vwo wiskunde d

Poisson verdeling

de Wageningse Methode

Copyright © 2019 Stichting de Wageningse Methode
Auteurs Leon van den Broek †, Ton Geurtz, Maris van Haandel, Erik van Haren, Dolf van den Hombergh, Peter Kop, Henk Reuling, Daan van Smaalen
Homepage www.wageningse-methode.nl
ISBN xxx
Illustraties Wilson Design Uden
Distributie Iddink Voortgezet Onderwijs BV, Postbus 14, 6710 BA Ede

Inhoudsopgave

Dit hoofdstuk behandelt het onderwerp Poisson verdeling.
Het behoort tot de kansrekening van het vak 456 vwo wiskunde d.
De stof van de hoofdstukken 1. Combinatoriek en Rekenregels en 2.Binomiale en normale verdelingen wordt bekend verondersteld.

In dit boek worden iconen gebruikt. De blauwe iconen geven de structuur van een paragraaf aan. Hierdoor zie je direct waar bijvoorbeeld een stuk theorie wordt behandeld of waar een historische wetenswaardigheid de revue passeert. De groene iconen vertellen je iets over een specifieke opgave, bijvoorbeeld dat de opgave lastig is of dat er een werkblad bij de opgave hoort. Een overzicht van de gebruikte iconen vind je op de volgende pagina.

Tijdens het ontwikkelen van dit boek is op 8 december 2013 geheel onverwacht onze zeer gewaardeerde vriend Leon van den Broek overleden. Leon zette zich op ongekende wijze in voor motiverend en activerend wiskundeonderwijs. Hij was wars van het aanleren van onbegrepen routines. Leon wilde dat leerlingen de schoonheid van wiskunde gingen zien en beleven — wiskunde als een onuitputtelijke bron van interessante onderwerpen en prachtige problemen. Actief met wiskunde bezig zijn — zelf ontdekken en inzichtelijk leren — stond daarbij voor Leon centraal. Het was zijn overtuiging dat wiskunde op die manier een goed te begrijpen vak wordt en dat het leerproces dat de leerlingen doormaken hen blijvend vormt.

Het wegvallen van Leon betekent een zeer groot gemis voor de Wageningse Methode: hij was de geestelijk vader en drijvende kracht. We zijn Leon zeer dankbaar voor zijn uitzonderlijke inzet voor de Wageningse Methode en het wiskundeonderwijs. We zullen zijn creativiteit, gedrevenheid, idealisme en inspiratie enorm missen.

De auteurs van de Wageningse Methode

Deze versie is van 13 juni 2019.

Overzicht iconen . . .

Theorie
Hier wordt iets benadrukt, samengevat of nader toegelicht. Lees de theorie goed door en stel vragen als je iets niet begrijpt. Theorie die je moet kennen, staat in rode letters. Belangrijke woorden zijn vetgedrukt. Je vindt deze woorden terug in de index achterin het boek.

Voorbeeld
In een voorbeeld zie je hoe de theorie gebruikt wordt om een vraag op te lossen. Zorg dat je het voorbeeld kunt volgen en stel vragen als je het voorbeeld niet begrijpt.

Opmerking
Let op, er wordt iets opmerkelijks behandeld of je wordt ergens op geattendeerd. Een opmerking bestudeer je aandachtig, maar hoef je niet te leren.

Historie
Hier vind je historische feiten en wetenswaardigheden.

Werkblad
Bij deze opgaven hoort een werkblad. Je vindt het werkblad op de site www.wageningse-methode.nl.

Computer
Bij deze opgaven of uitleg maak je gebruik van de computer en/of de digitale versie van de Wageningse Methode.

Echt, moet kunnen
Deze opgaven zijn standaardopgaven die je zonder veel moeite op moet kunnen lossen.

Puzzelen
Bij deze opgaven moet je even puzzelen. Geef niet te snel op.

Pittig
Deze opgaven zijn wat moeilijker.

Hint
Er wordt een hint gegeven die je kan helpen bij het oplossen van de opgave. Je vindt de hints achterin het boek.

Facultatief
Deze opgaven/paragraaf kun je overslaan zonder de draad kwijt te raken.


bus

Een winkel heeft gemiddeld per uur 10 klanten. Wat is de kans dat in de komende vijf minuten geen klant komt?

Dit is een voor de handliggende vraag. Met de kansrekening die je tot nu toe geleerd hebt kun je deze vraag niet beantwoorden. We gaan proberen grip te krijgen op deze vraag. We nemen aan dat de klanten onafhankelijk van elkaar in de winkel komen. Ook nemen we aan dat elk moment van binnenkomst voor elk van de klanten even waarschijnlijk.

1 We nummeren de tien klanten die gemiddeld per uur in de winkel komen: $1, 2, ..., 10$; bijvoorbeeld op volgorde van lichaamslengte (de kleinste krijgt nummer 1), of op grond van iets anders dat niets met hun aankomsttijden te maken heeft.

a Wat is de kans dat klant nummer 1 niet in de komende vijf minuten arriveert?
b Wat is de kans dat klant nummer 5 niet in de komende vijf minuten arriveert?
c Wat is de kans dat geen van de tien klanten in de komende vijf minuten arriveren?

Zijn we nu klaar? Misschien denk je dat hiermee de vraag beantwoord is. Maar er was gegeven dat er gemiddeld tien klanten per uur zouden komen. Dat is iets anders dan dat er elk uur precies tien klanten komen. En waarom kijken we per uur. Je zou het gegeven ook kunnen vervangen door: "Er komen gemiddeld twintig klanten per twee uur".

2 Ga uit van 20 klanten per twee uur.

a Bereken de kans op geen klanten in de komende vijf minuten.
b Vergelijk je antwoord met dat van de vorige opgave.

Je antwoorden zijn niet gelijk, maar verschillen ook weer niet zo heel veel.

3 Neem aan dat er (precies) tien klanten per uur komen.

a Bereken de kans op precies één klant in de komende vijf minuten.
b Bereken ook de kans op precies twee klanten de komende vijf minuten.

Onder de aanname dat er (precies) tien klanten per uur komen, is het aantal klanten in de komende vijf minuten binomiaal verdeeld met parameters $n = 100$ en "succes"- kans $p = \frac{1}{12}$.
Dat is een goede reden om nog eens naar de binomiale verdeling te kijken, en wel zonder GR.

Gegeven: er zullen onafhankelijk van elkaar 10 klanten komen tussen 14:00 en 15:00 uur. We gaan zonder GR de kans berekenen dat 3 van de 10 klanten tussen 14:15 en 14:30 uur komen. Zodoende wordt de theorie nog eens duidelijk.

4 Het aantal klanten dat tussen 14:15 en 14:30 uur arriveert is een typisch voorbeeld van een binomiaal verdeelde stochast.
Eén deelexperimentje dat hier speelt is: een klant komt in de winkel. Die komt tussen 14:15 en 14:30 uur met kans $\frac{1}{4}$: de zogenaamde succeskans, meestal p geheten.
Er zijn 10 klanten: het experiment wordt dus 10 keer herhaald: $n = 10$. Het aantal klanten dat tussen 14:15 en 14:30 uur komt noemen we X.

a Welke waarden kan X aannemen?

We nummeren de klanten $1, 2, \ldots, 10$.

b Wat is de kans dat klant 2, 6 en 9 tussen 14:15 en 14:30 uur komen en alle andere niet?

Deze mogelijkheid noteren we met: NJNNNJNNJN.

c Hoeveel rijtjes zijn er met 3 J's en 7 N's?

Al die rijtjes hebben dezelfde kans; die kans heb je in onderdeel **b** berekend.

d Wat is dus P$(X = 3)$, de kans dat er drie klanten tussen 14:15 en 14:30 uur komen?

De afleiding van de binomiale verdeling

In opgave 4 werd gevraagd naar de kans op 3 successen, als het aantal herhalingen $n = 10$ is en de succeskans $p = \frac{1}{4}$.
De kans op één speciaal rijtje met 3 successen (en dus 7 mislukkingen) is $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7$.
Er zijn $\binom{10}{3}$ van zulke rijtjes. Dus is de kans op 3 successen is $\binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7$.

5 Jan zit in een klas van 25 leerlingen.

a Bereken zonder gebruik te maken van de GR de kans dat er precies twee klasgenoten zijn die in dezelfde week jarig zijn als Jan. Je kunt aan het eind wel een gewoon rekenmachientje gebruiken.

b Controleer je antwoord op de GR.

6 Een vliegtuig heeft 200 zitplaatsen. Van de geboekte vluchten komt 5% van de passagiers niet opdagen. Daarom verkoopt de maatschappij niet 200 maar 204 zitplaatsen.

a Bereken zonder GR de kans dat er precies één zitplaats te weinig zal blijken te zijn.

b Controleer die kans op de GR.

Algemeen

Laat X het aantal successen zijn bij een binomiaal kansexperiment met n herhalingen, elk met succeskans p, dan is $\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$.

7 **a** De formule laat zich vereenvoudigen in het geval $p=\frac{1}{2}$. Hoe?

b Welke afspraak moet je maken voor 0^0 om de formule ook te laten gelden in het geval $p=0$?

In de binomiale verdeling spelen de combinatiegetallen $\binom{n}{k}$ een belangrijke rol.
Dat doen ze ook in het **Binomium van Newton**. Daarom worden ze ook wel **binomiaalcoëfficiënten** genoemd.
In Hoofdstuk 2 *Binomiale en normale verdelingen*, paragraaf 3, is de binomiumformule van Newton afgeleid.

Het binomium van Newton

Voor alle getallen x en y en positieve gehele getallen n geldt:

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}.$$

De formule is genoemd naar Isaac Newton, ofschoon hij hem niet heeft uitgevonden. De formule was toen al minstens vijf eeuwen bekend (bij Arabische en Chinese wiskundigen). Newton heeft de formule gegeneraliseerd voor niet-gehele exponenten.
$x+y$ is een tweeterm, ofwel een binomium (latijn: bi = twee, nomus = term).

