

Rijen met de Casio fx-CG20 en fx-CG50

Met de Casio kun je op diverse manieren rijen in beeld brengen. Verder kun je daarbij ook gemakkelijk somrijen en verschilrijen maken. Je kunt tijdgrafieken en webgrafieken tekenen.

Inhoud

- Rijen met directe formules
 - Invoeren als functie
 - Invoeren als lijst
 - Invoeren als rij
 - Recursief gegeven rijen
 - Tijdgrafieken en webgrafieken
 - Stelsels rijen en fasegrafieken
-

Rijen met directe formules

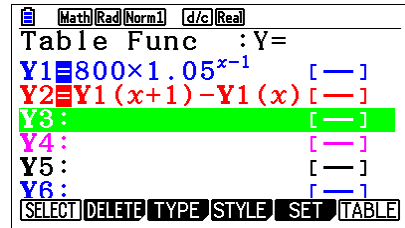
Rijen met **directe formules** kunnen op drie manieren worden ingevoerd. Ga uit van de rij met voorschrift:

$$u_n = 800 \cdot 1.05^{n-1}$$

te beginnen met $n = 1$.

Je kunt de **rij als een gewone functie** opvatten met als domein alleen de getallen (0), 1, 2, 3, 4, ...

- Voer in je tabelscherm het functievoorschrift in:
 $y_1(x) = 800 \cdot 1.05^{x-1}$. Zie hiernaast.
- Laat de tabel die bij deze functie hoort op je scherm weergegeven. Je ziet nu de termen van de rij. Zie hiernaast/onder.



Je kunt de bijbehorende **verschilrij** in beeld brengen via:

$$y_2(x) = y_1(x + 1) - y_1(x).$$

Je vindt 'y₁' met **[VAR] [F4] ([GRAPH]) [F1] ([Y]) [1]**.

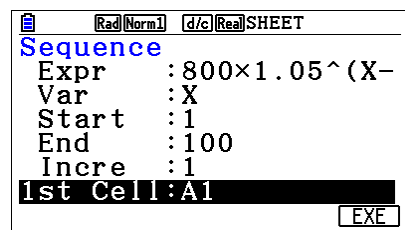
Gebruik **[X,0,T]** voor x . Zie de afbeeldingen hiernaast.

X	Y1	Y2
1	800	40
2	840	42
3	882	44.1
4	926.1	46.305

De bijbehorende **somrij** maken als functie is lastig/onmogelijk. De Casio ondersteunt geen sommeerfunctie in een functie.

Je kunt de **rij als een lijst met getallen** opvatten. Je kunt hem dan invoeren in 'Spreadsheet'. Dat gaat zo:

- Druk in je hoofdscherm op **[4]** (Spreadsheet).
- Maak de sheet leeg met **[F5]** (Clear) **[F3]** (All) en ga terug naar het spreadsheet menu.
- Ga in cel A1 staan.
- Maak de rij met **[F2]** (Edit) **[F5]** (Seq), voer voor de expressie x in, voor de variabele ook x , voor de startwaarde 1, voor de eindwaarde 100 en voor de stapgrootte 1.
 Controleer dat er nu in de eerste kolom de getallen 1 tot en met 100 staan.
 Controleer of je nu snapt waar alle waarden in het venster voor stonden.
- Ga in cel B1 staan.
- Maak de rij zelf met **[F2]** (Edit) **[F5]** (Seq) en voer de expressie $800 \cdot 1.05^{x-1}$ in en verder variabele, startwaarde, eindwaarde en stapgrootte. Zie hiernaast.



- In kolom B komen nu de termen van de rij. Zie hiernaast.

SHE	A	B	C	D
1	1	800		
2	2	840		
3	3	882		
4	4	926.1		
5	5	972.4		

1

CUT COPY CELL JUMP SEQ >

De bijbehorende **somrij** kan in kolom C worden gezet als volgt:

- Ga in cel C1 staan.
- Voer in als celberekening: **[SHIFT] [=] [F5] (cell) [F5] (sum) [ALPHA] B [EXIT] [F2] (\$) [1] [F3] (:):B [1]**
Er staat nu in de cel: =CellSum(B\$1:B1). Hiermee wordt de som berekend van de cellen B1 tot B1. De \$ geeft aan bij kopiëren van deze cel naar een andere cel, deze waarde daarachter niet zal worden gewijzigd. 'B1' zal bij kopiëren naar cel C2 wel worden vervangen door 'B2'. In die cel wordt dus de som van B1 en B2 berekend, enzovoort. Nu het kopiëren van de cel nog regelen.
- Ga in cel C1 staan.
- Druk een paar keer op **[EXIT]** om naar het spreadsheetmenu te gaan.
- Voer in: **[F2] [Edit] [F6] [F1] [Fill]** en vervang de range door C1:C100. Als het goed is, krijg je het beeld als hiernaast.

