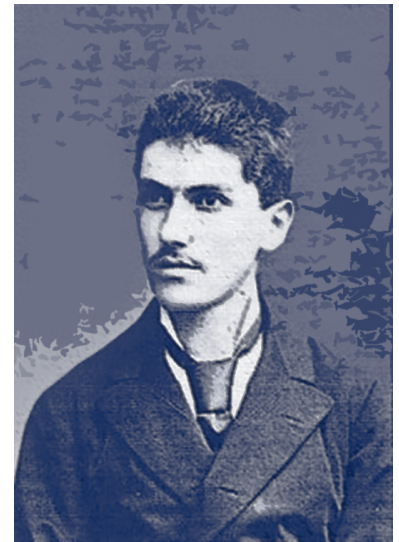


Pick bewees de volgende stelling.

Als een roosterveelhoek r roosterpunten op de rand heeft en i in het inwendige, dan is de oppervlakte gelijk aan $i + \frac{1}{2}r - 1$.

Een mooi bewijs van de stelling staat in een 'artikel' van de Delftse wiskundige Dion Gijswijt.

Sommige wiskundige stellingen zijn zo fantastisch simpel en elegant, dat je je afvraagt: "Waarom ben ik daar niet op gekomen!" Dit stukje gaat over precies zo'n stelling: eenvoudiger dan de stelling van Pythagoras, maar onbekend zelfs bij veel professionele wiskundigen. De stelling wordt vernoemd naar haar 'ontdekker': de Oostenrijkse wiskundige Georg Alexander Pick, geboren in 1859 in Wenen en omgekomen in 1942 in het concentratiekamp Theresienstadt, waarheen hij op 82-jarige leeftijd om zijn joodse afkomst gedeporteerd werd. (De inleiding van dat artikel.)



Georg Alexander Pick 1859-1942

6.6 Determinant en uitproduct



Eigenschappen van de determinant

1. $\det(\vec{a}, \vec{b}) = -\det(\vec{b}, \vec{a})$
2. $\det(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{c}) + \det(\vec{b}, \vec{c})$ en
 $\det(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}) + \det(\vec{a}, \vec{c})$
3. $\det(k \cdot \vec{a}, \vec{b}) = \det(\vec{a}, k \cdot \vec{b}) = k \cdot \det(\vec{a}, \vec{b})$
4. $\det(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b})$ afhankelijk.

Je kunt de eigenschappen 1 tot en met 4 van de determinant ook 'meetkundig' bewijzen. Daar kijken we in de volgende opgave naar.

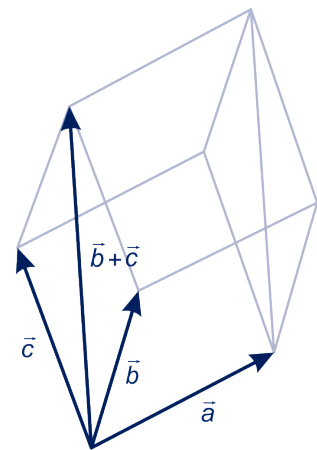
79



In de figuur hiernaast zijn de vectoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ en $\vec{b} + \vec{c}$ getekend.

- a Laat met behulp van de figuur zien dat $\det(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}) + \det(\vec{a}, \vec{c})$.
- b Laat met een plaatje zien dat $\det(2 \cdot \vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot \det(\vec{a}, \vec{b})$.

Met alleen de eigenschappen 1 tot en met 4 van de determinant hierboven en de definitie, kun je de formule in stelling 1 ook vinden. Dat doen we in de volgende opgave.



80

We schrijven $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dan

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 \text{ en } \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2.$$

$$\begin{aligned} \text{Er geldt: } \det(a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2, b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2) &= \\ a_1 \cdot b_1 \cdot \det(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + a_1 \cdot b_2 \cdot \det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + a_2 \cdot b_1 \cdot \det(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + & \\ a_2 \cdot b_2 \cdot \det(\vec{e}_2, \vec{e}_2). & \end{aligned}$$

a Ga dat na.

$$\begin{aligned} \text{Er geldt: } \det(\vec{e}_1, \vec{e}_1) &= 0, \det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1, \det(\vec{e}_2, \vec{e}_1) = -1 \\ \text{en } \det(\vec{e}_2, \vec{e}_2) &= 0. \end{aligned}$$

b Leg dat uit.

$$\text{Dus } \det(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1.$$

6.6 Determinant en uitproduct

81

Gegeven is de lijn k met vergelijking $y = 2x + 7$ en de punten $A(-3,7)$ en $B(5,5)$.

Op k ligt een punt C , zó, dat de oppervlakte van driehoek ABC 15 is.

Bereken de coördinaten van C .

De determinant in dimensie 3.

Definitie

Je hebt een rijtje van drie vectoren $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ niet in één vlak.

We gaan de determinant van dit drietal definiëren.

Daarvoor spreken we eerst een oriëntatie af.

Leg je duim in de richting van $\vec{a}$ en je wijsvinger in de richting van $\vec{b}$. Als de middelvinger van je *rechterhand* in de richting van $\vec{c}$ kan wijzen, noemen we het rijtje **positief georiënteerd** en anders (dus als je je linkerhand nodig hebt) negatief georiënteerd, zie figuur 1.

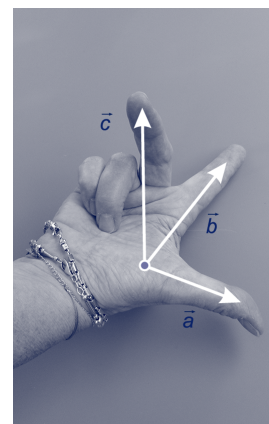
Als de vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ niet in één vlak liggen, bedoelen we met het **parallellepipedum opgespannen** door

die drie vectoren het parallellepipedum in figuur 2 en

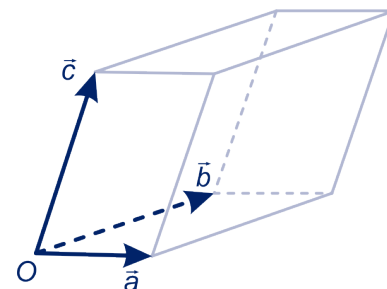
met de **determinant** $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ de inhoud van dat

parallellepipedum als $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ positief georiënteerd is en

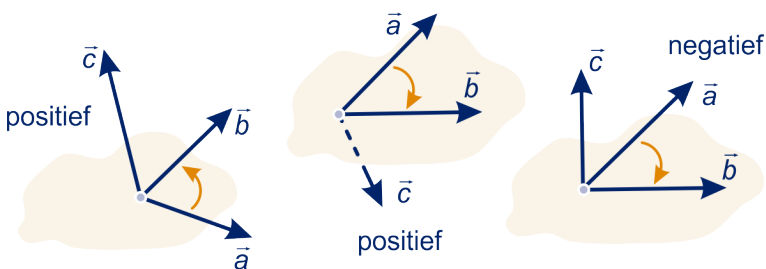
anders het tegengestelde van die inhoud. Als $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ in een vlak liggen, dan $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.



figuur 1



figuur 2



6.6 Determinant en uitproduct

82

Gegeven een drietal vectoren $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Die kun je op 6 manieren rangschikken. Neem aan dat $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ positief georiënteerd is.

Geef de oriëntatie van de andere vijf.

Eigenschappen van de determinant in dimensie 3

- $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = \det(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -\det(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -\det(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -\det(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$
- $\det(\vec{a} + \vec{d}, \vec{b}, \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + \det(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})$,
 $\det(\vec{a}, \vec{b} + \vec{d}, \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + \det(\vec{a}, \vec{d}, \vec{c})$ en
 $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{d}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$
- $\det(k \cdot \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det(\vec{a}, k \cdot \vec{b}, \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, k \cdot \vec{c}) = k \cdot \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$
- $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ afhankelijk

Evenals in dimensie 2 kun je uit deze eigenschappen een formule afleiden waarmee je de inhoud van het parallellepipedum opgespannen door $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ kunt berekenen uit de kentallen van die drie vectoren.

Dat is het onderwerp van het vervolg. Maar eerst bewijzen we de eigenschappen hierboven.

Een aanpak met plaatjes is lastig in dimensie 3.

We pakken het nu anders aan.

Stelling 2

Gegeven is een lijn n door de oorsprong O ; $\vec{n}$ is een normaalvector van n met lengte 1.

Dan is de projectie van een vector $\vec{a}$ op n gelijk aan:
 $(\vec{a} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}$.

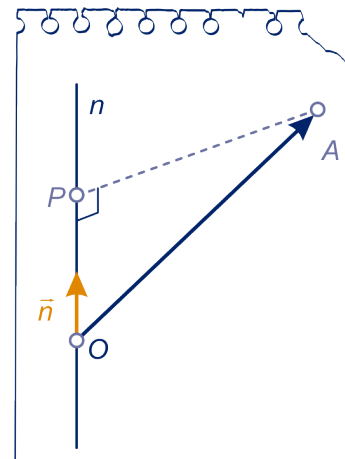
De projectie van een vector $\vec{a}$ noemen we $P(\vec{a})$.

De projectie P is **lineair**, dat wil zeggen:

- $P(\vec{a} + \vec{b}) = P(\vec{a}) + P(\vec{b})$,
- $P(k \cdot \vec{a}) = k \cdot P(\vec{a})$.

Bewijs

Omdat $\vec{n}$ lengte 1 heeft, is de lengte van $(\vec{a} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}$ gelijk aan



6.6 Determinant en uitproduct

de absolute waarde van het getal $\vec{a} \cdot \vec{n}$, dus aan de absolute waarde van $|\vec{a}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos(\alpha) = |\vec{a}| \cdot \cos(\alpha)$, waarbij α de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{n}$ is. Daarmee heeft $(\vec{a} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}$ de juiste lengte. Ga zelf na dat de richting ook juist is.

Dat de afbeelding P lineair is volgt uit het feit dat het inproduct dat is:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n} + \vec{b} \cdot \vec{n} \text{ en } (k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{n} = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{n}).$$

Nu kunnen we de eigenschappen van de determinant bewijzen.

Bewijs van de eigenschappen

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ en $\vec{d}$ zijn vier vectoren. en V is het vlak waarin de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ liggen; $\vec{n}$ is een normaalvector van V met lengte 1 zó, dat $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{n})$ positief georiënteerd is.

Opp is de oppervlakte van het parallellogram opgespannen door $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Dan $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}) = \pm Opp \cdot |P(\vec{v})|$, al naar gelang de oriëntatie van $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{v})$. Neem even aan dat $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ en $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$ positief georiënteerd zijn, dan $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{d}) = Opp \cdot |P(\vec{c} + \vec{d})| = Opp \cdot (|P(\vec{c})| + |P(\vec{d})|) = Opp \cdot (|P(\vec{c})| + |P(\vec{d})|) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$. Bij andere oriëntaties gaat het ook goed. Dat eigenschap 2 ook op de andere plaatsen in de determinant klopt volgt dan uit eigenschap 4.

Eigenschap 3 volgt ook uit de lineariteit van P .

In de volgende opgave leiden we een formule voor de determinant af.

We schrijven $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3.$$

Neem aan $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

Als je de eigenschappen van de determinant gebruikt, krijg je, als je $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uitschrijft zoals in opgave 77 gedaan is 27 termen, bijvoorbeeld:

6.6 Determinant en uitproduct

$a_1 \cdot b_1 \cdot c_2 \cdot \det(\vec{e}_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ en $a_3 \cdot b_2 \cdot c_1 \cdot \det(\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1)$ enzovoort.

a Ga dat na.

Van de 27 uitdrukkingen als $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ en $\det(\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1)$ zijn er 6 niet 0.

b Welke zijn dat? Welke waarde hebben ze?

Dus: $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) =$

$$a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + a_2 \cdot b_3 \cdot c_1 + a_3 \cdot b_1 \cdot c_2 +$$

$$-a_3 \cdot b_2 \cdot c_1 - a_2 \cdot b_1 \cdot c_3 - a_1 \cdot b_3 \cdot c_2.$$

c Leg dat uit.

Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

Dan: $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) =$

$$a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + a_2 \cdot b_3 \cdot c_1 + a_3 \cdot b_1 \cdot c_2 +$$

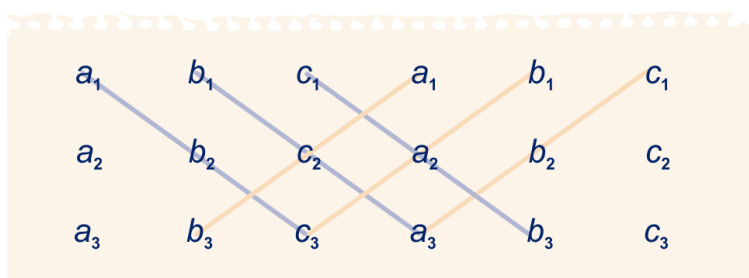
$$-a_3 \cdot b_2 \cdot c_1 - a_2 \cdot b_1 \cdot c_3 - a_1 \cdot b_3 \cdot c_2.$$

In plaats van $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ schrijven we wel: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

Opmerking

Een manier om bovenstaande formule voor de determinant te onthouden is de volgende.

Schrijf de kentallen van $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ twee keer op zoals hieronder.



Vermenigvuldig de drie getallen op elke blauwe lijn en tel ze op, dat geeft een getal B . Doe dat ook voor de getallen op de oranje lijnen, dat geeft een getal G . De determinant is $B - G$.



6.6 Determinant en uitproduct



Voorbeeld

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 2 & -5 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5) \cdot 9 + (-4) \cdot 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot (-6) - ((-6) \cdot 8 \cdot 1 + 9 \cdot 2 \cdot (-4) + 3 \cdot (-5) \cdot 7) = 0$$

Voorbeeld

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + -1 - (0 + 0 + 0) = -2$$

Je kunt een determinant ook op de GR berekenen.



84

Bereken de volgende determinanten.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 12 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & -1 \end{vmatrix}$$

Controleer je antwoorden met de GR.

85

Gegeven is het parallellepipedum $ABCD.EFGH$ met $A(2,0,0)$, $B(4,2,1)$, $C(5,-1,0)$ en $E(2,0,10)$.

a Bereken de coördinaten van H .