Sir Isaac Newton
(1642-1727)
hoogleraar te Cambridge

In Appendix B bij dit hoofdstuk wordt het binomium van Newton op nog andere manieren afgeleid.

8 Gegeven $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

a Hoe ziet de formule eruit in de gevallen $n = 1$ en $n = 2$?

b Leg uit dat uit het binomium van Newton volgt:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$$

Neem $y = 1 - x$.

c Wat is de uitkomst van:

$$\binom{n}{0} \cdot x^0 \cdot (1-x)^n + \binom{n}{1} \cdot x^1 \cdot (1-x)^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n} \cdot x^n \cdot (1-x)^0 ?$$

d Wat betekent het voorgaande in termen van een binomiaal kansexperiment?

De vraag waarmee we deze paragraaf begonnen is van het volgende type:
gegeven een gemiddeld aantal per tijdseenheid, gevraagd de kans op een zeker aantal tijdens een tijdsinterval.
Dit type komt vaak voor. Bijvoorbeeld:

- het aantal brandmeldingen op een dag als er gemiddeld 523 zijn per jaar;
- het aantal telefoontjes dat de belastingdienst in een uur krijgt als er gemiddeld 444 per dag binnenkomen;
- het aantal dodelijke ongevallen van fietsers op een dag als er gemiddeld 120 per jaar zijn;
- het aantal typfouten op een bladzijde, als er gemiddeld 292 zijn in een boek van 400 bladzijden.

9 Verzin zelf ook twee (heel) andere voorbeelden van dit type.

"Al onze medewerkers zijn in gesprek; u wordt zo spoedig mogelijk geholpen."
Wachten is irritant en meestal tijdverspilling. In totaal wacht een mens een heel jaar van zijn leven: op de bus, op een telefoontje, in de file, voor het verkeerslicht, voor de kassa, op de krant, op het weekend, bij een telefonische hulpdienst.
Geen wonder dat wachten een hot item is in de moderne maatschappij.
Wachttijdtheorie is een onderdeel van de kansrekening.
Centrale vragen daarin zijn:
- als er gemiddeld vijf klanten per uur komen, hoeveel mag je er dan in het komende kwartier verwachten?
- als je gemiddeld 20 minuten moet wachten op een lift, hoe groot is dan de kans dat je meer dan 1 uur op een lift moet wachten.
- hoeveel kassa's moeten er zijn om de wachttijd minder dan 5 minuten te houden?

9.2 De Poissonverdeling

Stel dat er in een winkel gemiddeld 10 klanten per uur komen. Wat is dan de kans dat er in het komende kwartier precies 3 klanten komen.
Dit is het centrale thema van deze paragraaf. Wij gaan die kans precies berekenen.

10

a Waarom is het belangrijk voor de winkelier (bedrijfsleiding) om te weten wat de kans is op 3 klanten in een kwartier?

b Hoe groot schat jij de kans op 3 klanten in een kwartier als er gemiddeld 10 per uur komen? Het gaat erom of je een idee hebt; je kunt natuurlijk onmogelijk zomaar die kans berekenen.

11

Stel dat je weet dat er komend uur precies 10 klanten komen. (Hoe je dat te weten bent gekomen doet er nu even niet toe.) Maar je hebt geen idee wanneer ze in die periode van een uur zullen komen: elk moment is voor elk van de klanten even waarschijnlijk. Ze komen onafhankelijk van elkaar.

a Wat betekent het dat ze onafhankelijk van elkaar komen?

b Wat is de kans dat er 8 in het eerste halfuur komen en de andere 2 in het tweede halfuur?

Stel dat de winkelier geen personeel heeft en stel dat elke klant precies 5 minuten nodig heeft om geholpen te worden.

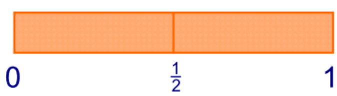
c Hoe groot schat jij de kans dat geen enkele klant hoeft te wachten? Licht je antwoord toe.

Sommige winkels proberen de wachttijden bewust klein te houden. Door deze service willen ze klanten winnen en vasthouden. Het is duidelijk dat het kunnen inschatten van wachttijden voor deze winkels erg belangrijk is. In dit hoofdstuk willen we zicht krijgen op deze problematiek.

We bekijken een periode van 1 uur als geheel en opgesplitst in twee periodes van $\frac{1}{2}$ uur.
$\mathrm{P}_1(n)$ is de kans op precies n klanten in dat uur,
$\mathrm{P}_{\frac{1}{2}}(n)$ is de kans op n klanten in een halfuur,

12

Er geldt $\mathrm{P}_1(0) = \left(\mathrm{P}_{\frac{1}{2}}(0)\right)^2$.



Immers, de kans op 0 klanten in een uur = de kans op 0 klanten in het eerste half uur én 0 klanten in het tweede half uur = de kans op 0 klanten in het eerste half uur × de kans op 0 klanten in het tweede half uur.

a Druk zo ook $\mathrm{P}_1(1)$ uit in $\mathrm{P}_{\frac{1}{2}}(0)$ en $\mathrm{P}_{\frac{1}{2}}(1)$.

b Druk $P_1(3)$ uit in $P_{\frac{1}{2}}(0)$, $P_{\frac{1}{2}}(1)$, $P_{\frac{1}{2}}(2)$ en $P_{\frac{1}{2}}(3)$.

Als er 7 klanten in het eerste halfuur komen én 0 in het tweede halfuur, dan komen er 7 klanten in het hele uur én die 0 komen allemaal in de eerste helft van dat uur. Dit vertalen we in kansen:
$P_{\frac{1}{2}}(7) \cdot P_{\frac{1}{2}}(0) = P_1(7) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7$.

13 Gebruik in de volgende vraag een soortgelijke redenering.

a Neem over en vul het passende in: $P_{\frac{1}{2}}(6) \cdot P_{\frac{1}{2}}(1) = P_1(7) \cdot ....$

Uit $P_{\frac{1}{2}}(7) \cdot P_{\frac{1}{2}}(0) = P_1(7) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7$ en $P_{\frac{1}{2}}(6) \cdot P_{\frac{1}{2}}(1) = P_1(7) \cdot 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7$ volgt:

$P_{\frac{1}{2}}(7) = \frac{1}{7} \cdot \frac{P_{\frac{1}{2}}(1)}{P_{\frac{1}{2}}(0)} \cdot P_{\frac{1}{2}}(6)$.

b Laat dat zien.

Hint 1.

c Druk zo ook $P_{\frac{1}{2}}(n)$ uit in $P_{\frac{1}{2}}(n-1)$.

d Controleer of de formule uit onderdeel **c** klopt voor het geval $n = 1$.

Als we $P_{\frac{1}{2}}(0)$ en $P_{\frac{1}{2}}(1)$ zouden kennen, zouden we alle kansen P½(n) kennen.
Het gaat niet zo zeer om de kansen $P_{\frac{1}{2}}(0)$ en $P_{\frac{1}{2}}(1)$ zelf, maar om hun verhouding $\frac{P_{\frac{1}{2}}(1)}{P_{\frac{1}{2}}(0)}$. Die verhouding noemen we λ.

Uit opgave 13**c** volgt dan: $P_{\frac{1}{2}}(n) = \frac{\lambda}{n} \cdot P_{\frac{1}{2}}(n-1)$.

We noteren $\frac{P_{\frac{1}{2}}(1)}{P_{\frac{1}{2}}(0)} = \lambda$.

Dan $P_{\frac{1}{2}}(n) = \frac{\lambda}{n} \cdot P_{\frac{1}{2}}(n-1)$, $n = 1, 2, 3, ...$

Dus: $P_{\frac{1}{2}}(n) = \frac{\lambda^n}{n!} \cdot P_{\frac{1}{2}}(0)$.

Dit laatste bewijzen we in de volgende opgave.

14 **a** Druk achtereenvolgens $P_{\frac{1}{2}}(1)$, $P_{\frac{1}{2}}(2)$, $P_{\frac{1}{2}}(3)$, $P_{\frac{1}{2}}(4)$ en $P_{\frac{1}{2}}(5)$ uit in $P_{\frac{1}{2}}(0)$ en λ.

b Geef een formule voor $P_{\frac{1}{2}}(n)$, uitgedrukt in λ en $P_{\frac{1}{2}}(0)$.

Als je $P_{\frac{1}{2}}(0)$ zou kennen, zou je λ kunnen uitrekenen (en omgekeerd, want de som van alle kansen $P_{\frac{1}{2}}(n)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ is 1.
Daarvoor moet je wel oneindig veel kansen optellen en dat is geen sinecure.
Dus: $P_{\frac{1}{2}}(0) + P_{\frac{1}{2}}(1) + P_{\frac{1}{2}}(2) + \ldots = 1$, in de $\sum$-notatie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{\frac{1}{2}}(n) = 1.$$

In Appendix A wordt uitgelegd dat $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda}$.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda}$, dus: $e^{\lambda} \cdot P_{\frac{1}{2}}(0) = 1$

15 Neem $P_{\frac{1}{2}}(0) = 0{,}1$; dan is er dus 10% kans dat er in een half uur geen klanten komen in de winkel.

a Bereken λ exact en geef een benadering in vie decimalen.

b Druk algemeen λ uit in $P_{\frac{1}{2}}(0)$.

Een voorval, bijvoorbeeld een klant komt binnen, kan optreden of niet. We nemen aan dat de voorvallen onafhankelijk van elkaar optreden. We tellen het aantal keer dat een voorval optreedt in een zekere tijdsperiode. Dat aantal noemen we X.
De verhouding $\dfrac{\text{kans op 1 voorval}}{\text{kans op 0 voorvallen}}$ noemen we λ.
Dan is de kans op k voorvallen in die tijdsperiode $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ voor $k = 0, 1, 2, \ldots$.
We zeggen dat X **Poissonverdeeld** is met **parameter λ**.