SHE	A	B	C	D
1	1	800	800	
2	2	840	1640	
3	3	882	2522	
4	4	926.1	3448.1	
5	5	972.4	4420.5	

=CellSum(B\$1:B3)

FILL SORTASC SORTDES >

Op soortgelijke manier krijg je ook de verschilrij. Zie daarvoor de afbeelding hiernaast met de formule die in cel D1 moet staan. Vervolgens vervang je met **[Fill]** de range D1 tot D99 door deze verschilformule.

SHE	A	B	C	D
1	1	800	800	40
2	2	840	1640	42
3	3	882	2522	44.1
4	4	926.1	3448.1	46.305
5	5	972.4	4420.5	48.62

=B2-B1

FILL SORTASC SORTDES >

Je kunt tot slot de **rij invoeren als rij** als volgt:

- Ga via het hoofdmenu naar 'Recursion'.
- Kies het type rij, in dit geval direct: **[F3] (type) [F1] (alleen afhankelijk van n)**.
- Toets achter a_n : $800 \cdot 1,05^{n-1}$
- Stel nu de goede beginwaarde en eindwaarde in: **[F5] (set)**, maak Start 1 en End 100, **[EXE]**
- Vraag nu de tabel op: **[F6] (Table)**

Math	Rad	Norm1	d/c	Real
Recursion				
a_n	=	$800 \times 1.05^{n-1}$	[-]	
D_n	:		[-]	
C_n	:		[-]	

SEL+S DELETE TYPE n SET TABLE

De somrij kun je nu ook opvragen. Doe daarvoor het volgende: **[SHIFT] [MENU] (Set up)** en zet **[ΣDisplay]** op 'On'. Vraag nu de tabel nog een keer op. Als het goed is, zie je het plaatje hiernaast.

n	a_n	Σa_n
1	800	800
2	840	1640
3	882	2522
4	926.1	3448.1

1

FORMULA DELETE GPH-CON GPH-PLT

Oefen het werken met rijen gegeven door een directe formule.



Recursief gegeven rijen

Bekijk nog eens de rij met direct voorschrift:

$$u_n = 800 \cdot 1,05^{n-1}$$

In recursieve vorm ziet diezelfde rij er zo uit:

$$\begin{cases} u(n+1) = 1,05 \cdot u(n) \\ u(1) = 800 \end{cases}$$

Als je een rij die gegeven is door een **recursieformule** wilt invoeren, gebruik je **rij invoeren als rij**.

Deze rekenmachine noteert in het recursieve rij-scherm 'a_{n+1} = ' in plaats van 'u(n + 1) = '.

Voer nu de rij in als volgt:

- Ga via het hoofdmenu naar 'Recursion'.
- Kies het type rij, in dit geval recursief met alleen gebruik van de vorige term: **F3** (type) **F2** (alleen gebruik van de vorige term (en eventueel ook nog n, maar dat doen we hier niet)).
- Toets a_n=: 1.05 **F4** (rijvariabelen) **F2** (a_n) **EXE**
- Stel nu de goede beginwaarde en eindwaarde in: **F5** (set), maak Start 1 en End 100
- Geef de goede beginwaarde op: **F2** (a₁ opgeven), maak a₁ gelijk aan 800, **EXE**
- Vraag nu de tabel op: **F6** (Table)

Het resultaatsscherm ziet er bijna hetzelfde uit, zie hiernaast.

n+1	a _{n+1}	Σa _{n+1}
1	800	800
2	840	1640
3	882	2522
4	926.1	3448.1

800

Oefen het werken met rijen gegeven door een recursieformule.

Hier zie je hoe een rij van Fibonacci kan worden ingevoerd:

Recursion

a_{n+2} = a_{n+1} + a_n [—]

b_{n+2} : [—]

C_{n+2} : [—]

SEL+S DELETED TYPE n.an... SET TABLE

Table Setting n+2

Start: 1

End : 100

a₀ : 1

a₁ : 1

b₀ : 0

b₁ : 0

a₀ a₁

n+2	a _{n+2}	Σa _{n+2}
1	1	2
2	2	4
3	3	7
4	5	12

1



Tijdgrafiek en webgrafiek

Je kunt bij rijen twee soorten grafieken maken:

- 'gewone' grafieken of tijdgrafieken
- webgrafieken

Gebruik weer dezelfde rij als in de rest van het practicum met directe formule:

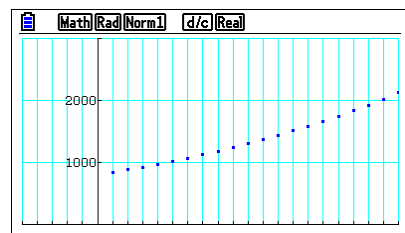
$$u_n = 800 \cdot (1,05)^{n-1}$$

en recursieformule:

$$\begin{cases} u(n) = 1,05 \cdot u(n-1) \\ u(1) = 800 \end{cases}$$

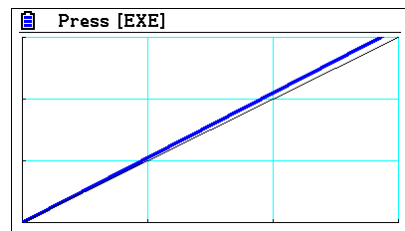
De **tijdgrafiek** verschijnt in beeld als de formule is ingevoerd en je vanuit de tabel [Gph-plt] (losse punten) en daarna a_n kiest. Stel daarna de juiste scherminstellingen in (laat n lopen van 1 t/m 20, $u(n)$ loopt van ongeveer 800 tot 2000).