De inhoud van het parallellepipedum is 40.

b Reken dat na met een determinant.

c Wat is de inhoud van het viervlak $ABDE$? En van viervlak $EFCG$?

86



Een viervlak met roosterpunten als hoekpunten heeft een inwendig roosterpunt.

Toon aan dat zijn inhoud minstens $\frac{2}{3}$ is.

87

Gegeven zijn de vectoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. We vragen ons

af wat het verband tussen de getallen a en b is als het punt $A(a, b, 2)$ in het vlak met vv $\vec{x} = p \cdot \vec{r} + q \cdot \vec{s}$ ligt.

Dat komt op hetzelfde neer als: $\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

a Leg dat uit.

b Schrijf in dat geval het verband tussen a en b zo eenvoudig mogelijk.

6.6 Determinant en uitproduct

V is het vlak met vv $\vec{x} = \vec{c} + p \cdot \vec{r} + q \cdot \vec{s}$, waarbij $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- c Wat is het verband tussen a en b als A in V ligt?
Schrijf dat verband zo eenvoudig mogelijk.

Bekijk de vergelijking $\begin{vmatrix} 1 & 4 & x \\ 2 & -1 & y \\ 3 & 0 & z \end{vmatrix} = 0$.

- a Schrijf deze vergelijking zo eenvoudig mogelijk.

De vergelijking is die van een vlak door de oorsprong O , zeg V

- b Toon aan dat $(1, 2, 3)$ en $(4, -1, 0)$ in V liggen.

Wat je in de vorige opgave gezien hebt geldt algemeen.

Neem aan $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

De vergelijking $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x \\ a_2 & b_2 & y \\ a_3 & b_3 & z \end{vmatrix} = 0$ is een vergelijking van het

vlak door de oorsprong waarin de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ liggen, want $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}) = 0$ en $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}) = 0$.

Laat zien dat $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x \\ a_2 & b_2 & y \\ a_3 & b_3 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot x - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot z$.

Definitie

Gegeven is een onafhankelijk paar vectoren $(\vec{a}, \vec{b})$ met

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

We definiëren de vector $\vec{a} \times \vec{b}$ als $\begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$.

We noemen $\vec{a} \times \vec{b}$ het **uitproduct** van $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Er geldt:

- $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{x}$
- $\vec{a} \times \vec{b}$ staat loodrecht op $\vec{a}$ en op $\vec{b}$.
- $|\vec{a} \times \vec{b}|$ is de oppervlakte van het parallellogram opgespannen door $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

88

89



6.6 Determinant en uitproduct

We hebben het uitproduct zó gedefinieerd dat de eerste eigenschap klopt.

De tweede eigenschap volgt uit de eerste:

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$ en $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$, want $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}) = 0$ en $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}) = 0$.

Dus $\vec{a} \times \vec{b}$ staat loodrecht op $\vec{a}$ en op $\vec{b}$.

Om de derde eigenschap te bewijzen nemen we een vector $\vec{n}$ loodrecht op $\vec{a}$ en $\vec{b}$ van lengte 1 en zó, dat $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{n})$ positief georiënteerd is. Dan enerzijds $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{n})$ is de oppervlakte van het parallellogram opgespannen door $\vec{a}$ en $\vec{b}$, anderzijds het inproduct van $\vec{a} \times \vec{b}$ met $\vec{n}$, maar dat is de lengte van $\vec{a} \times \vec{b}$.

Je kunt het inproduct gebruiken om een normaalvector van een vlak te vinden.

Voorbeeld

Gegeven is het vlak V met pv

$$(x, y, z) = (2, 1, 3) + s \cdot (-2, 2, 3) + t \cdot (1, 2, 0).$$

We zoeken een vergelijking van V .

Een normaalvector van V is

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 0 \\ -2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Een vergelijking is dan $2x - y + 2z = 9$.

90

Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Bereken $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ en $\vec{c} \times \vec{a}$.

91

Gegeven is het parallellepipedum $ABCD.EFGH$ met

$A(2, 0, 0)$, $B(4, 2, 1)$, $C(5, -1, 0)$ en $E(2, 0, 10)$, zie opgave 82.

Bereken de oppervlakte van het parallellepipedum.

Het uitproduct is niet commutatief en ook niet associatief.

Wel gelden de volgende regels (die je met 'uitschrijven' kunt bewijzen).

- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

6.6 Determinant en uitproduct

- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$
(identiteit van Jacobi)
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ en $\vec{a} \times (k \cdot \vec{b}) = k \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$
(lineariteit)

Dit maakt de driedimensionale ruimte tot een Liealgebra.

Gegeven zijn de vlakken V met $\vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$ en W met $\vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{c} + t \cdot \vec{d}$.

Welke speciale vector is $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$ voor de vlakken V en W ?

In de natuurkunde speelt het uitproduct een grote rol. Een voorbeeld is de *Lorentzkracht*, genoemd naar de Nederlandse wiskundige Hendrik Lorentz (1853-1928).

Een stroom $\vec{i}$ die door een draad in een magnetisch veld $\vec{B}$ loopt, ondervindt een kracht $\vec{F}$ volgens de regel

$\vec{F} = c \cdot \vec{i} \times \vec{B}$, waarbij c een constante is die van de gekozen eenheden afhangt.

Lorentz won de Nobelprijs voor natuurkunde (samen met Zeeman) in 1902. Voor meer informatie zie 'Wikipedia'.

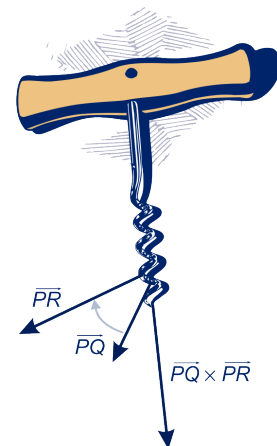


Albert Einstein en Hendrik Lorentz, Leiden, 1921 (Foto Wikipedia)

Opmerking

In plaats van met je vingers te werken, kun je ook een kurkentrekker werken.

Je draait (over de kleinste hoek) van $\vec{a}$ naar $\vec{b}$. Als de kurk in de richting van $\vec{c}$ draait, dan is $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ positief georiënteerd, anders negatief.



Lijnen en vlakken

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ is een **vectorvoorstelling** (vv) van de lijn

door het punt $(1, 2, -1)$ met richtingsvector $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

De bijbehorende **parametervoorstelling** (pv) is:

$$(x, y, z) = (1, 2 - 4t, -1 + 7t).$$

Opmerking

We schrijven in plaats van $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ ook $(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)$ en in plaats van $(k \cdot a_1, k \cdot a_2, k \cdot a_3)$ ook $k \cdot (a_1, a_2, a_3)$, dus bovenstaande pv schrijven we ook als $(x, y, z) = (1, 2, -1) + t \cdot (0, -4, 7)$ of als $(x, y, z) = (1, 2, -1) + (0, -4t, 7t)$.

Als twee lijnen niet in één vlak liggen, noemen we **kruisend**.

Als ze in één vlak liggen zijn ze evenwijdig of snijdend.

Met de **hoek van twee (kruisende) lijnen** bedoelen we de hoek die ze met elkaar maken als je (een van) beide evenwijdig verschuift, totdat ze elkaar snijden.

Gegeven is een vlak V . Neem een punt A in V . Kies in het vlak door O evenwijdig aan V een onafhankelijk paar vectoren, $\vec{r}$ en $\vec{s}$. Dan is $\vec{x} = \vec{a} + p \cdot \vec{r} + q \cdot \vec{s}$, waarbij p en q alle mogelijke waarden aannemen, een **vectorvoorstelling** (vv) van V , dat wil zeggen:

door voor p en q alle mogelijke waarden te nemen, krijg je voor $\vec{x}$ precies alle plaatsvectoren van punten van V één keer.

Voorbeeld

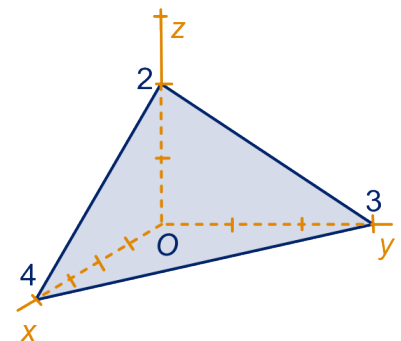
V is het vlak door de punten $(4, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ en $(0, 0, 2)$. Een onafhankelijk paar vectoren in het vlak door O evenwijdig aan

$$V \text{ is: } \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Een vv is dan: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

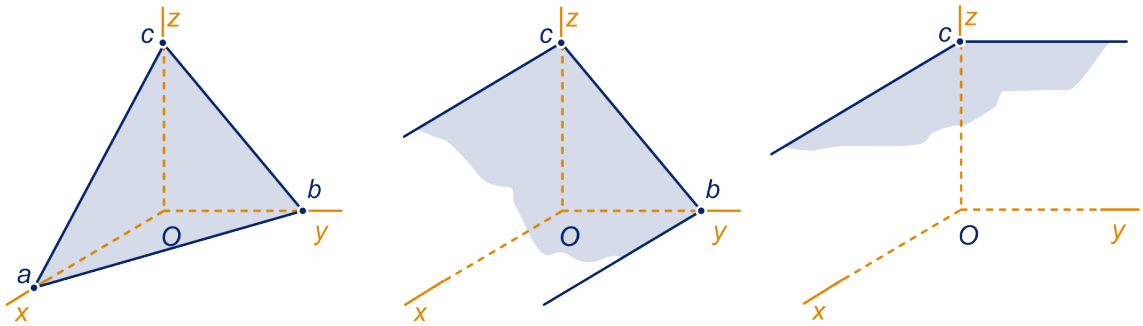
De bijbehorende **parametervoorstelling** van V is dan:

$$(x, y, z) = (4 + 4p + 2q, -3p, -q)$$



6.7 Eindpunt

Vergelijking van een vlak



In het volgende zijn a , b en c getallen niet gelijk aan 0.

- Het vlak dat de coördinaatassen snijdt in $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ en $(0,0,c)$ heeft vergelijking $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, zie de figuur linksboven.
- Het vlak evenwijdig met de x -as, dat de y -as snijdt in $(0,b,0)$ en de z -as in $(0,0,c)$, heeft vergelijking $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, zie de figuur midden boven.
- Het vlak evenwijdig met het Oxy -vlak dat de z -as in $(0,0,c)$ snijdt heeft vergelijking $\frac{z}{c} = 1$, zie de figuur rechtsboven.

Als $ax + by + cz = d$ een vergelijking van een vlak is, dan staat

de vector $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ loodrecht op dat vlak.

Een vector die loodrecht op een vlak staat noemen we een **normaalvector** van dat vlak.

Een lijn die loodrecht op een vlak staat noemen we **normaal** van dat vlak.

Lengte, inproduct, afstand

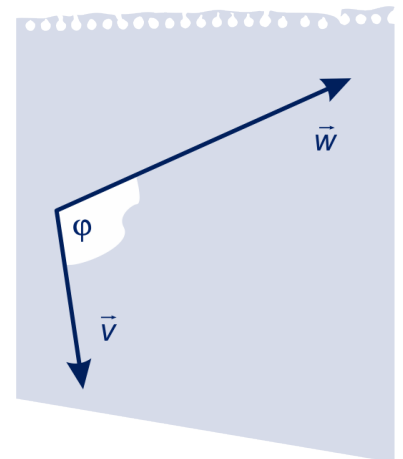
Als $X = (x, y, z)$, dan is de lengte van $\vec{OX} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, voor alle x , y en z .

De lengte van een vector $\vec{v}$ noteren we als $|\vec{v}|$.

Het **inproduct** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ is: $v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3$.

We noteren het inproduct van $\vec{v}$ en $\vec{w}$ als: $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

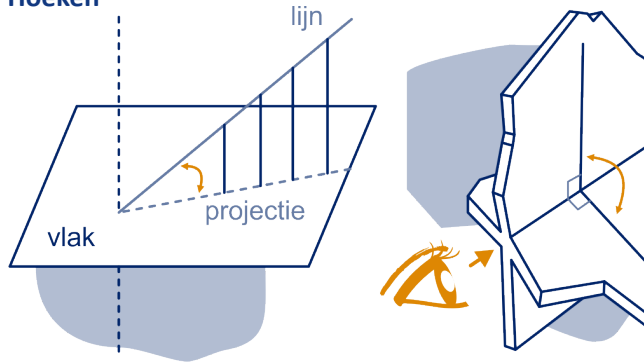
Er geldt: $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\varphi)$, waarbij φ de hoek is tussen de vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$.



6.7 Eindpunt

Als V het vlak met vergelijking $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z - d = 0$ is en P het punt (p_1, p_2, p_3) . Dan is de afstand van P tot V gelijk aan: $\frac{|n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2 + n_3 \cdot p_3 - d|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$.

Hoeken



De **hoek van een lijn met een vlak** α is de hoek die lijn met zijn (loodrechte) projectie op dat vlak maakt, zie de figuur linksboven.

Als β de hoek tussen de lijn en een normaal van het vlak is (de hoek die de lijn uit het lood staat), dan is $\alpha + \beta = 90^\circ$.

De **hoek van twee vlakken** is de hoek van de vlakken die je ziet als je langs de snijlijn kijkt, dus de hoek die de snijlijnen van de twee vlakken met een vlak loodrecht op de snijlijn met elkaar maken, zie de figuur rechtsboven.

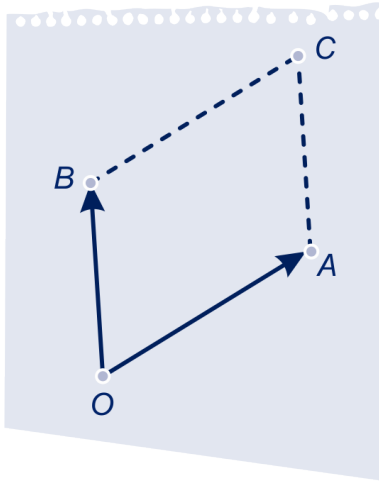
Deze hoek heeft dezelfde grootte als de hoek tussen normalen van de twee vlakken.