16 We gaan de verwachtingswaarde van een Poissonverdeelde stochast X met parameter λ uitrekenen.
Die verwachtingswaarde is per definitie:

$$P(X = 0) \cdot 0 + P(X = 1) \cdot 1 + P(X = 2) \cdot 2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) \cdot k$$

Toon aan: $E(X) = \lambda \cdot e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \dfrac{\lambda^2}{2!} + \dfrac{\lambda^3}{3!} + \dfrac{\lambda^4}{4!} + \ldots\right) = \lambda$.

X is het aantal keer dat een voorval optreedt in een zekere tijdsperiode. De voorvallen treden onafhankelijk van elkaar op.
Zeg dat het voorval gemiddeld λ keer in de tijdsperiode optreedt (dat is dus de verwachtingswaarde). Dan is X **Poissonverdeeld** met **parameter λ** en $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ voor $k = 0, 1, 2, \ldots$.

17 Neem aan: het aantal klanten per uur is X en heeft parameter λ. Noem het aantal klanten per half uur Y. Dan heeft Y parameter $\frac{1}{2}\lambda$.
In opgave 12**a** hebben we gezien: $P(X = 0) = P(Y = 0)^2$, zonder de kansen van de Poissonverdeling te gebruiken.

a Controleer dat de gelijkheid geldt met de Poissonkansen $P(X = 0)$ en $P(Y = 0)$.

In opgave 12**b** heb je gezien dat $P(X = 1) = 2 \cdot P(Y = 0) \cdot P(Y = 1)$, zonder de kansen van de Poissonverdeling te gebruiken.

b Controleer dat de gelijkheid geldt met de Poissonkansen $P(X = 0)$, $P(Y = 0)$, en $P(Y = 1)$.

Terugblik
We zijn geïnteresseerd in de kansverdeling van het aantal voorvallen in een uur als er gemiddeld λ voorvallen per uur plaatsvinden.
We nemen aan dat de voorvallen onafhankelijk van elkaar plaatsvinden.
We hebben gezien:

- Het aantal voorvallen per uur hangt samen met het aantal voorvallen per half uur.
- De kans op 7 voorvallen in een uur gelijk is aan $\frac{1}{7} \cdot \lambda \cdot$ de kans op 6 voorvallen in een uur, enzovoort.
- De kans op 7 voorvallen in een uur is $\frac{1}{7!} \cdot \lambda \cdot$de kans op 0 voorvallen in een uur.
- Omdat alle kansen samen 1 zijn, kon de kans op 0 voorvallen in een uur worden uitgerekend: die is $e^{-\lambda}$.

Als er per uur gemiddeld 24 klanten (onafhankelijk van elkaar) in een winkel komen, komen er natuurlijk gemiddeld 12 klanten per half uur.
Daar zal niemand aan twijfelen. Dat kun je ook formeel bewijzen. Als volgt.
Het aantal klanten X dat in een uur komt is Poissonverdeeld met parameter $\lambda = 24$.
Het aantal klanten Y in een halfuur is ook Poissonverdeeld. We gaan bewijzen: de parameter van Y is 12 is.

Splits een uur op in twee halve uren. Het aantal klanten in het eerste halfuur noemen we Y_1 en in het tweede halfuur Y_2. Dan $X = Y_1 + Y_2$; dus $\text{E}(X) = \text{E}(Y_1) + \text{E}(Y_2)$. Omdat $\text{E}(Y_1) = \text{E}(Y_2)$, volgt hieruit dat $\text{E}(Y) = \text{E}(Y_1) = \text{E}(Y_2) = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$ en dat is de parameter.

Neem aan dat het aantal klanten in 1 uur Poissonverdeeld is met gemiddelde λ.
Dan is het aantal klanten in t uur Poissonverdeeld met gemiddelde $t \cdot \lambda$.

18 In een jaar komen er gemiddeld 123 brandmeldingen voor in een zekere stad.

a Bereken de kans dat er morgen precies twee brandmeldingen zijn.

Er vallen in Nederland jaarlijks gemiddeld 810 fietsdoden in het verkeer.

b Bereken de kans dat er morgen drie fietsdoden vallen.

Je kunt de kansen uit de voorgaande onderdelen ook rechtstreeks op de GR berekenen.

c Zoek uit hoe dat op jouw machine gaat.

Op de GR kun je niet alleen de kans op drie fietsdoden morgen rechtstreeks berekenen maar ook de kans op hoogstens drie fietsdoden.
De eerste kans noteren we met $\text{P}_{\text{Poisson}}(X = 3, \lambda = 2{,}2191...)$ en de tweede met $\text{P}_{\text{Poisson}}(X \leq 3, \lambda = 2{,}2191...)$.
Zie opgave 18**b**

19 Gemiddeld worden er elke dag in Nederland 496 baby's geboren.

a Bereken de kans dat er morgen niet meer dan 450 baby's geboren worden in Nederland.

Er vallen in Nederland jaarlijks gemiddeld 810 fietsdoden in het verkeer.

b Bereken de kans dat er in een jaar minder dan 800 fietsdoden vallen in het verkeer.

Gegeven zijn twee Poissonverdeelde stochasten X en Y met parameters λ en μ, onafhankelijk van elkaar.
Dan is $X + Y$ Poissonverdeeld met parameter $\lambda + \mu$.

We bewijzen bovenstaande in de volgende opgave.

20 Gegeven zijn twee Poissonverdeelde stochasten X en Y met parameters λ en μ, onafhankelijk van elkaar.

Er geldt: $\text{P}(X+Y=10)=\sum_{k=0}^{10}\text{P}(X=k)\cdot\text{P}(Y=10-k)=$
$\text{P}(X=0)\cdot\text{P}(Y=10)+\text{P}(X=1)\cdot\text{P}(Y=9)+\ldots$
$+\text{P}(X=10)\cdot\text{P}(Y=0)$.

a Ga dat na en druk $\text{P}(X+Y=10)$ uit in λ en μ.

b Ga na dat in het vorige onderdeel bewezen is dat $\text{P}(X+Y=10)$ de kans op de uitkomst 10 is op een Poissonverdeelde stochast met parameter λ + μ.

21 Twee winkels A en B zijn elkaars concurrenten. De aantallen klanten X en Y die deze per uur krijgen zijn Poissonverdeeld met gemiddelden respectievelijk 1 en 2.

Een klant gaat naar een van de twee winkels.

a Wat is, denk je, de kans dat hij naar de eerste winkel gaat?

Waarschijnlijk heb je bij onderdeel **a** intuïtief de juiste kans gegeven. We gaan die kans berekenen. Bedenk dat:
P(de winkelskrijgen samen 1 klant) · P(die klant gaat naar A) =
P(A krijgt 1 klant en B krijgt geen klant) =
P(A krijgt 1 klant) · P(B krijgt geen klant).

b Schrijf de drie Poissonkansen op:
P(de winkels krijgen samen 1 klant in een uur),
P(A krijgt 1 klant in een uur),
P(B krijgt 0 klanten in een uur)

c Bereken hieruit P(de ene klant gaat naar winkel A).
Had je in onderdeel **a** dit antwoord?

Stel je weet dat er in totaal 7 klanten naar de winkels gaan, maar je weet van geen van de klanten in welk van de twee winkels ze binnen zullen gaan.

d Bereken de kans dat er 3 naar de eerste winkel gaan (en dus 4 naar de tweede).

Twee winkels zijn elkaars concurrenten. De aantallen klanten X en Y die deze per uur krijgen zijn Poissonverdeeld met gemiddelden respectievelijk λ en μ.
Stel je weet dat er in totaal Y klanten naar de winkels gaan, maar je weet van geen van de klanten naar welke van de twee winkels ze gaan.
Dan is het aantal klanten dat naar de eerste winkel gaat binomiaal verdeeld met n herhalingen en succeskans $\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

Opmerking
Speciaal bij zeldzame gebeurtenissen speelt de Poissonverdeling een belangrijke rol.

In de volgende opgave hebben we nog een andere eigenschap van de exponentiële functie met grondtal e nodig. Deze wordt bewezen in appendix C.

$\mathrm{e}^x \approx \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ en dit klopt beter naarmate n groter wordt:
$\lim\limits_{n \to \infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$.

22 Een zekere ziekte is zeer zeldzaam: één op de honderdduizend mensen heeft haar. De kans dat iemand de ziekte heeft is dus $0{,}00001$. De ziekte is niet overdraagbaar en ook niet erfelijk bepaald. We mogen het hebben-van-de-ziekte voor een individu dus onafhankelijk beschouwen van het al dan niet hebben-van-de-ziekte van andere personen.

Er zijn 800 duizend Amsterdammers. Het aantal Amsterdammers dat de ziekte heeft noemen we X.

a Wat is de verwachtingswaarde van X?

Elke Amsterdammer heeft kans $0{,}00001$ om de ziekte te hebben, onafhankelijk van zijn stadsgenoten. Dus X is binomiaal verdeeld met parameters $n = 800\,000$ en $p = 0{,}00001$.

b Bereken $\mathrm{P}(X = 6)$.

We bekijken nu de Poissonverdeelde stochast Y met parameter $\lambda = 8$.

c Bereken $\mathrm{P}(Y = 6)$.

Als het goed is, heb je in **b** en **c** (nagenoeg) hetzelfde antwoord gekregen. In het vervolg gaan we na waarom dat zo is.

$\mathrm{P}(X = 6) = \binom{800\,000}{6} 0{,}00001^6 \cdot 0{,}99999^{799\,994}$.

d Ga na: $\binom{800\,000}{6} \cdot 0{,}00001^6 \approx \frac{8^6}{6!}$.

e Ga na: $0{,}99999^{799\,994} \approx 0{,}99999^{800\,000} \approx \mathrm{e}^{-8}$.