Je ziet dan de afbeelding hiernaast.



De **webgrafiek** verschijnt in beeld als je het volgende doet:

- Voer de recursieve formule in. Zet de startwaarde op 800.
- Laat n lopen van 1 t/m 20, $u(n)$ loopt van ongeveer 800 tot 2000.
- Stel beide assen van de grafiek in op de geschikte waarde, in dit geval bijvoorbeeld 3000.
- Schakel nu de weergave van de webgrafiek in nadat je de tabel in het scherm hebt: [Web-gph]



Nu zie je een beeld zoals hiernaast. Niet erg interessant...



Stelsels rijen en fasegrafieken

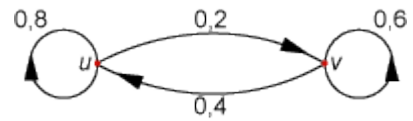
Er ontstaan stelsels rijen als je bijvoorbeeld te maken hebt met een migratiematrix, met de prooi-roofdier-cyclus, of bepaalde economische modellen. Een voorbeeld van zo'n stelsel is (de bijpassende migratiegraaf staat er naast):

$$u(n) = 0,8 \cdot u(n-1) + 0,4 \cdot v(n-1)$$

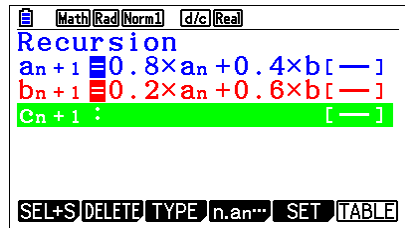
$$v(n) = 0,2 \cdot u(n-1) + 0,6 \cdot v(n-1)$$

met

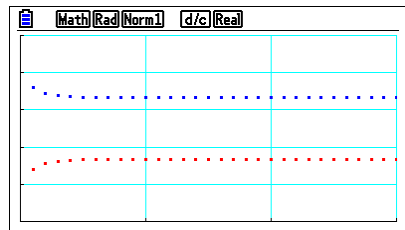
$$u(0) = 80 \text{ en } v(0) = 20.$$



Voer het stelsel rijen als volgt in als twee rijen (zie 'recursief gegeven rijen'):



Door de tabel even door te bladeren, zie je dat de waarden tussen de 0 en 100 liggen. Instellen van het grafiekvenster levert dan het beeld hiernaast. Controleer dat.



Juist bij stelsels rijen is het vaak nuttig om een zogenaamde *fasegrafiek* te maken, waarin de rij $u(n)$ op de horizontale as en de rij $v(n)$ op de verticale as is uitgezet.

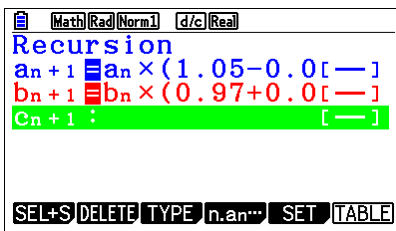
Dit zijn formules bij een prooiroofdiermodel:

$$u(n) = u(n-1) \cdot (1,05 - 0,001 \cdot v(n-1))$$

$$v(n) = v(n-1) \cdot (0,97 + 0,0002 \cdot u(n-1))$$

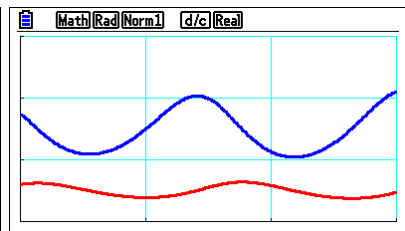
met beginwaarden $u(0) = 175$ en $v(0) = 60$.

Voer de formules in zoals hieronder en neem n maximaal 300.



n+1	a_{n+1}	b_{n+1}
1	173.25	60.3
2	171.46	60.58
3	169.65	60.84
4	167.81	61.079

173.25



Bekijk de hierboven getoonde grafiek met venster $[0,300] \times [0,300]$. Je ziet een soort golfbeweging ontstaan.

Door nu [Phase] te kiezen wordt de fasegrafiek getoond. Stel het venster in: $[100,250] \times [0,100]$. Je ziet dan de afbeelding zoals hiernaast. Nu begint het echte werk: Verander de beginwaarden en bekijk wat er met de aantallen van de dieren gebeurt...