6.7 Eindpunt

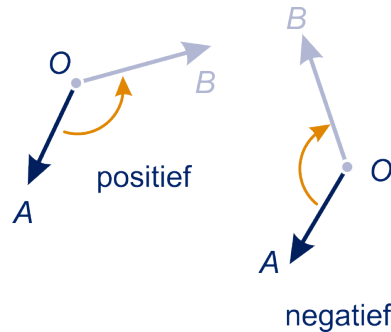
De determinant

Gegeven zijn twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Met het **parallellogram opgespannen door** $\vec{a}$ en $\vec{b}$ bedoelen we het parallellogram $OABC$ waarbij C het punt is met plaatsvector $\vec{a} + \vec{b}$, zie figuur 1.



figuur 1



figuur 2

De determinant in dimensie 2

Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Draai $\vec{a}$ over de kleinste hoek om O naar $\vec{b}$.

Als dat *linksom* is, noemen we het paar vectoren $(\vec{a}, \vec{b})$ **positief georiënteerd**, anders **negatief georiënteerd**, zie figuur 2.

Met de **determinant** van het paar $(\vec{a}, \vec{b})$ ook wel de **georiënteerde oppervlakte** van het parallellogram opgespannen door $(\vec{a}, \vec{b})$ bedoelen we

- de oppervlakte van dat parallellogram als het paar $(\vec{a}, \vec{b})$ positief georiënteerd is,
- het tegengestelde van die oppervlakte als het paar $(\vec{a}, \vec{b})$ negatief georiënteerd is.

We noteren dit als $\det(\vec{a}, \vec{b})$, de **determinant** van $(\vec{a}, \vec{b})$.

6.7 Eindpunt

Stelling

$$\det \begin{pmatrix} \vec{a}, \vec{b} \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1.$$

In plaats van $\det \begin{pmatrix} \vec{a}, \vec{b} \end{pmatrix}$ schrijven we vaak $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

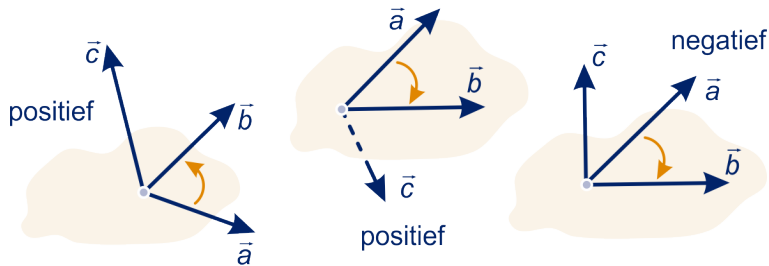
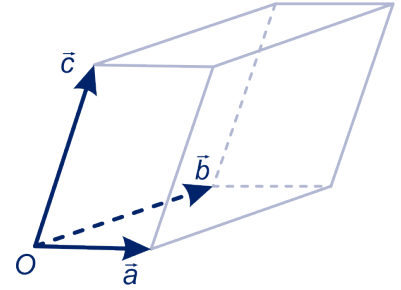
De determinant in dimensie 3

Gegeven is een rij van drie vectoren $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

In de figuur hiernaast is het parallellepipedum opgespannen door $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ getekend.

Als je (over de kleinste hoek van $\vec{a}$ naar $\vec{b}$ draaiend, een kurkentrekker in dezelfde richting gaar als $\vec{c}$, noemen we de rij $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ **positief georiënteerd**, anders **negatief georiënteerd**

In de figuur hieronder zie je drie voorbeelden.



De **determinant** $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ is de inhoud van het parallellepipedum opgespannen door $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ als $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ positief georiënteerd is, anders het tegengestelde van de inhoud.

Stelling

Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ en $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, dan:

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + a_2 \cdot b_3 \cdot c_1 + a_3 \cdot b_1 \cdot c_2 - a_3 \cdot b_2 \cdot c_1 - a_2 \cdot b_1 \cdot c_3 - a_1 \cdot b_3 \cdot c_2.$$

In plaats van $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ schrijven we wel: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

$$\text{Er geldt: } \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{x}$$

6.7 Eindpunt

Het uitproduct

Gegeven is een onafhankelijk paar vectoren $(\vec{a}, \vec{b})$ met

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

We definiëren de vector $\vec{a} \times \vec{b}$ als $\begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$.

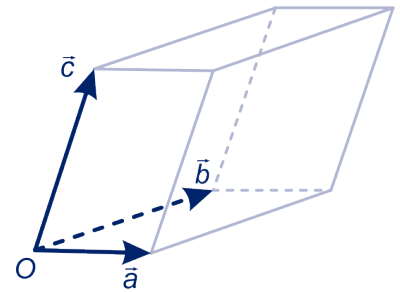
We noemen $\vec{a} \times \vec{b}$ het **uitproduct** van $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Er geldt:

1. $\vec{a} \times \vec{b}$ staat loodrecht op $\vec{a}$ en op $\vec{b}$.
2. $|\vec{a} \times \vec{b}|$ is de oppervlakte van het parallellogram opgespannen door $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

De inhoud van een parallellepipedum

De inhoud van het parallellepipedum opgespannen door de vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ is de absolute waarde van $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.



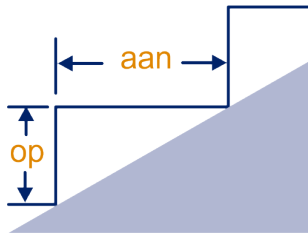
6.8 Extra opgaven

1

Een trap waarvan de aantrede twee keer zo groot is als de optrede, maakt (van bovenaf gezien) een hoek van 90° . De leuning loopt even steil als de trap. Bereken de hoek tussen de twee leuningen in graden nauwkeurig.



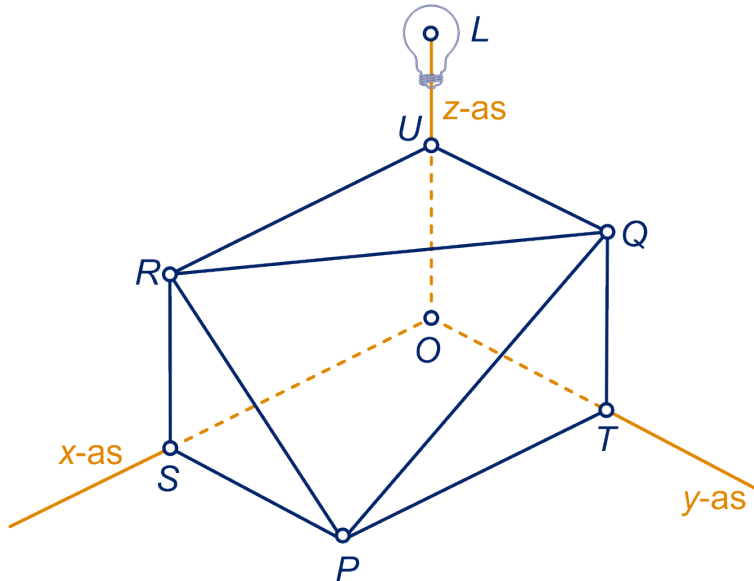
Hint 14.



2



In de figuur hieronder zijn $OSRU$ en $OTQU$ rechthoeken. Verder is $P(6,4,0)$, $Q(0,4,3)$ en $R(6,0,3)$.



In $L(0,0,5)$ bevindt zich een lichtbron. Die werpt een schaduw van driehoek PQR op het Oxy -vlak.

- Teken die schaduw op het werkblad. Licht je werkwijze toe.
- Bereken de oppervlakte van de schaduw.

De lichtbron wordt langs de z -as verplaatst zó, dat de schaduw van driehoek PQR op het Oxy -vlak een lijnstuk wordt.

6.8 Extra opgaven

- c Teken op het werkblad de nieuwe plaats van de lichtbron.
- d Bereken $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$.
- e Bereken de oppervlakte van driehoek PQR exact.
- f Bereken de coördinaten van het gevraagde punt uit onderdeel c.

Gedeeltelijk naar een oud examen wiskunde B

3

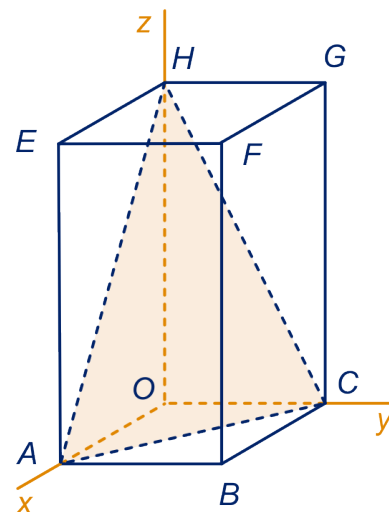
In de figuur is een recht blok $ABCO.EFGH$ getekend met $A(3,0,0)$, $C(0,2,0)$ en $H(0,0,4)$.

Het uitproduct $\overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{CH}$ noemen we $\vec{u}$.

- a Bereken $\vec{u}$.
- b Hoe kun je $\vec{u}$ gebruiken om de oppervlakte van driehoek ACH uit te rekenen?
Doe dat.
- c Hoe kun je $\vec{u}$ gebruiken om de hoek tussen lijn EC en vlak AFH te berekenen?
Doe dat in graden nauwkeurig.

De projectie van O op vlak ACH noemen we P .

- d Bereken de coördinaten van P .



4



$ABCO.EFGH$ is een kubus met $A(6,0,0)$, $C(0,6,0)$ en $H(0,0,6)$. P , Q , R en S zijn middens van ribben, zie figuur.

Het lichaam $ABCO.PQRS$ noemen we L .

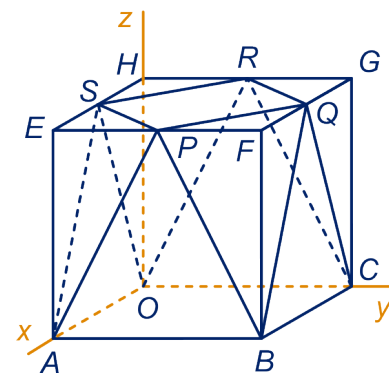
- a Bereken de inhoud van L .
 Hint 15.
- b Teken de doorsnede van L met diagonaalvlak $ABGH$ van de kubus.
- c Bereken de oppervlakte van die doorsnede exact.
- d Geef een vergelijking van vlak BPQ .
- e Bereken de hoek tussen de vlakken ABP en BPQ in graden nauwkeurig.

Er gaat een bol door de acht hoekpunten van L .

- f Bereken de coördinaten van het middelpunt van die bol exact.

De doorsnede met een vlak evenwijdig met het grondvlak van de kubus is een achthoek.

- g Bereken de exacte hoogte waarop de achthoek oppervlakte 12 heeft.



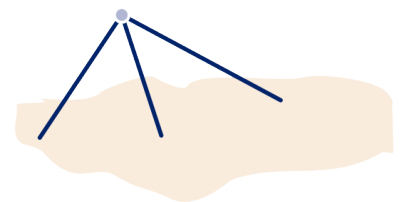
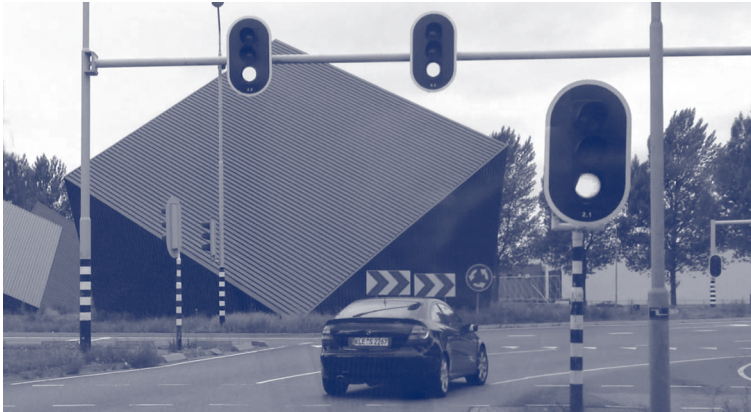
6.8 Extra opgaven

5



Op Het Taskerplein in Nijmegen zijn enkele rechthoekige metalen blokken ingegraven. We vragen ons af hoever ze boven het maaiveld uitsteken.

Een kubus is in de grond gegraven. Er steken nog drie ribben boven het maaiveld uit, zie de figuur hieronder rechts. Ze hebben lengte 3, 4 en 5.



Bereken exact hoe ver de top boven het maaiveld uitsteekt.

6

In opgave 41 hebben we de hoek van twee dakvlakken, waarvan de nokken loodrecht op elkaar staan bekeken. De dakhellingen waren daar 45° .

- Bereken die hoek ook (in graden nauwkeurig) als de dakhellingen 60° zijn.
- Hoe groot is de hellingshoek van de dakvlakken (in graden nauwkeurig) als de hoek tussen de dakvlakken 45° is?

7

$ABCO.T$ is een piramide met $A(6,0,0)$, $B(6,6,0)$, $C(0,4,0)$, en $T(0,0,10)$.

- Geef een pv van de snijlijn van de vlakken OAT en BCT



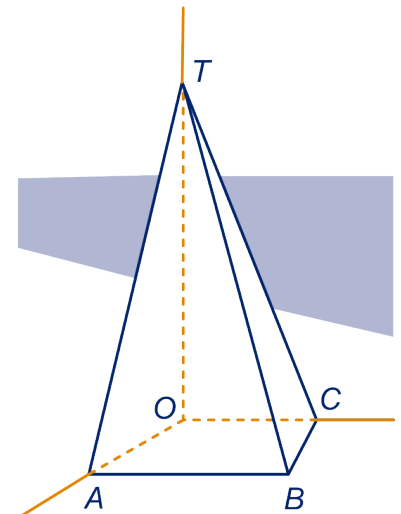
Hint 16.

Op lijn TB ligt een punt P zó, dat lijn OP loodrecht op lijn BT staat.

- Bereken de coördinaten van P .

Een druppel glijdt vanuit T over vlak TBC over de kortste weg naar beneden.

- Bereken de coördinaten van het punt waar hij op ribbe BC komt.



6.8 Extra opgaven

8



$ABCO.T$ is een vierzijdige piramide met vierkant grondvlak en $A(3,0,0)$, $C(0,3,0)$ en $D(0,0,4)$.