Hint 2.

f Toon aan dat uit het voorgaande volgt dat $\mathrm{P}(X = 6)$ en $\mathrm{P}(Y = 6)$ nagenoeg gelijk zijn.

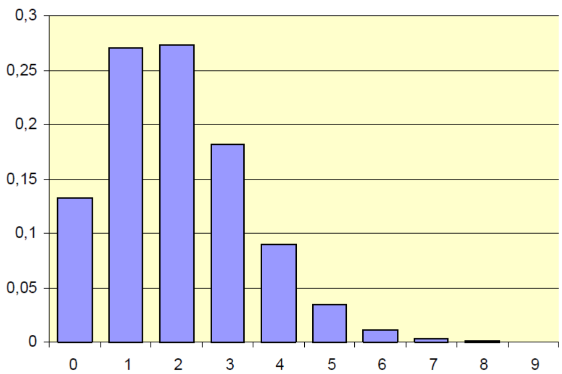
X is binomiaal verdeeld met parameters n en p, waarbij p klein en n groot is,

9.2 De Poissonverdeling

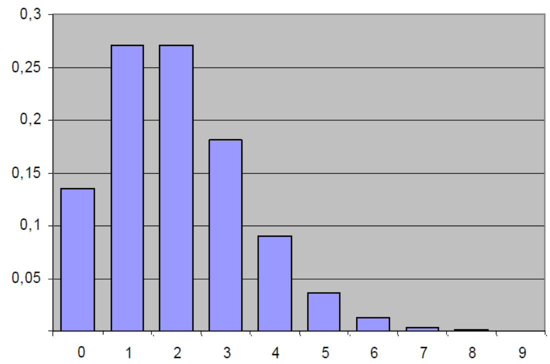
Y is Poissonverdeeld met parameter $\lambda = p \cdot n$. Dan zijn $\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ en $\mathrm{P}(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ nagenoeg gelijk.
Dus hebben X en Y nagenoeg dezelfde kansverdeling.

Opmerking
Rekenmachines hebben een beperkt rekendomein. Op sommige machines moet de parameter n bij de binomiale verdeling kleiner dan 1 miljoen zijn. Als n groter dan 1 miljoen is (en p klein) brengt de Poissonverdeling uitkomst.

In de figuur hieronder kun je de binomiale verdeling met $p = 0{,}02$ en $n = 100$ vergelijken met de Poissonverdeling met $\lambda = 100 \cdot 0{,}02 = 2$.



Binomiaal



Poisson

In 1837 introduceerde de Franse wiskundige Poisson een benadering van de binomiale kansverdeling. Hij bekeek de al geruime tijd bekende binomiale verdeling voor gevallen waarbij het aantal herhalingen n heel groot is en de succeskans p heel klein. Hij liet zien dat de binomiale kans op k successen $\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ nagenoeg gelijk is aan $\frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ waarin $\lambda = n \cdot p$ de verwachtingswaarde van X is.
Dat is precies wat we in opgave 22 hebben laten zien.
Voor deze verdeling hoef je de kans op succes per kansexperiment niet te weten. Als verwachtingswaarde λ gebruik je het gemiddelde aantal "successen" bij een aantal series van n kansexperimenten.
Poisson besteedde niet meer dan één bladzijde aan zijn ontdekking.

Simeon-Denis Poisson,
1781-1840

De Duitse wiskunde L. von Bortkiewicz was de eerste die het belang van de Poissonverdeling onderkende. Van hem is het volgende voorbeeld afkomstig.
Hij bekeek het aantal doden per jaar onder de Pruisische cavaleristen door een trap van een paard. Er zijn inderdaad veel herhalingen met een zeer kleine "succes"- kans (een dodelijke trap van een paard).

Het veelvuldig optreden van Poissonkansen in het dagelijks leven is niet zo vreemd als je dit voorbeeld bekijkt. In veel praktische situaties is er sprake van een zeer groot aantal uitvoeringen en een zeer kleine (onbekende) succeskans.

Ladislaus von Bortkiewicz, 1868-1931

23 De zeldzame ziekte van de vorige opgave komt voor bij 1 op de 100000 mensen. Nederland telt 17 miljoen mensen.
Bereken de kans dat er in Nederland ten hoogste 185 mensen met de ziekte zijn.

24 Von Bortkiewicz telde in 14 regimenten over 20 jaren (1875 t/m 1894) in totaal 196 doden door een trap van een paard. Hij concludeerde dat per regiment per jaar het aantal door een trap van een paard gedode cavaleristen Poissonverdeeld was met verwachtingswaarde 0,7.
Bereken de kansen dat in een regiment in een jaar 0, 1 en 2 doden vielen door een trap van een paard.

25 De lotto is een kansspel. De speler kruist zes nummers aan uit 1 t/m 45 en kiest een van de zes mogelijke kleuren. De notaris trekt ook zes nummers en een kleur; als die nummers precies hetzelfde zijn aan de zes die de speler koos, en bovendien de kleur hetzelfde is, wint hij de jackpot.

a Ga na dat de kans daarop $\frac{1}{\binom{45}{6}\cdot 6} \approx 2{,}05 \cdot 10^{-8}$ is.

Stel dat er in een week 1 miljoen lottoformulieren worden ingevuld. De jackpot valt als iemand de juiste zes nummers én de juiste kleur heeft gekozen.

b Bereken de kans dat de jackpot in een zekere week niet valt.

Als meer dan een speler alles goed heeft, moeten de gelukkigen de jackpot delen.

c Bereken de kans dat de jackpot moet worden gedeeld.

Voorbeeld

Vraag

Het aantal klanten is Poissonverdeeld met gemiddelde 3 per uur. Wat is de kans dat de eerste klant ten minste $0{,}5$ uur op zich laat wachten?

Berekening

Het aantal klanten per half uur is Poissonverdeeld met gemiddelde $3 \cdot \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$.
De eerste aankomsttijd (in uren) noemen we T; dat is de tijd die het duurt voordat de eerste klant binnenkomt.
$\mathrm{P}\left(T \geq \frac{1}{2}\right) = \mathrm{P}(0 \text{ klanten in de eerste } \frac{1}{2} \text{ uur}) = \mathrm{e}^{-1{,}5} \approx 0{,}2231$.

26 We gaan verder met de context van bovenstaande vraag.

- **a** Bereken de kans dat de eerste klant meer dan $\frac{1}{2}$ uur, maar minder dan $1\frac{1}{2}$ uur op zich laat wachten.
- **b** Bereken de kans dat de derde en vierde klant in het derde kwartier komen.

  Hint 3.

27 Het aantal klanten X is Poissonverdeeld met gemiddelde λ per uur.
T is de tijd die het duurt voordat de eerste klant komt.

- **a** Welke waarden kan T aannemen?
- **b** Is X discreet of continu verdeeld? En T?
- **c** Toon aan: $\mathrm{P}(T \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t}$, voor alle $t > 0$.
- **d** Controleer de formule in onderdeel **c** voor de “randgevallen" $t = 0$ en t nadert tot oneindig.

Als een aantal "successen" X Poissonverdeeld is met gemiddelde λ en T is de tijdsduur dat je op het eerste succes moet wachten, dan $\mathrm{P}(T \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t}$.

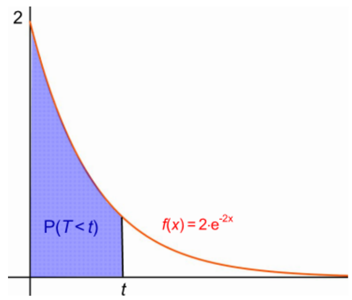
Definitie

Een stochast T heet **exponentieel verdeeld** met **parameter** λ als T alle positieve getallen als waarde kan aannemen en $\mathrm{P}(T \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t}$ voor alle $t > 0$.

28

- **a** Teken de grafiek van de functie $F : t \to 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t}$ als functie van t, voor enkele waarden van λ in één figuur.
- **b** Teken de grafiek van de afgeleide $f = F'$ voor dezelfde waarden van λ, ook in één figuur.
- **c** Ga na: $\mathrm{P}(T \leq t) = \int_0^t f(x)\, \mathrm{d}x$.

Opmerking
Stel dat een winkelier gemiddeld λ klanten per uur krijgt.
De kans dat hij hoogstens t uur hoeft te wachten voordat de eerste klant komt, is dus de oppervlakte onder de grafiek van de functie $f : x \to \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}$.
Iets dergelijks heb je al eerder ontmoet: ook bij een normaalverdeelde stochast X is de kans $P(X \leq t)$ de oppervlakte onder een grafiek, namelijk van de klokkromme.



Definitie
T is exponentieel verdeeld met parameter λ.
Dan noemen we $f : x \to \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ de **dichtheidsfunctie** van T en $F : t \to 1 - e^{-\lambda \cdot t}$ de **verdelingsfunctie**.

Stelling
Er geldt: $P(T \leq t) = F(t)$ is de oppervlakte onder de grafiek van f 'links' van t.

29 Study probeert elke vrijdagavond een lift te krijgen om het weekend bij haar ouders door te brengen. De helft van de keren duurt het minder dan 30 minuten voordat ze een lift krijgt.
- **a** Wat is de kans dat ze op een vrijdag binnen 5 minuten een lift krijgt?
- **b** En wat is de kans dat ze na 1 uur nog geen lift heeft?

30 Op een vrijdagavond heeft Study zonder succes al 40 minuten staan liften. Ze zegt bij zichzelf: "Ik sta hier nu al veertig minuten, terwijl ik gemiddeld niet meer dan een half uur op een lift hoef te wachten. Ik zal nu dus wel snel een lift krijgen."
Geef commentaar op Study's gedachte.

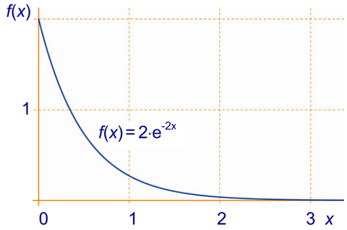
Opmerking
De exponentiële verdeling heeft geen geheugen. Dat betekent het volgende.
Als je al bijvoorbeeld 10 minuten (zonder succes) hebt staan liften, wordt de kans dat je een lift krijgt daar niet groter (of kleiner) door.

31 Choice speelt *Mens erger je niet*. Ze heeft op het ogenblik geen enkele pion op het speelbord. Pas als ze "een zes" (dat is 6 ogen) gegooid heeft, mag ze een pion op het bord zetten. De eerste vijf keer dat ze aan de beurt is, werpt ze 2, 2, 1, 4 en 5 ogen.
- **a** Wat is de kans dat ze in de volgende beurt 6 ogen werpt?
- **b** Heeft de dobbelsteen een geheugen?

We zeggen dat een stochast X **geen geheugen** heeft, als $\mathrm{P}(X > a + b) = \mathrm{P}(X > a) \cdot \mathrm{P}(X > b)$ voor alle getallen a en b.

32 Een exponentieel verdeelde stochast heeft geen geheugen. Bewijs dat.

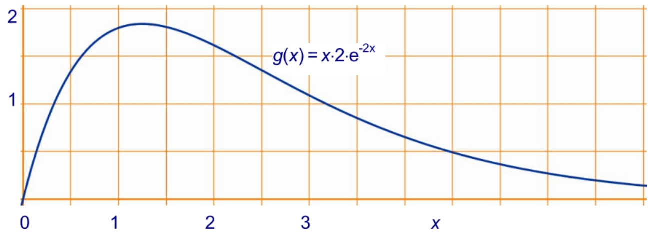
33 Hiernaast staat de grafiek van de dichtheidsfunctie $f : x \to 2 \cdot \mathrm{e}^{-2 \cdot x}$ van een exponentieel verdeelde stochast T met parameter 2.



De verwachtingswaarde van T is: $\displaystyle\int_0^\infty x \cdot f(x)\, \mathrm{d}x$.

In appendix D wordt toegelicht dat je de verwachtingswaarde van de stochast T met dichtheidsfunctie f zo kunt berekenen.

Hieronder staat de grafiek van de functie $x \to x \cdot f(x)$ in een rooster.



a Maak een schatting van $\mathrm{E}(T)$, dat is de oppervlakte onder de grafiek van g.

b Toon aan dat de functie $G : x \to -x \cdot \mathrm{e}^{-2 \cdot x} - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{-2 \cdot x}$ een primitieve functie van g is.

c Bereken $\mathrm{E}(T)$ exact.

d Hoe groot is de verwachtingswaarde van een exponentieel verdeelde stochast met parameter λ?

De verwachtingswaarde van een exponentieel verdeelde stochast met parameter λ is $\frac{1}{\lambda}$.

Opmerking

Hét voorbeeld van een exponentieel verdeelde stochast is de wachttijd.

34 Study gaat weer liften. Gemiddeld stopt er elke tien minuten een auto om een lifter mee te nemen. Als Study op de liftplaats aankomt, staan er al drie anderen te liften, die een voor een een lift moeten krijgen voor dat Study aan de beurt is.

a Wat is de verwachtingswaarde van de wachttijd voor Study?

b Wat is de kans dat Study binnen een half uur een lift heeft?

Voorbeeld
Er komen gemiddeld 4 auto's per uur door een rustige straat.
Je gaat aan de straat staan.
Wat is de kans dat je na 20 minuten twee auto's gezien hebt?

We nemen stilzwijgend aan dat de auto's onafhankelijk van elkaar door de straat komen.
Definieer de stochast X als het aantal auto's dat de eerste 20 minuten voorbij komt. Dan is de stochast X **Poisson verdeeld** met **parameter** $\lambda = \frac{20}{60} \cdot 4 = 1\frac{1}{3}$.

In het algemeen geldt voor een Poissonverdeelde stochast X met parameter λ: $\mathrm{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$.

Dus (in ons voorbeeld): de kans dat je na 20 minuten twee auto's gezien hebt is $\frac{\left(1\frac{1}{3}\right)^2}{2!} \cdot \mathrm{e}^{-1\frac{1}{3}} = 0{,}234....$

Je staat weer aan de rustige straat en vraagt je af hoe groot de kans is dat binnen 10 minuten de eerste auto langskomt.

Als een aantal "successen" X Poissonverdeeld is met gemiddelde λ en T is de tijdsduur dat je op het eerste succes moet wachten, dan $\mathrm{P}(T \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t}$.
Dus in ons voorbeeld is de kans dat binnen 10 minuten de eerste auto langskomt $1 - \mathrm{e}^{-\frac{10}{60} \cdot 4} = 0{,}486....$

Een stochast T heet **exponentiëel verdeeld** met **parameter** λ als T alle positieve getallen als waarde kan aannemen en $\mathrm{P}(T \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t}$ voor alle $t > 0$.

De verwachtingswaarde van een Poissonverdeelde stochast X met parameter λ is λ.
De verwachtingswaarde van een exponentieel verdeelde stochast met parameter λ is $\frac{1}{\lambda}$.

Als X en Y twee Poissonverdeelde stochasten met parameters λ en μ, onafhankelijk van elkaar,
dan is $X + Y$ Poissonverdeeld met parameter $\lambda + \mu$.

Voorbeeld

9.4 Eindpunt

Twee winkels zijn elkaars concurrenten. Neem aan: de aantallen klanten X en Y die deze per uur krijgen zijn Poissonverdeeld met gemiddelden respectievelijk λ en μ.
Stel je weet dat er in totaal n klanten naar de winkels gaan, maar je weet van geen van de klanten naar welke van de twee winkels ze gaan.
Dan is het aantal klanten dat naar de eerste winkel gaat binomiaal verdeeld met n herhalingen en succeskans $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

X is binomiaal verdeeld met parameters n en p, waarbij p klein en n groot is,
Y is Poissonverdeeld met parameter $\lambda = p \cdot n$. Dan zijn $\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ en $\mathrm{P}(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$ nagenoeg gelijk.
Dus hebben X en Y nagenoeg dezelfde kansverdeling.

We zeggen dat een stochast X **geen geheugen** heeft, als $\mathrm{P}(X > a + b) = \mathrm{P}(X > a) \cdot \mathrm{P}(X > b)$ voor alle getallen a en b.

1 Hanny heeft problemen met haar computer en belt een helpdesk. Ze heeft geen geluk, want een vriendelijke stem zegt haar: "Er zijn nog zeven wachtenden voor u".
Veronderstel dat de afhandeltijd per persoon normaal verdeeld is, met gemiddelde 6 minuten en standaardafwijking 1 minuut. We mogen aannemen dat tijden die de hulpbehoevenden in beslag nemen onafhankelijk van elkaar zijn.

a Wat is de verwachte wachttijd voor Hanny?

b Wat is de kans dat Hanny binnen drie kwartier geholpen wordt?

2 Op een gevaarlijk kruispunt vinden regelmatig aanrijdingen plaats. De laatste weken vonden er gemiddeld 5 per week plaats. We nemen aan dat het aantal aanrijdingen Poissonverdeeld is.

a Bereken de kans dat er op een dag geen aanrijdingen plaatsvinden.

In een bepaalde week hebben er twee keer zoveel aanrijdingen plaats gevonden dan gemiddeld.

b Wat is normaal gesproken de kans daarop?

3 Het aantal klanten dat winkel A per uur bezoekt is gemiddeld 20. Voor winkel B is dat 24. De klanten bezoeken de winkels onafhankelijk van elkaar.
We gaan er vanuit dat het aantal klanten voor beide winkels Poissonverdeeld is.

a Bereken de kans dat in de komende 5 minuten geen klanten komen in elk van beide winkels.

b Bereken de kans dat van de eerstvolgende 20 klanten meer dan de helft naar winkel A gaat.

A De e-macht als oneindige som

We gaan bewijzen dat de oneindige som

$\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,$

dus $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ gelijk is aan e^x, voor elk getal x.

1 We spreken af $y_n = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$,

dus $y_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

Bijvoorbeeld: $y_5 = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$.

a Bereken y_5', de afgeleide van y_5.

y_5' en y_5 lijken veel op elkaar. Deze twee functies verschillen slechts één term, namelijk $\frac{x^5}{5!}$.

En als $|x| < 1$ is dat verschil kleiner dan $0{,}01$.

b Ga dat na.

Bekijk de functie $y_{50} = \sum_{k=0}^{50} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{50}}{50!}$.

c Bereken y_{50}'.

y_{50}' en y_{50} lijken veel op elkaar. Deze twee functies verschillen slechts één term, namelijk $\frac{x^{50}}{50!}$.

En als $|x| < 17$ is dat verschil kleiner dan $0{,}0011$.

d Ga dat na.

Bekijk de eindige som $y_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$.

e Wat is het verschil tussen y_n en y_n'?

Voor elk getal x geldt: De noemer $n!$ groeit op den duur (veel) sneller dan de teller x^n.

Daarom wordt het verschil tussen $y_n)^{'}x\big)$ en $y_n(x)$ voor grote waarden van n zo klein als je maar wil.

Voor de oneindige som $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ geldt

dus: $y^{'}(x) = y(x)$.

En die functies kennen we: $y(x) = c \cdot \mathrm{e}^x$, waarbij c een willekeurige constante is.

We moeten nog de waarde van c bepalen. Dat lukt omdat we $y(0)$ kunnen uitrekenen.

f Wat is de waarde van c?

Uit bovenstaande opgave volgt:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

B Het binomium van Newton

In het vervolg bekijken we hoe je $(x+y)^n$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ zonder haakjes schrijft.

Een afleiding met haakjes wegwerken

2 Schrijf $(x+y)^n$ voor $n = 1, 2$ en 3 met zo weinig mogelijk termen zonder haakjes.

Hoe gaat dit verder? Zit er enig systeem in? Wat zal $(x+y)^{10}$ opleveren? We gaan dat op verschillende manieren aanpakken. Eerst bekijken we hoe we de haakjes in $(1+x)^n$ wegwerken.