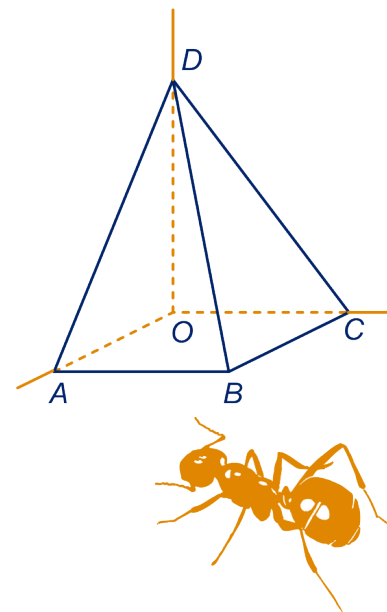
- a Bereken de hoek tussen de opstaande zijvlakken (driehoeken) ABD en BCD in graden nauwkeurig met behulp van normaalvectoren.

Een mier loopt over de grensvlakken ABD en BCD over de kortste weg van A naar C .

- b Bereken de exacte lengte van de weg.
c Bereken de coördinaten van het punt waar de mier ribbe BD passeert.

Een andere mier neemt de kortste weg over de twee grensvlakken van A naar ribbe DC .

- d Bereken de exacte lengte van die weg.
e Bereken de hoek uit vraag a ook zonder vectoren.



Coördinaten en vectoren

1

a $\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

b $\overrightarrow{PF}$ en $\overrightarrow{AH}$ zijn geen veelvoud van elkaar.

2

a $C = (-4, 4, 0)$ en $D = (-4, -4, 0)$

b $(3, 3, 2)$

c $\overrightarrow{BT} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d $\overrightarrow{BR} = \begin{pmatrix} -1\frac{1}{5} \\ -1\frac{1}{5} \\ 2\frac{2}{5} \end{pmatrix}$, dus $R = \left(2\frac{4}{5}, 2\frac{4}{5}, 2\frac{2}{5}\right)$.

3

a Een punt van BT is: $(4 - 4t, 4 - 4t, 8t)$. Dit heeft gelijke y - en z -coördinaat als $4 - 4t = 8t$, dus als $t = \frac{1}{3}$. Je krijgt het punt $\left(2\frac{2}{3}, 2\frac{2}{3}, 2\frac{2}{3}\right)$

b 'Startpunt' is T en je 'loopt' in de richting $\frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{BT}$.

c $(x, y, z) = (-t, t, 8 + 2t)$ of $(x, y, z) = (2t, -2t, 8 - 4t)$ of ...

4

a Zie figuur, dat is het snijpunt van lijn AE met lijn BP (punt Q).

b Zie figuur.

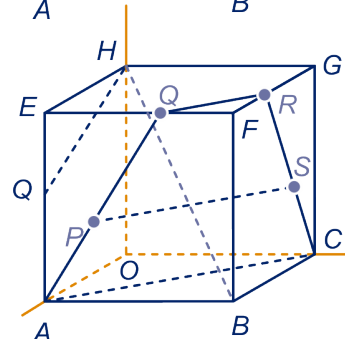
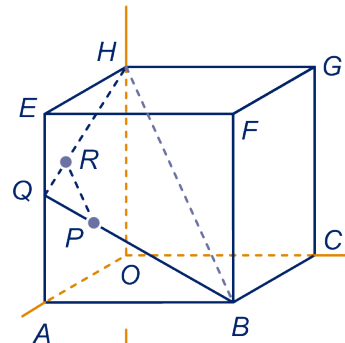
Het is punt R , het snijpunt van de lijn door P evenwijdig met lijn BH met lijn HQ .

c Een pv van k is: $(x, y, z) = (4 + t, 1 + t, 2 - t)$.
Voor het punt R geldt: $y = 0 \Leftrightarrow t = -1$, je krijgt: $(3, 0, 3)$.

d Het snijpunt is S . Vlak ACP snijdt de bovenkant van de kubus volgens een lijn evenwijdig aan AC .

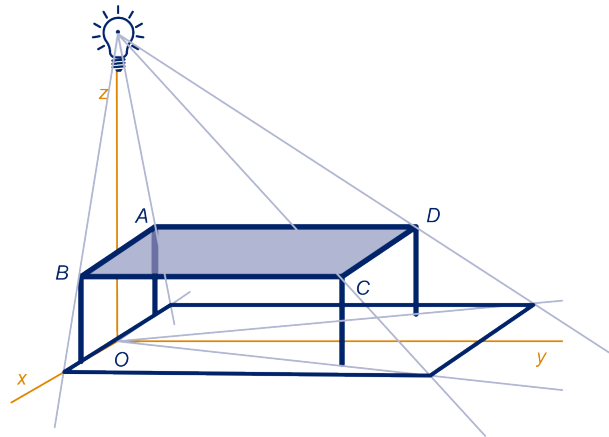
S is zó getekend dat SP evenwijdig aan AC is.

e Een pv van m is $(x, y, z) = (4 - t, 1 + t, 2)$. Het punt S krijg je voor $t = 3$, dit geeft het punt $(1, 4, 2)$.



5

a Zie figuur.

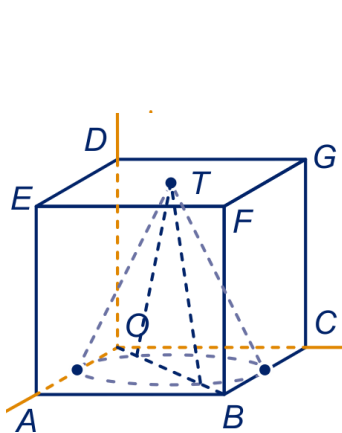


De schaduwen van A , B , C en D zijn A' , B' , C' en D' . Toelichting. De schaduw C' van C bijvoorbeeld vind je als volgt. Teken de lijn door O en de voet van de tafelpoot bij C . Teken de lijn door het lichtpunt en C . Het snijpunt van deze twee lijnen is C' .

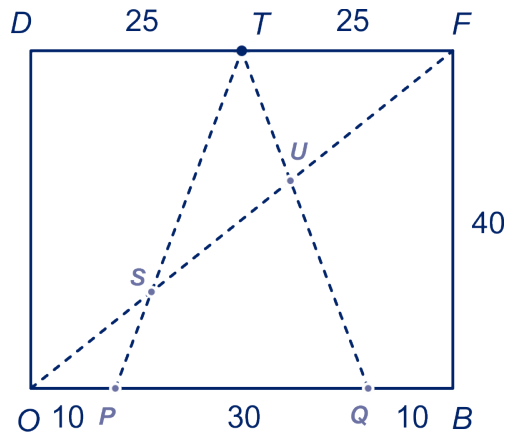
- b De vergrotingsfactor van tafelblad naar schaduw is $\frac{12}{8} = 1\frac{1}{2}$, de schaduw is dus 120 bij 180 (cm).
- c $(x, y, z) = (t, 3t, 12 - 2t)$ is een pv van lijn LC . De schaduw van C vind je voor $t = 6$, dus de schaduw is het punt $(6, 18, 0)$.
- d Vanwege het feit dat het tafelblad en vloer evenwijdig zijn, krijg je een cirkel met straal $1\frac{1}{2}$ en als middelpunt $(3, 4\frac{1}{2}, 0)$ de schaduw van $(2, 3, 4)$.

6

a Zie de figuur hieronder.



figuur bij onderdeel a



figuur bij onderdeel b

Toelichting. Lijn OB snijdt de grondcirkel van de kegel in P en Q . Vlak $OBFD$ snijdt de kegel volgens driehoek PQT . S is het snijpunt van PT en OF ; U is het snijpunt van TQ en OF .

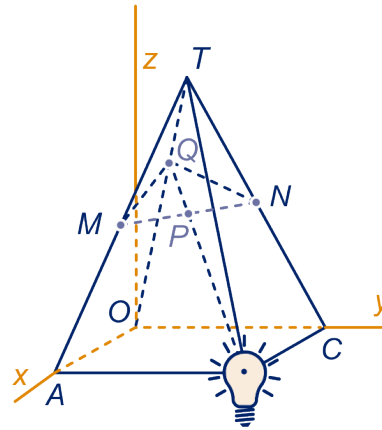
- b Zie figuur hierboven rechts.

6 Ruimte

- c Driehoek TSF is een uitvergroting van driehoek SOP , de vergrotingsfactor is $\frac{TF}{OP} = 2\frac{1}{2}$, dus S ligt op hoogte $\frac{2}{7} \cdot 40 = 11\frac{3}{7}$. De hoogte van U is: $\frac{8}{13} \cdot 40 = 24\frac{8}{13}$.
- d $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{5} \overrightarrow{OB}$, dus $P = (8, 6, 0)$.
- e Lijn TP heeft pv $(x, y, z) = (8 + 12t, 6 + 9t, 40t)$.
- f x -coördinaat = z -coördinaat, want in de x -richting heeft het blok dezelfde afmeting als in de z -richting. Je krijgt P dus als $8 + 12t = 40t$, dus als $t = \frac{2}{7}$, dus $P = \left(11\frac{3}{7}, 8\frac{4}{7}, 11\frac{3}{7}\right)$.

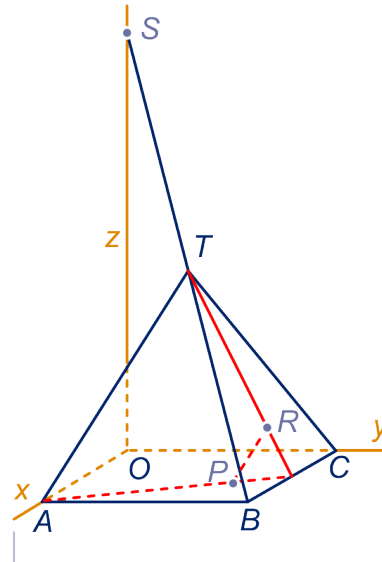
7

- a Zie figuur.
Toelichting. P is het midden van MN .
Het snijpunt van BP met OT is Q . De schaduwstukken zijn de lijnstukken MQ en NQ .
- b $(x, y, z) = (t, t, 3t)$ en $(x, y, z) = (2 + 2s, 2 + 2s, 3 - 3s)$.
- c Er moet gelden: $2 + 2s = t$ en $3 - 3s = 3t$.
Dan $s = -1\frac{1}{3}$ en $t = \frac{1}{3}$, dit geeft het punt $Q = \left(1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}, 4\right)$.
- d 4



8

- a Zie figuur.
- De snijlijn is rood getekend.
- b Zie figuur. Dit is punt R , hierbij zijn de lijnen AT en PR evenwijdig.
- c Zie figuur: het snijpunt van de z -as met lijn TB .
- d Bijvoorbeeld met gelijkvormigheid: $S = (0, 0, 12)$.



figuur bij opgave 8

9

- a -
- b Jagers: $(x, y, z) = (4, 12 - 7t, t)$, raketten: $(x, y, z) = (8 - 4s, 2 + s, s)$. De banen snijden elkaar als er getallen s en t zijn, zó, dat: én $2 + s = 12 - 7t$ én $s = t$.
Als je alleen naar de eerste en de derde vergelijking kijkt, vind je: $s = t = 1$, maar dan is niet aan de tweede vergelijking voldaan.
- c Raketten wordt: $(x, y, z) = (8 - 4s, 2 + s, a \cdot s)$, waarbij a variabel is. De banen snijden elkaar als er s, t en a zijn zó, dat: $8 - 4s = 4$, $2 + s = 12 - 7t$ en $a \cdot s = t$.

6 Ruimte

Uit de eerste twee vergelijkingen vind je: $s = 1$ en $t = 1\frac{2}{7}$. Als je dat in de derde vergelijking invult vind je $a = 1\frac{2}{7}$, de afvuurrichting is dus: $\begin{pmatrix} -28 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Het inproduct in de ruimte

evenwijdig, kruisen, snijden, kruisen

10

11

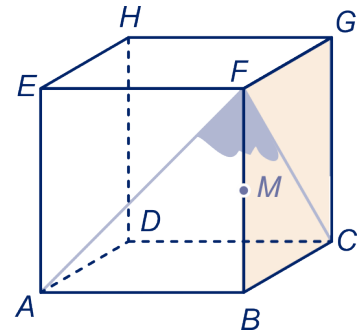
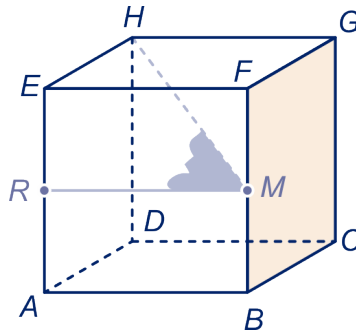
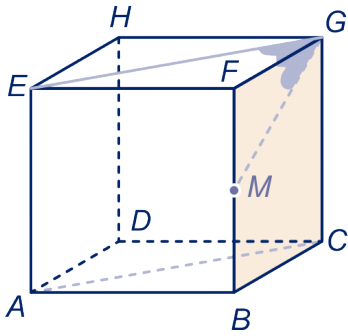
a AC en AH

b We nemen de ribben van de kubus 2. De figuren staan hieronder.

Het eerste geval, zie de figuur links. Verschuif bijvoorbeeld AC naar EG . De gevraagde hoek is hoek EGM . De zijden van driehoek EGM zijn: $2\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ en $\sqrt{5}$. Hoek EGM is $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right) = 51^\circ$.

Het tweede geval, zie de figuur midden. Verschuif bijvoorbeeld AB naar RM . De gevraagde hoek is hoek RMH . Driehoek RMH is rechthoekig in R . De rechthoekzijden zijn 2 en $\sqrt{5}$. Hoek RMH is $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 48^\circ$.

Het derde geval, zie de figuur rechts. Verschuif bijvoorbeeld DE naar FC . De gevraagde hoek is hoek AFC . Driehoek AFC is regelmatig, dus de gevraagde hoek is exact 60° .



12

a $5\sqrt{2}$

b $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$

c $\overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, lengte $5\sqrt{2}$.

13

a $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ en $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 6^2} = \sqrt{41}$.

b $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$ en $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$.

6 Ruimte

14

Breng een assenstelsel aan zoals gebruikelijk met de oorsprong in D .

Een richtingsvector van AC is: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en van GM : $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. De hoek tussen deze vectoren

noemen we α , dan: $\cos(\alpha) = \frac{-2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} \approx -0,63\dots$, dus de hoek tussen de lijnen AC en GM is $\cos^{-1}(0,63\dots) = 51^\circ$.