3 We gaan de haakjes in $(1+x)^7$ wegwerken.
Als je de haakjes wegwerkt, krijg je een veelterm van graad 7, dus een som van de vorm:
$\ldots + \ldots x + \ldots x^2 + \ldots x^3 + \ldots x^4 + \ldots x^5 + \ldots x^6 + \ldots x^7$.
Om hier beter over te kunnen praten geven we de coëfficiënten (de getallen op de puntjes) namen:
$(1+x)^7 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7$.

Je weet waarschijnlijk bij voorbaat wel wat a_0 en a_7 zijn
a Wat zijn die?

Stel dat je de uitwerking van $(1+x)^7$ kent. Dan volgt daaruit de uitwerking van $(1+x)^8$ als volgt.
$(1+x)^8 = (1+x)(1+x)^7 = 1 \cdot (1+x)^7 + x \cdot (1+x)^7 =$
$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + a_4 x^5 + a_5 x^6 + a_6 x^7 + a_7 x^8$.
Dus: $(1+x)^8 = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_1 + a_2)x^2 + (a_2 + a_3)x^3 + (a_3 + a_4)x^4 + (a_4 + a_5)x^5 + (a_5 + a_6)x^6 + (a_6 + a_7)x^7 + a_7 x^8$

Als je dus de coëfficiënten van de uitwerking van $(1+x)^7$ kent, ken je die ook van de uitwerking van $(1+x)^8$: je moet gewoon steeds twee opvolgende coëfficiënten van de uitwerking van $(1+x)^7$ optellen. Om aan de uitwerking van $(1+x)^7$ te komen, moet je het schema op de volgende bladzijde invullen.

1

1 + 1 x

1 + … x + 1 x^2

1 + … x + … x^2 + 1 x^3

1 + … x + … x^2 + … x^3 + 1 x^4

1 + … x + … x^2 + … x^3 + … x^4 + 1 x^5

1 + … x + … x^2 + … x^3 + … x^4 + … x^5 + 1 x^6

1 + … x + … x^2 + … x^3 + … x^4 + … x^5 + … x^6 + 1 x^7

b Vul de coëfficiënten op het werkblad van bovenaf in.

Dit schema is een oude bekende. Met precies hetzelfde schema maak je namelijk de driehoek van Pascal.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Kennelijk is de coëfficiënt van bijvoorbeeld x^5 in de uitwerking van $(1+x)^7$ gelijk aan $\binom{7}{5} = 21$.

c Wat is de coëfficiënt van x^4 in de uitwerking van $(1+x)^{10}$?

Uit bovenstaande volgt:

$$(1+x)^7 = \binom{7}{0}x^0 + \binom{7}{1}x^1 + \binom{7}{2}x^2 + \binom{7}{3}x^3 + \binom{7}{4}x^4 + \binom{7}{5}x^5 + \binom{7}{6}x^6 + \binom{7}{7}x^7.$$

In de Σ-notatie: $(1+x)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} x^k$.

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Opmerking

We hebben nog geen uitwerking voor $(x+y)^n$.
Deze volgt uit de formule hierboven als volgt.

$$(x+y)^n = y^n \cdot \left(1+\frac{x}{y}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^n \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^k =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^n \cdot x^k \cdot y^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}.$$

Een afleiding met differentiëren

4 Bekijk $(1+x)^6 = a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6$.
We gaan linker- en rechterlid vier keer differentiëren. De vierde afgeleide van het linkerlid is $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (1+x)^2$.

a Schrijf de vierde afgeleide van het rechterlid op.

Nu vullen we voor x in beide vierde afgeleides 0 in en vereenvoudigen de uitkomsten.

b Wat zijn die uitkomsten?

Hieruit volgt: $a_4 = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dbinom{6}{4}$.

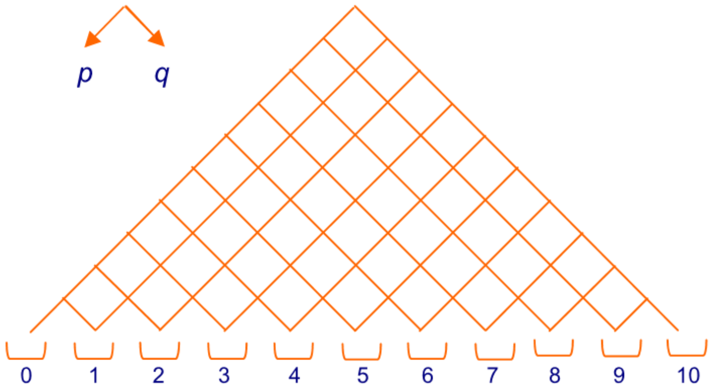
c Ga dat na.

Opmerking

Wat je in opgave 4 gedaan hebt, kun je algemeen uitvoeren. De coëfficiënt van x^k in $(1+x)^n$ vind je door beide leden van $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ k keer te differentiëren en vervolgens voor $x = 0$ in te vullen.

Een afleiding met kansrekening

5 We bekijken het asymmetrische Galtonbord met 10 rijen. Voor een kogeltje is de kans om naar links te vallen p en de kans om naar rechts te vallen $q = 1 - p$. We nummeren de bakjes van links naar rechts: 0, 1, 2, ..., 10.



a Wat is de kans dat een kogeltje in bakje met nummer k terecht komt?

b Leg uit: $1 = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} p^k \cdot q^{10-k}$.

Als je beide leden van de formule in onderdeel **b** vermenigvuldigt met a^{10} krijg je:

$$a^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (ap)^k \cdot (aq)^{10-k}.$$

c Leg dat uit.

Vervang ap door x en aq door y. Dan krijg je :

$$(x+y)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^k \cdot y^{10-k}.$$

d Leg dat uit.

Voor alle getallen x en y en alle positieve gehele getallen n geldt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}.$$

Deze formule staat bekend als het **binomium van Newton**.

$x + y$ is een tweeterm (binomus); vandaar de naam.

6 **a** Schrijf $(x+2)^5$ zonder haakjes, zo eenvoudig mogelijk.

b Laat met het binomium van Newton zien dat $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Wachten

1

a $\frac{11}{12}$
b $\frac{11}{12}$
c $\left(\frac{11}{12}\right)^{10} \approx 0{,}4189$

2

a $\left(\frac{23}{24}\right)^{20} \approx 0{,}4269$
b Die verschillen (een beetje).

3

a $\mathrm{P}\left(X = 1, n = 10, p = \frac{1}{12}\right) = 10 \cdot \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{9} \approx 0{,}3808$
b $\mathrm{P}\left(X = 2, n = 10, p = \frac{1}{12}\right) = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^{2} \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{8} \approx 0{,}1558$

4

a $0, 1, 2, \ldots, 10$
b $\left(\frac{1}{4}\right)^{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{7}$
c $\binom{10}{3}$
d $\binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{7} \approx 0{,}250$

5

a Het aantal klasgenoten van Jan dat in dezelfde week jarig is, is binomiaal verdeeld met $p = \frac{1}{52}$ en $n = 24$.
De gevraagde kans is dus $\binom{24}{2} \cdot \left(\frac{1}{52}\right)^{2} \cdot \left(\frac{51}{52}\right)^{22} \approx 0{,}0666$.
b -

6

a Het aantal reizigers dat niet komt opdagen, is binomiaal verdeeld met $p = 0{,}05$ en $n = 204$.
De gevraagde kans is $\binom{204}{3} \cdot (0{,}05)^{3} \cdot (0{,}95)^{201} \approx 0{,}0058$.
b -

7

a $\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^{n}$
b Kies $k = 0$. Dan is $\mathrm{P}(X = 0) = 1$. En $\binom{n}{k} \cdot 0^{k} \cdot 1^{n-k} = 0$ voor $k = 1, 2, \ldots, n$. Dus moet $0^{0} = 1$.

8

a $(x + y)^{1} = x + y$; $(x + y)^{2} = x^{2} + 2xy + y^{2}$
b Neem $x = y = 1$.
c $= (x + 1 - x)^{n} = 1$
d Vat x op als de kans op succes. Dan zegt de formule dat de som van de kansen op $0, 1, 2, \ldots, n$ successen 1 is.

9

Zie bijvoorbeeld het lemma 'Poissonverdeling' in Wikipedia,

De Poissonverdeling

10
a Daar moet hij het personeel op aanpassen. Klanten die moeten wachten verliest hij anders.
b -

11
a Ze hebben niet afgesproken samen naar de winkel te gaan. Als een klant binnenkomt is dat van geen invloed op de aankomsttijd van een andere klant.
b $\binom{10}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0{,}04395$
c Heel klein. Er is niet zo veel speling: als een volgende klant precies komt als de vorige net weg is, is er maar 10 minuten in het uur over.