Een richtingsvector van AB is: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en van HM : $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. De hoek tussen deze vectoren

noemen we β , dan: $\cos(\beta) = \frac{2}{1 \cdot 3} \approx 0,66\dots$, dus de hoek tussen de lijnen AB en HM is $\cos^{-1}(0,66\dots) = 48^\circ$.

Een richtingsvector van AF is: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en van DE : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. De hoek tussen deze vectoren

noemen we γ , dan: $\cos(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$, dus de hoek tussen lijnen AF en DE is exact 60° .

15

a $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OF} = 0$.

b $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ z \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{EC} = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot -3 + 3 \cdot 3 + z \cdot -3 = 0$, dus $z = 0$.

c Dan $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ z-3 \end{pmatrix} = 0$, dus $z = 3$.

d $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

16

a We nemen de punten P op lijn AD en Q op lijn BE die op dezelfde 'hoogte' liggen als C . Dus P is $(6,0,8)$ en Q is $(0,6,8)$.

De inhoud van het prisma met grondvlak OAB en hoogte 8 is $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 = 144$.

Daar moet de inhoud van piramide met grondvlak $DEQP$ en top C vanaf.

De oppervlakte van het trapezium $DEQP$ is $3 \cdot 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$ en de afstand van C tot het trapezium is $3\sqrt{2}$, dus de inhoud van de piramide is: $\frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 18\sqrt{2} = 36$.

De gevraagde inhoud is dus 108.

b Een pv van lijn DE is: $(x, y, z) = (6 - 3t, 3t, 4 + t)$. Dus $X = (6 - 3t, 3t, 4 + t)$ voor zekere waarde van t .

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CX} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6-3t \\ 3t \\ -4+t \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{22}{19}, \text{ dus } X = \left(\frac{48}{19}, \frac{66}{19}, \frac{98}{19} \right).$$

Parametervoorstelling en vergelijking van een vlak

17

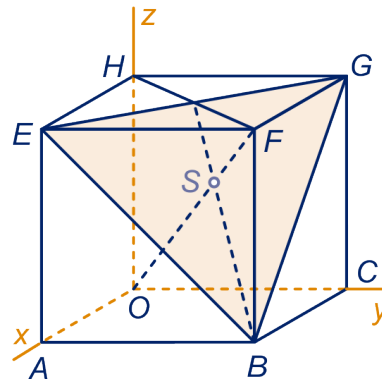
- a $p = q = 1$; $p = 1$ en $q = 2$.
- b $p = 2$ en $q = 1$.
- c $p = 7$ en $q = -10$.

18

- a $K = (4, 0, 2)$, dus $(x, y, z) = (4 + p, q, 2 + p)$.
- b $(0, 2, 0)$ en $(1, 0, 2)$
- c Uit $(t, 2 - 2t, 2t) = (4 + p, q, 2 + p)$ volgt (vergelijk de eerste en derde coördinaat): $4 + p = 1 + \frac{1}{2}p$, dus $p = -6$ en $t = -2$, dus het snijpunt is: $(-2, 6, -4)$.

19

- a $(x, y, z) = (2 - p, p + q, 2 - q)$
- b B, E en G .
- c Zie figuur.
- d De drie coördinaten zijn gelijk, dus: $2 - p = p + q = 2 - q$, dus $p = q = \frac{2}{3}$, dus $S = \left(1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3} \right)$.



figuur bij opgave 19

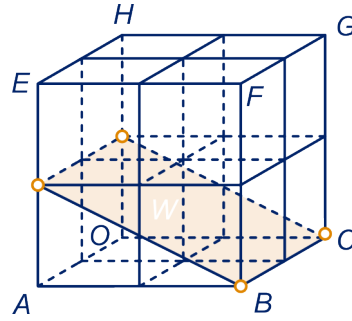
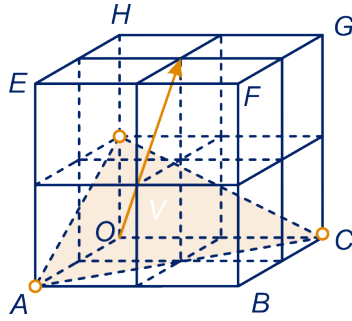
20

- a De hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{n}$ noemen we α .
Dan $|\vec{a}| \cos \alpha = 6$. Er geldt: $\vec{n} \cdot \vec{a} = |\vec{n}| \cdot |\vec{a}| \cos \alpha = 4 \cdot 6 = 24$.
Op dezelfde manier is $\vec{n} \cdot \vec{b} = 24$. Omdat de hoek γ tussen $\vec{c}$ en $\vec{n}$ stomp is, geldt: $|\vec{c}| \cos \gamma = -2$ en $\vec{n} \cdot \vec{c} = -8$.
- b Ze liggen in het vlak door P (of A) loodrecht op lijn n .

21

- a $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, en $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Dus $\vec{n} \cdot \vec{x} = x + y + 2z$ en $\vec{n} \cdot \vec{a} = 2$.
- b $(0, 0, 1)$, A en C .
Voor de tekening zie de volgende bladzijde links.
- c $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- d De punten van W op de kubus zijn: $B, C, (0, 0, 1)$ en $(2, 0, 1)$. Voor de tekening, zie de figuur op de volgende bladzijde rechts.

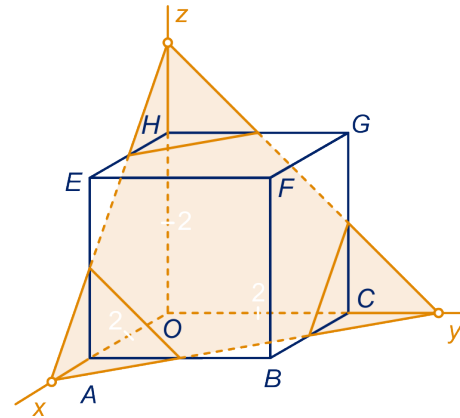
6 Ruimte



- e Als een punt aan de vergelijking voldoet, dan voldoet dat punt ook als je de x -coördinaat verandert. Die komt niet in de vergelijking voor.
- f De snijlijn is lijn MC , waarbij M het midden van ribbe OH is. Een pv is $(x, y, z) = (0, 2t, 1 - t)$.

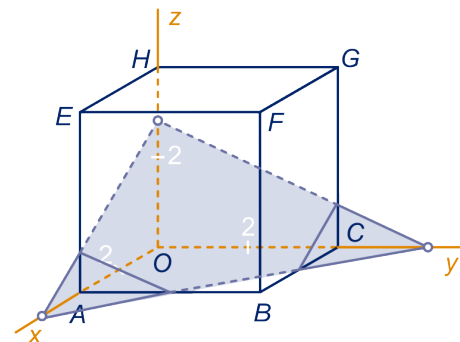
22

- a Zie figuur.
De snijpunten zijn $(6, 0, 0)$, $(0, 6, 0)$ en $(0, 0, 6)$.
- b $(4, 2, 0)$, $(2, 4, 0)$, $(4, 0, 2)$, $(2, 0, 4)$, $(0, 4, 2)$ en $(0, 2, 4)$
- c Lijn BG staat loodrecht op diagonaalvlak $OAFG$ van de kubus.
- d Het snijpunt van NB en OF noemen we S . Je kunt de zijden van driehoek NSF berekenen en daaruit zien dat de driehoeken NSF en BNF gelijkvormig zijn.



23

- a $(6, 0, 0)$, $(0, 6, 0)$ en $(0, 0, 3)$, zie figuur.
- b $(4, 2, 0)$, $(2, 4, 0)$, $(0, 0, 3)$, $(0, 4, 1)$ en $(4, 0, 1)$
- c $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- d Driehoek OEG is gelijkbenig en N is het midden van EG .
- e $ON = 2\sqrt{6}$, $MN = 2\sqrt{3}$ en $OM = 6$, dus $OM^2 = MN^2 + ON^2$, dus uit de omgekeerde stelling van Pythagoras volgt dat ON en MN loodrecht op elkaar staan.



Of: de driehoeken OHN en NFM zijn gelijkvormig met factor $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, ga dat na. Dus hoek $\angle HNO + \angle MNF = \angle HNO + \angle HON = 90^\circ$.

6 Ruimte

24

- a Vlak MEG moet dan een vergelijking van de vorm $x + y + 2z = d$ hebben voor zeker getal d . Als je voor $d = 12$ neemt, voldoen M , E en G . Dus het klopt.
- b Dat is ON , de lengte daarvan is $2\sqrt{6}$.
- c Het midden van OB noemen we T en S de projectie van O op lijn HT , dan staat OS loodrecht op lijn HT en op lijn AC (dat laatste omdat lijn AC loodrecht op elke lijn in vlak $OBFH$ staat).
- d De driehoeken SOT en OHT zijn gelijkvormig, dus $HT \cdot OS = OT \cdot OH \Leftrightarrow 2\sqrt{6} \cdot OS = 2\sqrt{2} \cdot 4$, dus $OS = 1\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

25

- a Ze voldoen aan de vergelijking.
- b $\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}$
- c $(3,0,0)$ en $(0,0,5)$
- d De variabele y komt niet in de vergelijking voor. Omdat de x - en de z -coördinaat niet veranderen, blijft het punt aan de vergelijking voldoen.
- e $\frac{x}{3} + \frac{z}{5} = 1 \Leftrightarrow 5x + 0y + 3z = 15$, dus een normaalvector is $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

26

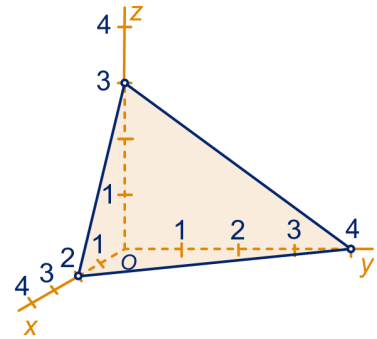
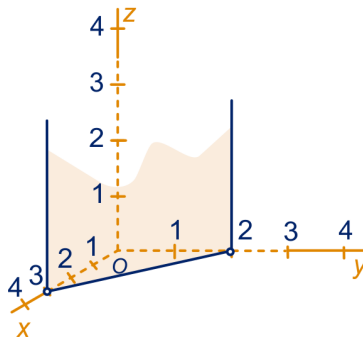
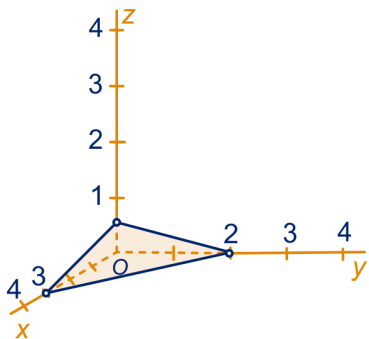
- a $(6,0,0)$, $(0,8,0)$ en $(0,0,10)$
- b $20x + 15y + 12z = 120$, normaalvector: $\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}$
- c $\frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$, normaalvector: $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$
- d $\frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 0$

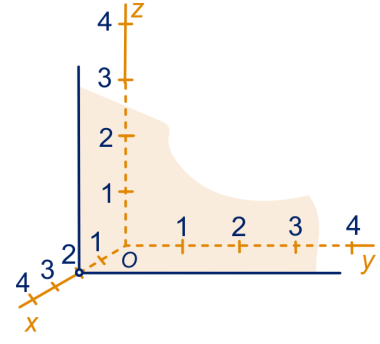
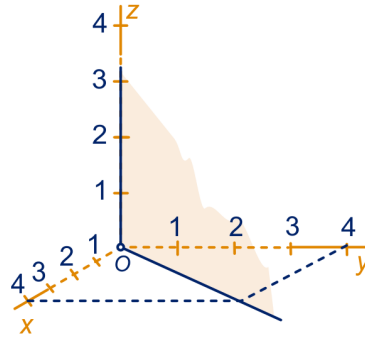
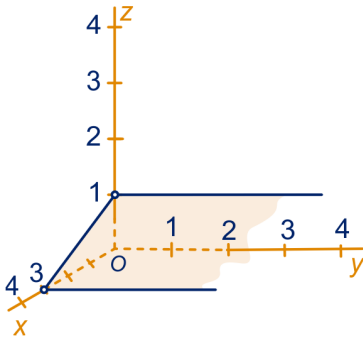
27

$(3,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,\frac{1}{2})$;
 $(3,0,0)$, $(0,0,1)$;

$(3,0,0)$, $(0,2,0)$;
 $(0,0,0)$;

$(2,0,0)$, $(0,4,0)$, $(0,0,3)$
 $(2,0,0)$





28

a Zie figuur.

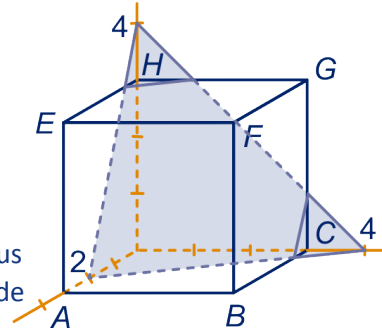
De coördinaten van de snijpunten zijn:

$(2,0,0)$, $(0,4,0)$, $(0,0,4)$.

b $(0,t,3)$ invullen in de vergelijking van V geeft $t = 1$, dus het snijpunt is: $(0,1,3)$.

c $(2,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,1,1)$, $(\frac{1}{2},0,3)$, $(\frac{1}{2},3,0)$

d Zie figuur.



29

Een pv van lijn AT is: $(x, y, z) = (3 - t, -3 + t, 2t)$, dus het snijpunt $S = (3 - t, -3 + t, 2t)$ voor zeker waarde van t .

Vul $(3 - t, -3 + t, 2t)$ in de vergelijking $y + z = 3$. Dit geeft: $t = 2$, dus $S = (1, -1, 4)$.

30

a $8\frac{1}{2}$

b Als er een gemeenschappelijk punt is dan $6 = 8\frac{1}{2}$.

c Hun normaalvectoren zijn veelvouden van elkaar, dus $a = 1\frac{1}{2}$ en $b = 2$.

31

a $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$

b Dat is het punt $(t, t, 2t)$ dat aan de vergelijking $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ voldoet. Dan $t = \frac{6}{7}$ en het gevraagde punt is: $(\frac{6}{7}, \frac{6}{7}, 1\frac{5}{7})$.