12
a $P_1(1) = P_{\frac{1}{2}}(1) \cdot P_{\frac{1}{2}}(0) + P_{\frac{1}{2}}(0) \cdot P_{\frac{1}{2}}(1) = 2 \cdot P_{\frac{1}{2}}(0) \cdot P_{\frac{1}{2}}(1)$
b $P_1(3) = P_{\frac{1}{2}}(0) \cdot P_{\frac{1}{2}}(3) + P_{\frac{1}{2}}(1) \cdot P_{\frac{1}{2}}(2) + P_{\frac{1}{2}}(2) \cdot P_{\frac{1}{2}}(1) + P_{\frac{1}{2}}(3) \cdot P_{\frac{1}{2}}(0) =$
$2 \cdot P_{\frac{1}{2}}(0) \cdot P_{\frac{1}{2}}(3) + 2 \cdot P_{\frac{1}{2}}(1) \cdot P_{\frac{1}{2}}(2)$

13
a $P_{\frac{1}{2}}(6) \cdot P_{\frac{1}{2}}(1)$ is de kans dat het eerste half uur 6 klanten komen en het tweede half uur 1. Dus er komen in dat uur 7 klanten waarvan er 1 in het tweede halfuur. Dus $P_{\frac{1}{2}}(6) \cdot P_{\frac{1}{2}}(1) = P_1(7) \cdot \binom{7}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^7$.
b Uit de eerste gelijkheid volgt: $P_1(7) = P_{\frac{1}{2}}(7) \cdot P_{\frac{1}{2}}(0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-7}$.
Vul dat in voor $P_1(7)$ in de tweede gelijkheid:
$P_{\frac{1}{2}}(6) \cdot P_{\frac{1}{2}}(1) = P_{\frac{1}{2}}(7) \cdot P_{\frac{1}{2}}(0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-7} \cdot 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 7 \cdot P_{\frac{1}{2}}(7) \cdot P_{\frac{1}{2}}(0)$.
Beide zijden delen door $7 \cdot P_{\frac{1}{2}}(0)$ geeft:
$$P_{\frac{1}{2}}(7) = \frac{P_{\frac{1}{2}}(6) \cdot P_{\frac{1}{2}}(1)}{7 \cdot P_{\frac{1}{2}}(0)} = \frac{1}{7} \cdot \frac{P_{\frac{1}{2}}(1)}{P_{\frac{1}{2}}(0)} \cdot P_{\frac{1}{2}}(6)$$
c $P_{\frac{1}{2}}(n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{P_{\frac{1}{2}}(1)}{P_{\frac{1}{2}}(0)} \cdot P_{\frac{1}{2}}(n-1)$
d Voor $n = 1$ krijg je: $P_{\frac{1}{2}}(1) = \frac{P_{\frac{1}{2}}(1)}{P_{\frac{1}{2}}(0)} \cdot P_{\frac{1}{2}}(0)$ en dat klopt.

14
a Uit $P_{\frac{1}{2}}(n) = \frac{\lambda}{n} \cdot P_{\frac{1}{2}}(n-1)$ volgt $P_{\frac{1}{2}}(1) = \lambda \cdot P_{\frac{1}{2}}(0)$, $P_{\frac{1}{2}}(3) = \frac{\lambda}{3} \cdot P_{\frac{1}{2}}(2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\lambda^3 \cdot P_{\frac{1}{2}}(0)$, $P_{\frac{1}{2}}(3) = \frac{\lambda}{3} \cdot P_{\frac{1}{2}}(2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\lambda^3 \cdot P_{\frac{1}{2}}(0)$ en $P_{\frac{1}{2}}(5) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \lambda^5 \cdot P_{\frac{1}{2}}(0)$.
b $P_{\frac{1}{2}}(n) = \frac{1}{n!} \cdot \lambda^n \cdot P_{\frac{1}{2}}(0)$

15
a Uit $P_{\frac{1}{2}}(0) \cdot e^{\lambda} = 1$ volgt: $\lambda = \ln(10) \approx 2{,}3026$

b $P_{\frac{1}{2}}(0) \cdot e^{\lambda} = 1 \Leftrightarrow e^{-\lambda} = P_{\frac{1}{2}}(0) \Leftrightarrow \lambda = -\ln(P_{\frac{1}{2}}(0)$

16 $P(X = k) \cdot k = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \cdot k = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$, dus $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) \cdot k = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$
$\lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$.

17

a $P(X = 0) = e^{-\lambda}$ en $P(Y = 0) = e^{-\frac{1}{2}\lambda}$. Er geldt: $e^{-\lambda} = \left(e^{-\frac{1}{2}\lambda}\right)^2 = e^{-\frac{1}{2}\lambda \cdot 2} = e^{-\lambda}$.

b $P(X = 0) = e^{-\lambda}$, $P(Y = 0) = e^{-\frac{1}{2}\lambda}$ en $P(Y = 1) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\lambda}$. Er geldt: $e^{-\lambda} = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\lambda} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\lambda}$, dus het klopt.

18

a Er zijn gemiddeld $\frac{123}{365}$ brandmeldingen per dag.
X is het aantal brandmeldingen morgen.
Dan is X Poissonverdeeld met $\lambda = \frac{123}{365} = 0{,}3369....$
$P(X = 2) = \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{1}{2} \cdot (0{,}3369...)^2 \cdot e^{-0{,}3369...} \approx 0{,}04054$

b X is het aantal fietsdoden morgen.
X is Poissonverdeeld met $\lambda = \frac{810}{365} = 2{,}2191....$
$P(X = 3) = \frac{\lambda^3}{3!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{1}{6} \cdot (2{,}2191...)^3 \cdot e^{-2{,}2191...} \approx 0{,}1980.$

c -

19

a $P_{\text{Poisson}}(X \leq 450, \lambda = 496) \approx 0{,}0193$
b $P_{\text{Poisson}}(X \leq 799, \lambda = 810) \approx 0{,}3580$

20

a X en Y nemen positieve gehele waarden aan en nul. Als $X + Y = 10$, is $X = 0$ en $Y = 10$ of $X = 1$ en $Y = 9$ of ... of $X = 10$ en $Y = 0$.
Omdat X en Y onafhankelijk zijn, volgt het beweerde.
$P(X = k) \cdot P(Y = 10 - k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{10-k}}{(10-k)!} e^{-\mu} = \frac{1}{10!} \frac{10!}{k!(10-k)!} \cdot e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \lambda^k \cdot \mu^{10-k}$.
Er geldt (binomium van Newton): $\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \cdot \lambda^k \cdot \mu^{10-k} = (\lambda + \mu)^{10}$,
dus $\sum_{k=0}^{10} P(X = k) \cdot P(Y = 10 - k) = \frac{(\lambda + \mu)^{10}}{10!} \cdot e^{-(\lambda+\mu)}$.

b Klopt.

21

a Elke klant gaat met 2 keer zo grote kans naar de tweede winkel dan naar de eerste. De kans dat hij dus naar de eerste winkel gaat is $\frac{1}{3}$.

b X is het aantal klanten dat in A komt in 1 uur,
Y is het aantal klanten dat in B komt in 1 uur,
P(de winkels krijgen samen 1 klant in een uur) $= P(X + Y = 1) = 3 \cdot e^{-3}$,
P(A krijgt 1 klant in een uur)$= P(X = 1) = 1 \cdot e^{-1}$,
P(B krijgt 0 klanten in een uur)$= P(Y = 0) = e^{-2}$.

c De in **b** berekende kansen vullen we in in:
P(winkels krijgen samen 1 klant) $\cdot$ P(die klant gaat naar A) $=$

P(A krijgt 1 klant) · P(B krijgt geen klant).
Je vindt: $3 \cdot e^{-3} =$ P(die klant gaat naar A) $\cdot e^{-1} \cdot e^{-2}$, dus P(die klant gaat naar A) $= \frac{1}{3}$.
?

d $\binom{7}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \approx 0{,}2561$

22

a $800\,000 \cdot 0{,}00001 = 8$

b $0{,}122138$

c $0{,}122138$

d $\binom{800\,000}{6} = \frac{800\,000}{6} \cdot \frac{799\,999}{5} \cdot \frac{799\,998}{4} \cdot \frac{799\,997}{3} \cdot \frac{799\,996}{2} \frac{799\,995}{1} \approx \frac{800\,000^6}{6!}$, dus $\binom{800\,000}{6} \cdot 0{,}00001^6 \approx \frac{8^6}{6!}$.

e $0{,}99999^6 \approx 1$, dus $0{,}99999^{799\,994} \approx 0{,}99999^{800\,000}$.
En $0{,}99999^{800\,000} = \left(1 - \frac{8}{800\,000}\right)^{800\,000} \approx e^{-8}$.

f Uit het voorgaande volgt dat P($X = 6$) $\approx \frac{8^6}{6!} \cdot e^{-8}$. Deze laatste uitdrukking is P($Y = 6$).

23

Het aantal dragers is bij benadering Poissonverdeeld met $\lambda = 170$.
De gevraagde kans is (GR): $P_{\text{Poisson}}(X \leq 185, \lambda = 170) \approx 0{,}8818$.

24

X =aantal doden in een regiment in een jaar.
P($X = 0$) $= e^{-0,7} \approx 0{,}4966$,
P($X = 1$) $= 0{,}7 \cdot e^{-0,7} \approx 0{,}3476$ en
P($X = 2$) $= \frac{0{,}7^2}{2!} \cdot e^{-0,7} \approx 0{,}1217$

25

a Er zijn $\binom{45}{6}$ mogelijkheden om zes nummers aan te kruisen en je hebt de keus uit zes kleuren, dus het aantal keuzemogelijkheden is $\binom{45}{6} \cdot 6$. De kans is dus: $\frac{1}{\binom{45}{6} \cdot 6} \approx 2{,}05 \cdot 10^{-8}$

b Noem het aantal deelnemers met alles goed Y. Y is Poissonverdeeld met $\lambda = 10^6 \cdot 2{,}05 \cdot 10^{-8} = 2{,}05 \cdot 10^{-2}$. P($Y = 0$) $= e^{-0,0205} \approx 0{,}9797$.

c P($Y \geq 2$) $= 1 -$ P($Y = 0$) $-$ P($Y = 1$) $= 1 - e^{-0,0205} - 0{,}0205 \cdot e^{-0,0205} \approx 0{,}0002$

Wanneer komt de volgende klant?

26

a Het aantal klanten in de eerste $1\frac{1}{2}$ uur is Poissonverdeeld met $3 \cdot 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$.
De kans dat een klant minstens anderhalf uur op zich laat wachten is $e^{-1\frac{1}{2}}$.
De gevraagde kans is dus $e^{-\frac{1}{2}} - e^{-4\frac{1}{2}} \approx 0{,}2120$.

b X is het aantal klanten dat het eerste halfuur komt, dan X is Poissonverdeeld met $\lambda = 1\frac{1}{2}$.
Y is het aantal klanten dat het derde kwartier komt, dan Y is Poissonverdeeld met

$\mu = \frac{3}{4}$.