32

a $x + y + z = 3$ en $x + y + z = 9$

b De piramide P met hoekpunten $(0,0,0)$, $(9,0,0)$, $(0,9,0)$ en $(0,0,9)$ heeft inhoud: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 121\frac{1}{2}$. Daar moet de inhoud van vier piramides vanaf, die gelijkvormig zijn met P met vergrotingsfactor $\frac{1}{3}$. Het gevraagde stuk heeft inhoud $\frac{23}{27} \cdot 121\frac{1}{2} = 103\frac{1}{2}$.

33

$7x - y + z = 8$; $2x - y = 0$; $2x - 10y + 9z = 9$; $3y + 4z = 18$.

34

$7x + 19y - 2z = 39$; $3x - 4y + z = 9$; $x - 9y + 6z = 1$; $2x - 3y + 4z = 11$.

35

a $\vec{n} \cdot \vec{AP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + -3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 = -3$ en $|\vec{n}| = \sqrt{29}$.

b $\frac{3}{\sqrt{29}}$, volgens de stelling.

c $\vec{n} \cdot \vec{a} = 11$, omdat A in V ligt.

$\vec{n} \cdot \vec{p}$ levert hetzelfde op als de coördinaten van P in $2x - 3y + 4z$ invullen.

36

1. $\frac{5}{7}\sqrt{14}$,

2. $1\frac{1}{7}\sqrt{14}$,

3. Het vlak door die punten heeft vergelijking $x + 2y - 2z = 12$, dus de afstand is $4\frac{1}{3}$.

37

a $(x, y, z) = (1 + 2t, -1 + 4t, 2 + t)$

b $\frac{|1 + 2t + 2(-1 + 4t) - 2(2 + t) - 12|}{3} = 3 \Leftrightarrow t = 1$ of $t = 3\frac{1}{4}$, dus de punten $(3, 3, 3)$ en $(7\frac{1}{2}, 12, 5\frac{1}{4})$

38

Dat is de afstand van een punt in het vlak $x + y + z = 9$, bijvoorbeeld $(9, 0, 0)$ tot het vlak met vergelijking $x + y + z = 3$, dus $\frac{|9 + 0 + 0 - 3|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

39

a $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x + 6y + 3z = 12$

b $\frac{12}{61}\sqrt{61}$

c Neem OAC als grondvlak, dan is de oppervlakte van het grondvlak $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3$ en de hoogte 4.

d $\frac{1}{3}$ ·oppervlakte driehoek ACH · de afstand van O tot vlak ACH = de inhoud van de piramide, dus de oppervlakte van driehoek $ACH = \sqrt{61}$.

40

a $\frac{24}{61}\sqrt{61}$

b 8

c De inhoud van het blok is 24; de inhoud van een piramide is $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4$, dus de gevraagde inhoud is $24 - 4 \cdot 4 = 8$.

Hoeken

41

a kleiner

b groter

c Noem die hoek α , dan $\tan \alpha = \frac{HD}{BD} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, dus $\alpha = 35^\circ$.

42

a in de richting van de snijlijn

b in de richting van de vouwlijn

43

a -

b -

44

90°

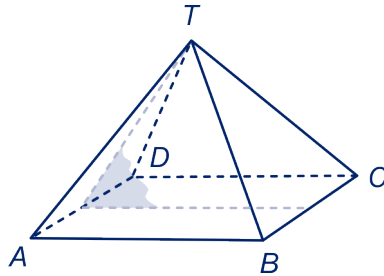
6 Ruimte

45

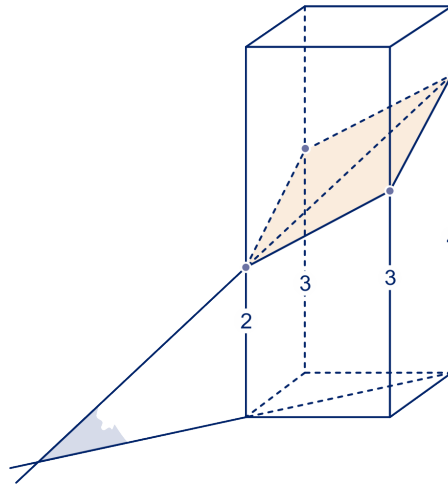
Zie figuur hieronder.
in de richting van AD ; 55°

46

a Zie figuur hieronder.



figuur bij opgave 45



figuur bij opgave 46

b 35°

47

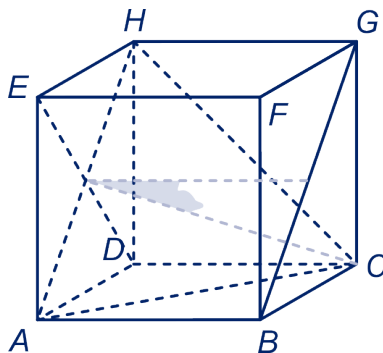
a waar ; waar ; waar
b tussen 0° en 90° .

48

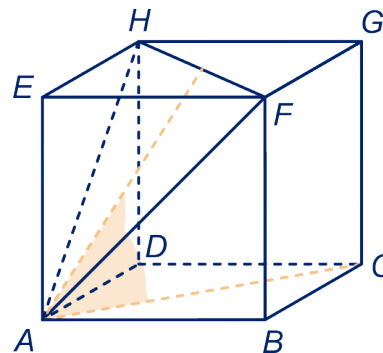
a Zie figuur hieronder.
b 35°

49

a Zie figuur. Noem de gevraagde hoek α . Neem aan dat P het midden van het grondvlak is en Q het midden van het bovenvlak, dan $\tan(\alpha) = \frac{PQ}{AP} = \sqrt{2}$, dus de gevraagde hoek is 55° .
b Als P het midden van HF en Q van MN , dan is het hoek PQG , die is 55° .



figuur bij opgave 48a

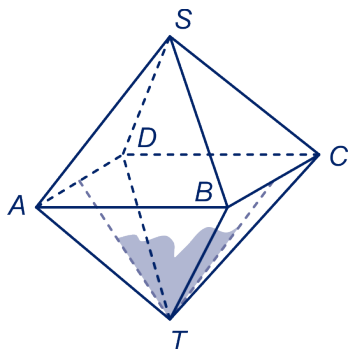


figuur bij opgave 49a

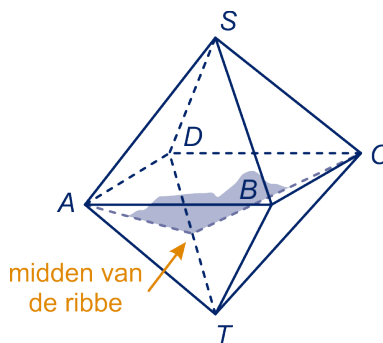
6 Ruimte

50

- a Zie figuur. Het midden van vierkant $ABCD$ noemen we P en het midden van BC noemen we Q , dan is de gevraagde hoek $2 \cdot \tan^{-1} \left(\frac{PQ}{PT} \right) = 2 \cdot \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$, dus de gevraagde hoek is 71° .
- b Zie figuur. Het midden van ribbe DT noemen we M en het midden van vierkant $ABCD$ is P . Dan is $2 \cdot \tan^{-1} \left(\frac{PA}{PM} \right) = 2 \cdot \tan^{-1} (\sqrt{2})$ de gevraagde hoek, dus 109° .



figuur bij opgave 50a



figuur bij opgave 50b

51

- a Neem het regelmatig viervlak heeft hoekpunten A, B, C en D en de ribben hebben lengte 2. Het midden van AB noemen we M , dan is de standhoek hoek CMD . De driehoek CMD is gelijkbenig met zijden $MC = MD = \sqrt{3}$ en $CD = 2$. Noem de standhoek α dan is $\sin \left(\frac{1}{2}\alpha \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, dus $\alpha = 71^\circ$.
- b De hoek uit opgave 51a is samen met de hoek uit opgave 50b 180° .

52

- a De driehoeken EBP en HBE zijn gelijkvormig (beide driehoeken hebben hoek B gemeenschappelijk en beide hebben een rechte hoek). Dus: $\frac{BP}{BE} = \frac{BE}{BH}$, dus $BP = 4\sqrt{3}$. Dus $BP : HP = 2 : 1$.
- b Het midden van EG noemen we M . De zijden van driehoek EMP zijn dan $\sqrt{6}$, $2\sqrt{6}$ en $3\sqrt{2}$, dus EMP is een $30-60-90$ -graden driehoek, de gevraagde hoek is dus exact 120° .

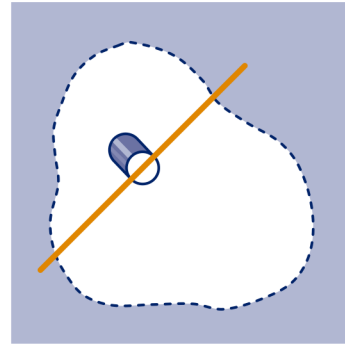
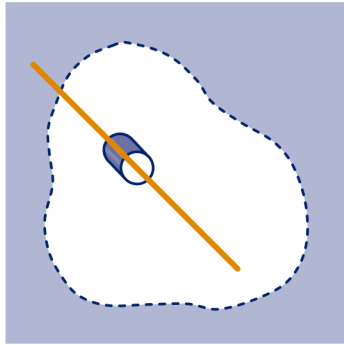
53

- a $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 8\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2} = 170\frac{2}{3}\sqrt{2}$
- b De oppervlakte van het grondvlak is $8 \cdot 8\sqrt{3} = 64\sqrt{3}$. Noem de gevraagde hoogte h , dan $\frac{1}{3}h \cdot 64\sqrt{3} = \frac{512}{3}\sqrt{2}$, dus $h = \frac{8}{3}\sqrt{6}$.
- c Noem de top van het bouwsel T , het midden van de lange zijde van een geodriehoek M en de projectie van de top op het grondvlak P , dan is de gevraagde hoek de hoek TMP . Noem die α , dan $\sin \alpha = \frac{h}{8}$, dus $\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{1}{3}\sqrt{6} \right) = 55^\circ$.

6 Ruimte

54

- a Zie de figuur hieronder links.
b Zie de figuur hieronder rechts.



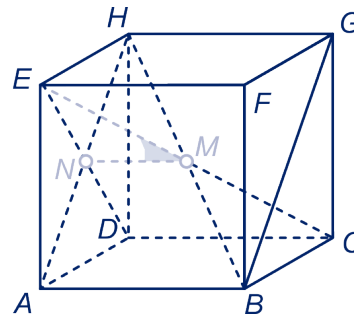
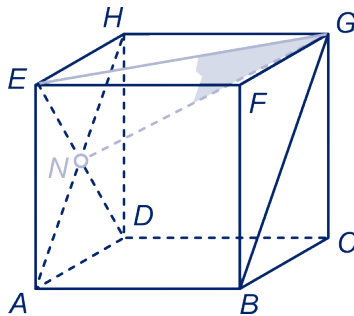
- c $4^\circ, 86^\circ$

55

waar; waar; niet waar

56

- a Zie de figuur links. α is hoek NGE ; die hoek is 30° , want driehoek DEG is gelijkzijdig.
b Zie de figuur rechts. β is hoek EMN . Ergeldt: $\tan(\beta) = \frac{EN}{MN} = \sqrt{2}$, dus $\beta \approx 55^\circ$.



figuren bij opgave 56

57

- a $x + y + z = 6$.
b $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ is een richtingsvector van lijn MN , dus $N = (3 + t, 6 + t, 6 + t)$. Invullen in een vergelijking van V geeft $t = -3$, dus $N = (0, 3, 3)$.
c $\sin(\alpha) = \frac{MN}{AM} = \frac{3\sqrt{3}}{9} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, dus $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) = 35^\circ$.

58

- a Een normaalvector van vlak $ABHG$ is $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en een normaalvector van vlak

ACH is $\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Noem de hoek tussen die twee vectoren α , dan $\cos(\alpha) =$

$$\frac{\vec{e} \cdot \vec{f}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}, \text{ dus (in graden nauwkeurig) } \alpha = 35^\circ.$$

- b** Normaalvectoren van de vlakken zijn $\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Noem de hoek tussen

de vectoren β , dan $\cos(\beta) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{f}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{5}\sqrt{15}$, dus $\beta = 39^\circ$.

59

- a** Noem die hoeken achtereenvolgens α , β en γ .

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{BA} \cdot \vec{BC}|}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} = -\frac{1}{10}\sqrt{10}, \text{ dus } \alpha = 108^\circ;$$

$$\cos(\beta) = \frac{|\vec{TB} \cdot \vec{TC}|}{|\vec{TB}| \cdot |\vec{TC}|} = \frac{31}{\sqrt{43} \cdot \sqrt{29}}, \text{ dus } \beta = 29^\circ;$$

$$\cos(\gamma) = \frac{|\vec{TB} \cdot \vec{OC}|}{|\vec{TB}| \cdot |\vec{OC}|} = \frac{3}{\sqrt{43}}, \text{ dus } \gamma = 63^\circ.$$

- b** Dat is de hoek die $\vec{BT}$ met $\vec{OT}$ maakt. Die is: $40,3^\circ$

- c** Vlak TAB is evenwijdig met de y -as en snijdt de andere coördinaat-assen in $(6,0,0)$ en $(0,0,10)$. Een vergelijking van vlak TAB is dus: $\frac{x}{6} + \frac{z}{10} = 1$, dus een

normaalvector: $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Een vergelijking van vlak TBC is: $\frac{x}{-12} + \frac{y}{4} + \frac{z}{10} = 1$, dus een normaalvector is

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}. \text{ De hoek tussen de vlakken noemen we } \delta, \text{ dan } \left| \vec{p} \right| \cdot \left| \vec{q} \right| \cdot \cos(\delta) = \left| \vec{p} \cdot \vec{q} \right|, \text{ dus } \delta = 86^\circ.$$

60

Een vergelijking van vlak AFH is $\frac{x}{7} + \frac{y}{-7} + \frac{z}{4} = 1$, dus een normaalvector is: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Een richtingsvector van lijn EC is $\vec{p} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

De hoek die lijn EC uit het lood staat noemen we β dan $\left| \vec{n} \cdot \vec{p} \right| = \left| \vec{n} \right| \cdot \left| \vec{p} \right| \cdot \cos(\beta)$, dus $\beta = 29^\circ$ en de gevraagde hoek is 61° .

61

- a** $2y - 3z = 0$ en $3x - 4y = 0$

b Noem de gevraagde hoek α . Lijn BC heeft richtingsvector $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ en vlak OAB heeft normaalvector OAB , dus $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| \sin(\alpha)$, dus $\sin(\alpha) = \frac{18}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{13}}$. De gevraagde hoek is dus 51° .

c Noem de gevraagde hoek β , dan is β de hoek tussen de vectoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, dus $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| \cos(\beta)$, dus $\cos(\beta) = \frac{8}{5\sqrt{13}}$. De gevraagde hoek is 64° .

a $\frac{18}{13}\sqrt{13}$

b $\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{29}} = \frac{4}{\sqrt{29}}$; uit $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ volgt dan dat $\sin(\alpha) = \sqrt{\frac{13}{29}}$.

c Oppervlakte driehoek $OAB = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{29} \cdot \sqrt{\frac{13}{29}} = 3\sqrt{13}$.

d De inhoud van viervlak $OABC = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{13} \cdot \frac{18}{13}\sqrt{13} = 18$.

Het uitproduct

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

a Alledrie $\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

b $\vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix}$;
 $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

c Beide 0

a $\vec{AB}$ en $\vec{AC}$ zijn onafhankelijke richtingen in vlak ABC (anders liggen A , B en C op één lijn). Uit eigenschap 3 volgt dan dat $\vec{AB} \times \vec{AC}$ loodrecht op vlak ABC staat.

62

63

64

65

b $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

c Een vergelijking is: $5x + y - 3z = c$ voor zeker getal c . Dat vind je door bijvoorbeeld A in te vullen. Je vindt $5x + y - 3z = -2$.

a $\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{ON} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, dus $|\vec{n}| = 3\sqrt{2}$.

b $\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}|} = \frac{6}{3 \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$; $\sin(\alpha)$ vind je met de formule:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1: \sin(\alpha) = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

c De oppervlakte is $|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}| \cdot \sin(\alpha) = 3\sqrt{2}$

a $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix}$

b $\left| \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix} \right| = 6\sqrt{29}$

c $\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{PR}|} \cos(\alpha) = \frac{3}{25}\sqrt{5}$.

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1, \text{ dus } \sin(\alpha) = \frac{2}{25}\sqrt{145}.$$

d Dat is $|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{PR}| \cdot \sin(\alpha) = 15\sqrt{5} \cdot \frac{2}{25}\sqrt{145} = 6\sqrt{29}$.

e Een normaalvector van vlak PQR is $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$, dus ook $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Een vergelijking

van vlak PQR is $2x + 3y + 4z = 24$. De snijpunten met de assen zijn dus $(12,0,0)$, $(0,8,0)$ en $(0,0,6)$.

a $\vec{r}, \vec{p}, \vec{q}$.

b 120

a $B(7,3,0)$, $E(5,-2,6)$, $F(7,1,6)$ en $G(2,1,6)$.

b 15, 90

c 90

a $B(9,5,0)$, $E(0,-3,5)$, $F(3,2,5)$ en $G(0,2,5)$.

b $(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = 75$, dus de inhoud is 75.

c $\frac{1}{2} \cdot 75 = 37\frac{1}{2}$

66

67

68

69

70

6 Ruimte

- d Als je bij deze piramide driehoek ABC als grondvlak neemt en hetzelfde grondvlak bij het prisma van het vorige onderdeel, dan zijn beide even hoog, dus de inhoud van de piramide is $\frac{1}{3} \cdot 37\frac{1}{2} = 12\frac{1}{2}$.

71

- a Breng een assenstelsel aan met D als oorsprong en met A op de x -as, C op de y -as en H op de z -as. Dan volgt het gevraagde uit het feit dat de inhoud $\frac{1}{6}$ van de inhoud van het een parallellepipedum is met hoekpunten A, C, D en H .

$$\frac{1}{6} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}.$$

- b De inhoud van elk van die piramides is $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$; de inhoud van het viervlak is dus $1 - 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

72

We brengen op de gebruikelijke wijze een assenstelsel aan. Het is $\frac{1}{6}$ maal de absolute waarde van $(\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MN}) \cdot \overrightarrow{MQ}$.

$$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{MQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$(\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MN}) \cdot \overrightarrow{MQ} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 6, \text{ dus de inhoud is } 1.$$

73

Het is $\frac{1}{6}$ van de absolute waarde van $(\overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{AM}) \cdot \overrightarrow{AC}$.

$$(\overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{AM}) \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 32, \text{ dus de inhoud is } \frac{1}{6} \cdot 32 = 5\frac{1}{3}.$$

Determinant en uitproduct

74

- a 11 en 17
b -11, -17, 11, 17

75

- a -
b Als je linksom moet draaien is de hoek β tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ gelijk aan $90^\circ - \alpha$ en als je rechtsom moet draaien $\alpha - 90^\circ$. De oppervlakte van het parallellogram is $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\beta) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}_R| \sin(\beta)$, want $\vec{b}$ en $\vec{b}_R$ hebben dezelfde lengte. In het eerste geval geldt: $\sin(\beta) = \cos(\alpha)$, in het tweede geval $\sin(\beta) = -\cos(\alpha)$.
c -

76

- a $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -11$, dus de oppervlakte van het eerste is parallellogram is 11; $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -17$, dus de oppervlakte van het tweede is parallellogram is 17.

6 Ruimte

b $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 34$, dus de oppervlakte van driehoek $ABC = 17$.

c De bijbehorende determinant (zoals in het vorige onderdeel) heeft twee kolommen met gehele getallen, is dus ook geheel.

77

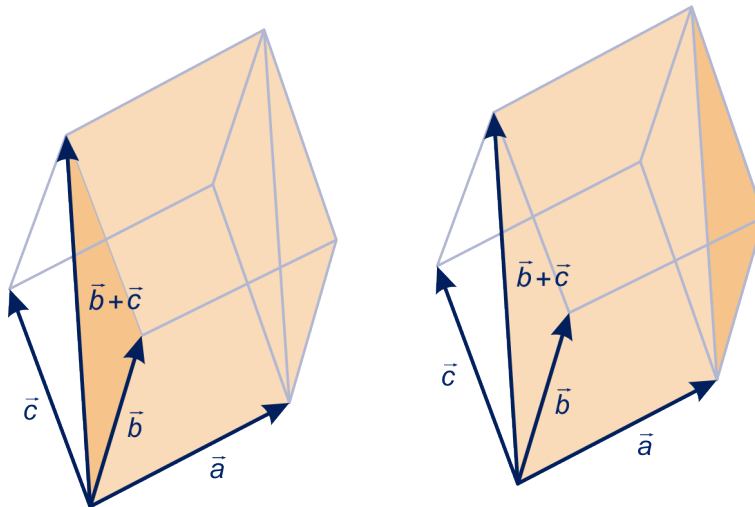
- a 10, 14, -14 en 0
- b $-2 \cdot 10 = -20$
- c 24
- d -20

78

- a Verbind het inwendig roosterpunt met de hoekpunten van de driehoek. Zo heb je de driehoek in drie roosterdriehoeken verdeeld die elk minstens oppervlakte $\frac{1}{2}$ hebben.
- b

79

- a Zie figuur.



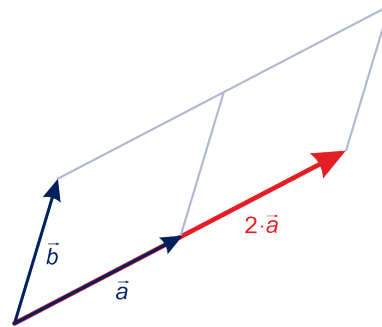
De twee licht gekleurde delen in de figuur links hebben samen oppervlakte $\det(\vec{a}, \vec{b}) + \det(\vec{a}, \vec{c})$.

Het licht gekleurde parallellogram in de figuur rechts heeft oppervlakte $\det(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c})$. Die twee zijn gelijk, want de donker gekleurde driehoeken links en rechts hebben dezelfde oppervlakte.

6 Ruimte

b Zie figuur.

Het parallellogram bij de vectoren $2 \cdot \vec{a}$ en $\vec{b}$ heeft één zijde twee keer zo lang.



figuur bij opgave 79b

a $\det(\vec{a}, \vec{b}) = \det(a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2, \vec{b}) =$
 $\det(a_1 \cdot \vec{e}_1, \vec{b}) + \det(a_2 \cdot \vec{e}_2, \vec{b}) =$
 $a_1 \cdot \det(\vec{e}_1, \vec{b}) + a_2 \cdot \det(\vec{e}_2, \vec{b}) = \dots$
 Maak het verder zelf af.

b $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ is positief georiënteerd en spant een vierkant van 1 bij 1 op; $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = -\det(\vec{e}_2, \vec{e}_1)$; verder $(\vec{e}_1, \vec{e}_1)$ en $(\vec{e}_2, \vec{e}_2)$ afhankelijk.

80 $C = (t, 2t + 7)$; dan $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\vec{AC} = \begin{pmatrix} t+3 \\ 2t \end{pmatrix}$. Dan $\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = \pm 30$
 $\Leftrightarrow 18t - 6 = \pm 30$, dus $C = (5, 10)$ of $C = (1\frac{1}{2}, -3)$.

81 Positief: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$, $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$; de andere drie negatief.

82 **a** Vergelijk dat met wat er in opgave 77 gedaan is.

b $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$, want $(\vec{e}_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ is afhankelijk.

$\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \det(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1) = \det(\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1$ en $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2) =$
 $\det(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3) = \det(\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1) = -1$: de zes rijtjes vectoren spannen een kubus met ribbe 1 op; de eerste drie rijtjes vectoren hebben een positieve oriëntatie en de andere een negatieve.

c Dit volgt direct uit de vorige twee onderdelen.

83 $2, -14, -51$

84 **a** $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\vec{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Van A naar H moet je schuiven over $\vec{BC} + \vec{AE}$, dus $H = (3, -3, 9)$.

b Het is de absolute waarde van de determinant $\det(\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{AE}) =$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 10 \end{vmatrix}.$$

c $\frac{1}{6} \cdot 40 = 6\frac{2}{3}$; ook $6\frac{2}{3}$

85 De inhoud van het viervlak is $\frac{1}{6}$ van een parallellepipedum met roosterpunten als hoekpunt, dus de inhoud van het viervlak is minstens $\frac{1}{6}$. Door het inwendig

roosterpunt met de hoekpunten te verbinden, verdeel je het viervlak in vier viervlakken met inhoud minstens $\frac{1}{6}$.

87

a Dat is zo als $(\vec{a}, \vec{r}, \vec{s})$, met $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2 \end{pmatrix}$, afhankelijk is.

b $a + b = 4$

c $\begin{vmatrix} a-3 & 2 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, dus $a + b = 7$.

88

a $x + 4y - 3z = 0$

b Vul maar in.

89

Schrijf links en rechts van het gelijkteken uit en constateer dat je hetzelfde uitdrukkingen krijgt.

90

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

91

Dat is: $2 \cdot (|\vec{AB} \times \vec{BC}| + |\vec{AB} \times \vec{AE}| + |\vec{BC} \times \vec{AE}|) =$
 $= 2 \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \right| + 2 \cdot \left| \begin{pmatrix} -20 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} \right| + 2 \cdot \left| \begin{pmatrix} -30 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 46\sqrt{2} + 20\sqrt{10}.$

92

$\vec{a} \times \vec{b}$ is normaalvector van V en $\vec{c} \times \vec{d}$ is normaalvector van W , dus

$\vec{r} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$, staat loodrecht op normaalvectoren van V en W , is dus richtingsvector van de snijlijn van V en W .

Extra opgaven

1

Het is de hoek α tussen de vectoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dus $\cos(\alpha) = -\frac{1}{5}$ en $\alpha = 102^\circ$.

2

a Zie figuur op de volgende bladzijde.

Het snijpunt van lijn LR met de x -as is R_s en het snijpunt van lijn LQ met de y -as is Q_s ,

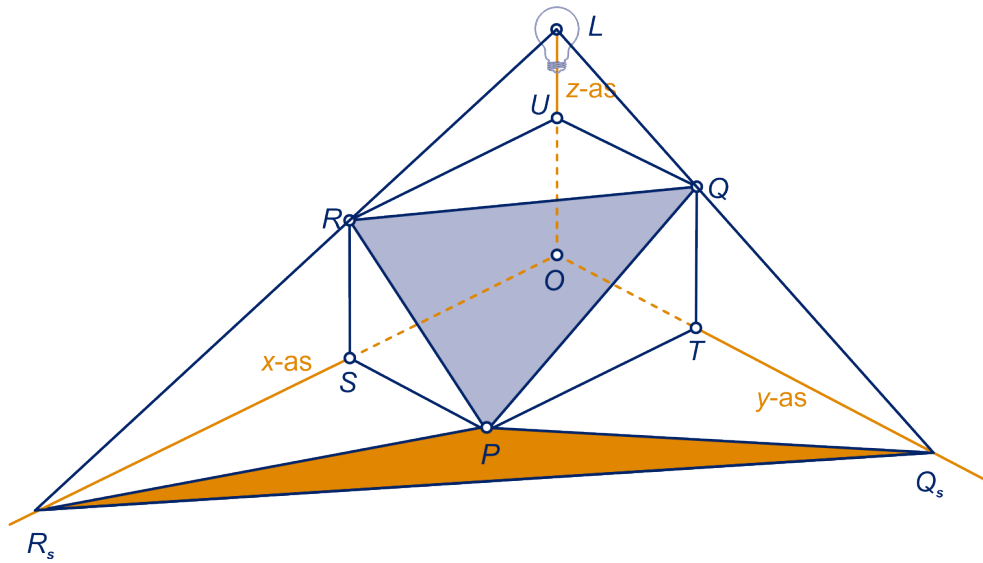
De schaduw is driehoek PQ_sR_s .

b Uit gelijkvormigheid volgt: $SR_s = 3 \cdot RS = 9$ en $TQ_s = 2 \cdot TQ = 6$.