De gevraagde kans is: $P(X = 2) \cdot P(Y = 2) + P(X = 1) \cdot P(Y = 3) + P(X = 0) \cdot P(Y = 4)$,

dus $\frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^2}{2!} \cdot e^{-\mu} + \frac{\lambda^1}{1!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^3}{3!} \cdot e^{-\mu} + \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^4}{4!} \cdot e^{-\mu} =$

$\frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^2}{2!} \cdot e^{-\mu} + \frac{\lambda^1}{1!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^3}{3!} \cdot e^{-\mu} + \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^4}{4!} \cdot e^{-\mu} \approx 0{,}0459$.

27

a Alle getallen groter dan 0

b X is discreet verdeeld, T is continu verdeeld.

c Het aantal klanten in de eerste t uur is Poissonverdeeld met parameter $\lambda \cdot t$.

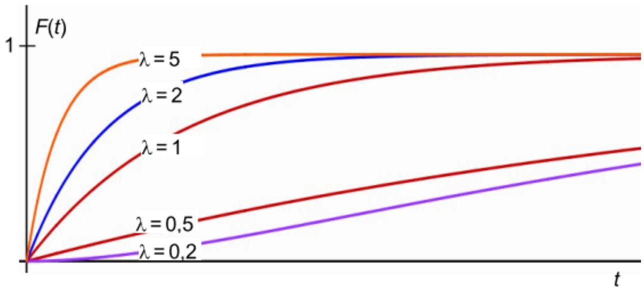
$P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(0 \text{ klanten in de eerste } t \text{ uur}) = 1 - \frac{(\lambda \cdot t)^0}{0!} e^{-\lambda \cdot t} = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$

d Als $t = 0$, levert de formule $P(T \leq 0) = 1 - e^0 = 0$ en dat moet ook: de kans dat de eerste klant onmiddellijk komt is 0.

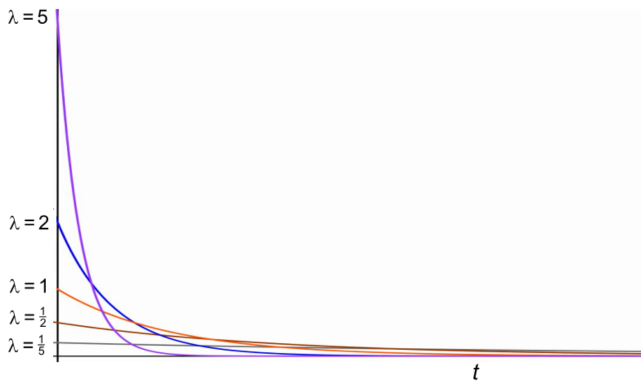
Als t nadert tot oneindig, levert de formule $P(T \leq \infty) = 1$ en dat moet ook: de kans dat er ooit een klant zal komen is 1.

28

a Zie figuur.



b Zie figuur.



c Er geldt: $\int_0^t f(x)\,dx = [F(x)]_0^t = F(t) - F(0)$.

Aangezien $F(0) = 0$, is dus $\int_0^t f(x)\,dx = F(t)$.

29 **a** De tijd (in minuten) die Study moet wachten, noemen we T, met bijbehorende parameter λ, dan $P(T \leq 30) = 1 - e^{-\lambda \cdot 30} = \frac{1}{2}$, dus $e^{-\lambda \cdot 30} = \frac{1}{2}$.

De kans dat ze binnen 5 minuten een lift heeft, is $P(T \leq 5) = 1 - e^{-\lambda \cdot 5} = 1 - \left(e^{-\lambda \cdot 30}\right)^{\frac{1}{6}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}} \approx 0{,}1091$.

b $P(T > 60) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda \cdot 60}\right) = \left(e^{-\lambda \cdot 30}\right)^2 = \frac{1}{4}$

30 Studys gedachte is fout. De situatie na de eerste 40 minuten is precies dezelfde als toen ze begon te liften. De kans op een lift is dus niet beïnvloed door wat er vooraf gebeurd is.

31 **a** $\frac{1}{6}$
b Nee

32 Voor een exponentieel verdeelde stochast T met parameter λ geldt: $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$.
Dus $P(T > a) = e^{-\lambda \cdot a}$.
$P(T > a) \cdot P(T > b) = e^{-\lambda \cdot a} \cdot e^{-\lambda \cdot b} = e^{-\lambda \cdot (a+b)} = P(T > a + b)$

33 **a** Hokjes tellen: de oppervlakte is ongeveer 2 hokjes van oppervlakte $\frac{1}{4}$. Dus is de oppervlakte ongeveer $\frac{1}{2}$.

b $G'(x) = -e^{-2 \cdot x} - x \cdot -2 \cdot e^{-2 \cdot x} - \frac{1}{2} \cdot -2 \cdot e^{-2 \cdot x} = g(x)$

c $E(T) = \lim\limits_{x \to \infty} (G(x) - G(0)) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(x \cdot e^{-2 \cdot x} - \frac{1}{2} \cdot e^{-2 \cdot x} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

d $E(T) = \displaystyle\int_0^\infty x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx$.

Een primitieve van $h : x \to x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$ is $H : x \to x \cdot e^{-\lambda \cdot x} - \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot x}$.
Dus $E(T) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(x \cdot e^{-\lambda \cdot x} - \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot x} + \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}$.

34 **a** 40 minuten
b X is het aantal auto's dat stopt voor lifters. Dan is x Poissonverdeeld met parameter λ met $\frac{1}{\lambda} = 10$, dus $\lambda = 0{,}1$.
$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - P_{\text{Poisson}}(X \leq 3, \lambda = 0{,}1) \approx 0{,}3528$.

Extra opgaven

35 **a** 42 minuten
b De totale afhandeltijd van de 7 personen voor Hanny is normaal verdeeld met gemiddelde 42 minuten en standaardafwijking $\sqrt{7} \approx 2{,}65$ minuten. Gevraagd wordt de kans dat die kleiner dan 45 minuten is. Met de GR: $P(-100 < X < 45 | \mu = 42, \sigma = \sqrt{7})$ 0,8716.

36 **a** Het aantal aanrijdingen op een dag noemen we X. De bijbehorende parameter $\lambda = \frac{5}{7}$.
$P(X = 0) = e^{-\frac{5}{7}} \approx 0{,}4895$

b Y is het aantal aanrijdingen per week. De parameter van Y is dan $\mu = 5$. De gevraagde kans is $\mathrm{P}(Y = 10) = \frac{5^{10}}{10!} \cdot \mathrm{e}^{-5} \approx 0{,}00623$.

37

a X respectievelijk Y is het aantal klanten dat in de komende 5 minuten in A, respectievelijk in B komt. De parameter van X is $\lambda = 1\frac{2}{3}$ en Y $\mu = 2$.

De gevraagde kans is $\mathrm{P}(X = 0) \cdot \mathrm{P}(Y = 0) = \mathrm{e}^{-1\frac{2}{3}} \cdot \mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}0256$.

b X is het aantal klanten dat naar winkel B gaat. Dan is X binomiaal verdeeld met $p = \frac{24}{20+24} = \frac{6}{11}$ en $n = 20$. De gevraagde kans is $\mathrm{P}\left(X < 10 \mid p = \frac{6}{11}, n = 20\right)$.

Appendix

38

a $y_5' = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

b $\frac{x^5}{5!} < \frac{1^5}{5!} = \frac{1}{120}$

c

d Het verschil is $\frac{x^{50}}{50!} < \frac{17^{50}}{50!} \approx 0{,}001095 < 0{,}0111$.

e $\frac{x^n}{n!}$

f $c = 1$

39

$(x+y)^1 = x + y$;
$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$;
$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

40

a Beide 1

b Zie figuur.

1

$1 + 1x$

$1 + 2x + 1x^2$

$1 + 3x + 3x^2 + 1x^3$

$1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + 1x^4$

$1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + 1x^5$

$1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + 1x^6$

$1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + 1x^7$

c $\binom{10}{4} = 21$.

41

a $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_5 x^1 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot a_6 x^2$

b Voor het linkerlid $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ en voor het rechterlid $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_4$.

c Linker- en rechterlid zijn gelijk, dus na 0 invullen vind je: $a_4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6!}{4!2!} = \binom{6}{4}$.

42

a $\binom{10}{k} p^k \cdot q^{10-k}$

b Rechts worden de kansen dat het kogeltje in bakje 0, 1, 2, ..., 10 opgeteld.
De som van deze kansen is 1.

c Rechts moet elk van de termen met a^{10} vermenigvuldigd worden.
En $a^{10} \cdot p^k \cdot q^{10-k} = (ap)^k \cdot (aq)^{10-k}$ voor $k = 0, 1, 2, \dots, 10$.

d $p + q = 1$, dus $x + y = ap + aq = a$.

43

a $(x+2)^5 = x^5 + 2 \cdot \binom{5}{1} \cdot x^4 + 2^2 \cdot \binom{5}{2} \cdot x^3 + 2^3 \cdot \binom{5}{3} \cdot x^2 + 2^4 \cdot \binom{5}{4} \cdot x^1 + 2^5 =$
$x^5 + 10 \cdot x^4 + 40 \cdot x^3 + 80 \cdot x^2 + 80 \cdot x^1 + 32$

b $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$

9 Poissonverdeling

1. Elimineer $P_1(7)$.
2. Gebruik het theorieblok hierboven.
3. Dan moeten er in het eerste half uur 2 klanten komen en in het daarop volgende kwartier 2
   of dan moeten er in het eerste half uur 1 klant komen en in het daarop volgende kwartier 3 of
   dan moeten er in het eerste half uur geen klanten komen en in het daarop volgende kwartier 4.