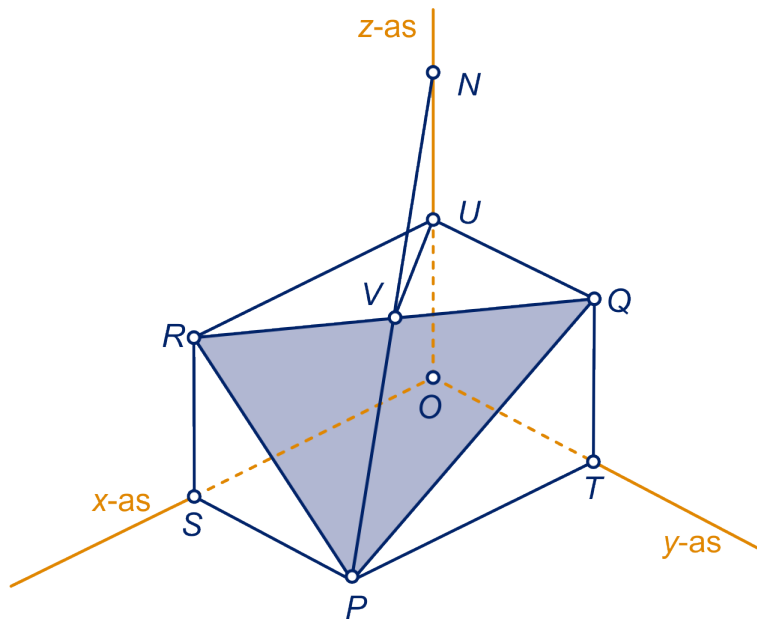
Dus oppervlakte driehoek $PSR_s = 18$, oppervlakte driehoek $PTQ_s = 18$, oppervlakte vierhoek $OSPT = 24$, oppervlakte driehoek $OR_sQ_s = 75$. Dus oppervlakte schaduw is 15.

c Zie figuur op de volgende bladzijde.

6 Ruimte



figuur bij opgave 2a



figuur bij opgave 2c

Teken een lijn door U evenwijdig aan lijn OP . Die snijdt de ribbe RQ . Het snijpunt noemen we V . Lijn PV snijdt de z -as in het gewenste punt N .

d $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, dus

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

6 Ruimte

e Die oppervlakte is $\frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix} \right| = 3\sqrt{29}$.

f Vlak PQR heeft normaalvector $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, zie vorige onderdeel, dus een vergelijking is $2x + 3y + 4z = 24$. Dit vlak snijdt de z -as in $(0,0,6)$.

a $\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, dus $\vec{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$

b De oppervlakte van driehoek ACH is $\frac{1}{2} \cdot |\vec{u}| = \sqrt{61}$

c Noem die hoek α . Dan is de hoek tussen $\vec{u}$ en $\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ gelijk aan $90^\circ - \alpha$.

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{12}{\sqrt{61} \cdot \sqrt{29}}, \text{ dus } \alpha = 17^\circ.$$

d Lijn OP heeft pv $(x, y, z) = (4t, 6t, 3t)$.

Een vergelijking van vlak ACH is: $4x + 6y + 3z = 12$. Dus de waarde van t die bij P hoort is oplossing van de vergelijking: $4 \cdot 4t + 6 \cdot 6t + 3 \cdot 3t = 12$, dus $t = \frac{12}{61}$

en $P = \left(\frac{48}{61}, \frac{72}{61}, \frac{36}{61} \right)$.

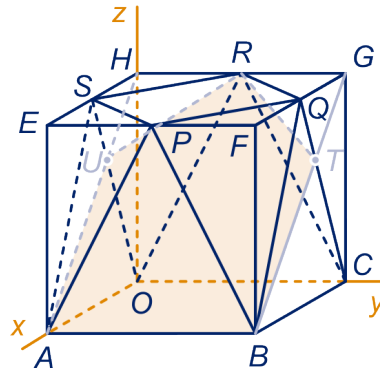
a De inhoud van piramide $OSRH$ is $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6 = 9$, dus de gevraagde inhoud is $6^4 - 4 \cdot 9 = 180$.

b De doorsnede is vijfhoek $ABTRU$, waarbij T het snijpunt van de lijnen BG en CQ is en U het snijpunt van de lijnen OS en AH is en

c De driehoeken TBC en TGQ zijn gelijkvormig; de vergrotingsfactor is 2, dus $BT = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

De oppervlakte van rechthoek $ABTU = 4\sqrt{2} \cdot 6 = 24\sqrt{2}$; de oppervlakte van driehoek $RTU = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 6 = 6\sqrt{2}$, De oppervlakte van de doorsnede is $24\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$.

d Het vlak snijdt de x -as in $(12,0,0)$, de y -as in $(0,12,0)$.



Een vergelijking is dus $\frac{x}{12} + \frac{y}{12} + \frac{z}{c} = 1$ voor

een of ander getal c . Het punt $(6,3,6)$ voldoet, dus $c = 24$. Een vergelijking is dus: $2x + 2y + z = 24$.

e Noem die hoek α , dan is α ook de hoek tussen de normaalvectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

We berekenen $\cos(\alpha)$ met het inproduct. Je vindt: $\cos(\alpha) = \frac{2}{3}$, dus $\alpha = 48^\circ$.

3

4

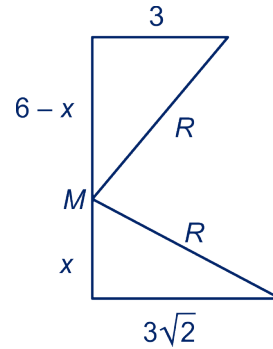
6 Ruimte

f Zie figuur.

Het middelpunt M van de bol ligt op de lijn door de middens van het boven- en het grondvlak van de kubus. Zeg op hoogte x .

De cirkel door de vier hoekpunten in het bovenvlak heeft straal 3, die door hoekpunten van het grondvlak heeft straal $3\sqrt{2}$.

Noem de straal van de bol R , dan geldt: $(6-x)^2 + 3^2 = R^2$ en $x^2 + (3\sqrt{2})^2 = R^2$, dus $x = 2\frac{1}{4}$, dus het middelpunt M is $(3, 3, 2\frac{1}{4})$.



g De achthoek op hoogte h bestaat uit een vierkant van 6 bij 6 waaruit bij de hoekpunten rechthoekige driehoeken met rechthoekszijden $\frac{1}{2}h$ zijn weggelaten. De oppervlakte van de achthoek is dus $36 - \frac{1}{2}h^2$, dus $h = 4\sqrt{3}$.

5

Kies een assenstelsel zó, dat de drie ribben op de assen liggen. Het hoogste punt is dan de oorsprong O . En vergelijking van het maaiveld is: $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$ oftewel: $20x + 15y + 12z - 60 = 0$. De afstand van O tot het maaiveld is dan $\frac{|20 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 12 \cdot 0 - 60|}{\sqrt{20^2 + 15^2 + 12^2}} = \frac{60}{\sqrt{769}}$.

6

a Dat is de hoek tussen de vlakken $\frac{x}{1} + \frac{z}{\sqrt{3}} = 1$ en $\frac{y}{1} + \frac{z}{\sqrt{3}} = 1$, dus de hoek α

van de vectoren $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dus $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3} \cdot 0 + 0 \cdot \sqrt{3} + 1 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$, dus $\alpha = 76^\circ$.

b Noem de hellingshoek β , dan zijn normaalvectoren van de dakvlakken $\begin{pmatrix} \tan(\beta) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

en $\begin{pmatrix} 0 \\ \tan(\beta) \\ 1 \end{pmatrix}$, dus $\frac{1}{\tan^2(\beta) + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos^2(\beta) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, dus $\beta = 33^\circ$.

7

a De coördinaten van het snijpunt van de lijnen OA en BC zijn $(-12, 0, 0)$ (met gelijkvormigheid). Een tweede punt van de snijlijn is T , dus de snijlijn heeft pv: $(x, y, z) = (-12 + 6t, 0, 5t)$.

b P is het snijpunt van lijn BT met het vlak O door loodrecht op lijn BT . Een vergelijking van V is: $3x + 3y - 5z = 0$.

Een pv van lijn BT is: $(x, y, z) = (0, 0, 10) + t(3, 3, -5)$. Je krijgt P voor de waarde van t waarvoor $3 \cdot 3t + 3 \cdot 3t - 5 \cdot (10 - 5t) = 0$, dus voor $t = \frac{50}{43}$. Je vindt:

$$P = \left(\frac{150}{43}, \frac{150}{43}, \frac{180}{43} \right).$$

- c Q is het snijpunt van lijn BT met het vlak V door O loodrecht op lijn BC . Een vergelijking van V is: $3x - y = 0$.
Een pv van lijn BC is: $(x, y, z) = (0, 4, 0) + t(3, -1, 0)$. Je krijgt Q voor de waarde van t waarvoor $3 \cdot 3t - (4 - t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5}$, dus $Q = \left(1\frac{1}{5}, 3\frac{3}{5}, 0\right)$.

- a Dat is een stompe hoek. Normaalvectoren van de vlakken ABD en BCD zijn $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Noem de hoek α , dan $\cos(\alpha) = \frac{9}{25}$ en $\alpha = 69^\circ$, dus de gevraagde hoek is 111° .

- b Zie figuur.

Druk de vlakken ABD en BCD 'plat'. De kortste weg is lijnstuk AC in de platte figuur. M is het snijpunt van de lijnstukken AC en BD . Er geldt:

$MA \cdot BD = AD \cdot AB$ (beide tweemaal de oppervlakte van driehoek ABD ,

dus $MA = \frac{15}{34}\sqrt{34}$ en $AC = \frac{15}{17}\sqrt{34}$.

- c AM staat loodrecht op BD . Dus M is het snijpunt van het vlak V loodrecht op BD met lijn BD .

Een pv van lijn BD is $(x, y, z) = (0, 0, 4) + t(3, 3, -4)$, een vergelijking van V is: $3x + 3y - 4z = 9$.

Het snijpunt krijg je voor $t = \frac{25}{34}$, dus dit is: $\left(\frac{75}{34}, \frac{75}{34}, \frac{36}{34}\right)$.

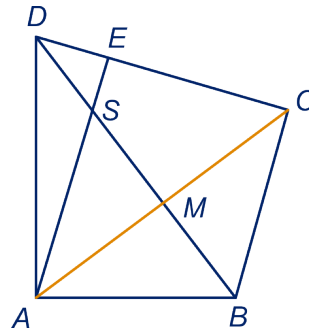
- d Zie figuur. De kortste weg is lijnstuk AE , waarbij AE loodrecht op DC staat.

Hoek ADB noemen we γ . Dan $\cos(\gamma) = \frac{5}{\sqrt{34}}$ en dus $\sin(\gamma) = \frac{3}{\sqrt{34}}$, dus

$\sin(2\gamma) = 2 \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\gamma) = \frac{15}{17}$ en $AE = AD \cdot \sin(2\gamma) = \frac{75}{17}$.

- e De gevraagde hoek is hoek AMC , waarbij de punten A , M en C in de 'ruimte' liggen. De zijden van driehoek AMC zijn $\frac{15}{\sqrt{34}}$, $\frac{15}{\sqrt{34}}$ en $3\sqrt{2}$. De gevraagde

hoek is: $2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{15}{\sqrt{34}}}\right) \approx 111^\circ$.



6 Ruimte

- 1 Teken de doorsnede van vlak ACP met de bovenkant van de kubus. De bovenkant van de kubus wordt gesneden volgens een lijn evenwijdig aan AC .
- 2 De snijpunten liggen in vlak $OBF D$.
- 3 Teken de lijn door B en MN
- 4 Verschuif bijvoorbeeld in het eerste geval AC naar EG .
- 5 De inhoud is de inhoud van een prisma min de inhoud van een vierzijdige piramide.
De inhoud van een piramide is $\frac{1}{3}G \cdot h$, waarbij G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte van de piramide is.
- 6 Geef een pv van lijn DE , daarmee kun je het gevraagde punt X in één variabele zeg t uitdrukken.
- 7 Elke lijn in rechthoek $OBFH$ staat loodrecht op lijn AC .
- 8 Het snijpunt heeft coördinaten $(0, t, 3)$ voor zekere waarde van t .
- 9 De inhoud van een piramide waarvan de oppervlakte van het grondvlak G is en de bijbehorende hoogte h is $\frac{1}{3}G \cdot h$. Een bewijs hiervan vind je in deel 2 van 6vwo wiskunde b.
- 10 N is van de vorm $(3 + t, 6 + t, 6 + t)$.
- 11 Een normaalvector van vlak ACH vind je door eerst een vergelijking te geven.
- 12 Bereken met het inproduct eerst $\cos(\alpha)$; de oppervlakte kun je dan berekenen met $OA \cdot OB \cdot \sin(\alpha)$.
- 13 Gebruik het inproduct.
- 14 De inhoud van een piramide is $\frac{1}{3} \cdot \text{oppervlakte grondvlak} \cdot \text{hoogte}$.
- 15 Je kunt de situatie vertalen naar kubus $AABCD.EFGH$: M is het midden van DH , het eerste stuk van de leuning is AM
Of gebruik vectoren.
- 16 De inhoud van een piramide met oppervlakte van het grondvlak G en bijbehorende hoogte h is $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.
- 17 Bepaal het punt van de snijlijn dat in het grondvlak ligt.

d

determinant 51, 65
determinant in dimensie 3 54, 66

g

georiënteerde oppervlakte 51, 65

h

hoek van een lijn met een vlak 64
hoek van twee lijnen 13, 62
hoek van twee vlakken 64

i

inproduct van twee vectoren 15, 63

k

kentallen 6
kruisende lijnen 62
kurkentrekkerregel 46

l

lineaire afbeelding 55

n

negatief georiënteerd 51, 65, 66
negatief geörienteerd 46
normaal 19, 63
normaalvector 19
normaalvector van een vlak 63

p

parallellepipedum opgespannen door 54
parallellogram opgespannen door 49, 65
parameter 7
parametervoorstelling 7, 62
parametervoorstelling van een vlak 62
positief georiënteerd 51, 54, 65, 66
positief geörienteerd 46

r

richtingsvector 7
roosterdriehoek 51

s

standhoek 35

u

uitproduct van twee vectoren 44, 59, 67

v

vector 6
vectorvoorstelling 7, 62
vectorvoorstelling van een vlak 62
vlak 6