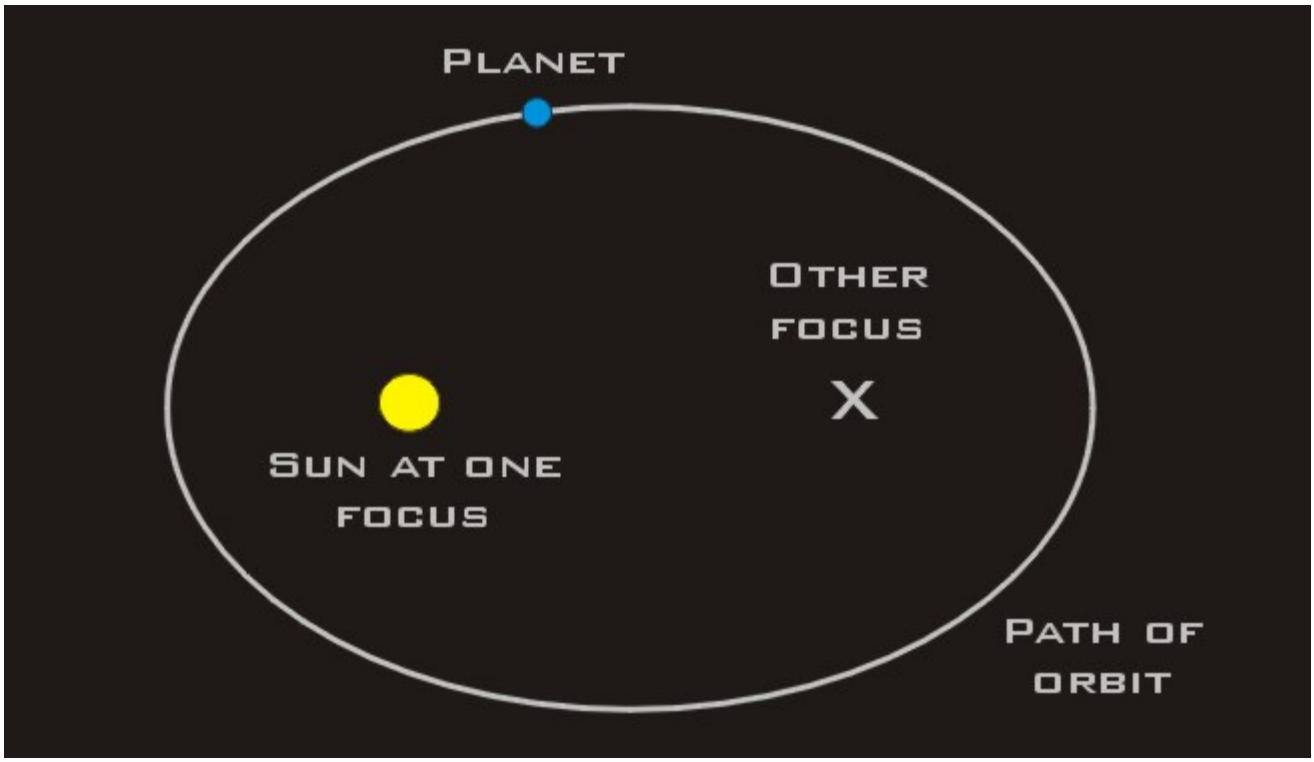
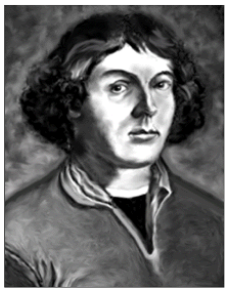
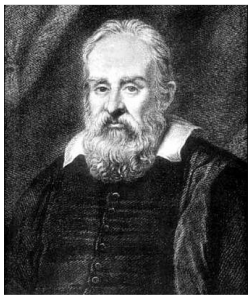
De wetten van Kepler







De wetten van Kepler

Inhoudsopgave

1	Vectoren in de ruimte	1
2	Het inwendig product	8
3	Het uitwendig product	20
4	Krommen in de ruimte	27
5	De reuzen van Newton	38
6	De wetten van Newton	48
7	De wetten van Kepler	53
8	Het Keplerprobleem	63
9	Tabellen	67

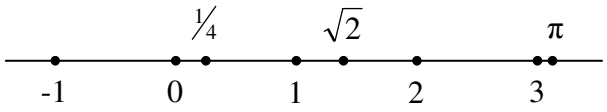
© 2009
Experimentele uitgave voor vwo wiskunde D
Tweede verbeterde versie (januari 2012)
Auteur: Maris van Haandel
Met medewerking van: Leon van den Broek, Gert Heckman, Rainer Kaenders, Klaas Landsman, Kerngroep Wiskunde D van de Radboud Universiteit

Dit materiaal is tot stand gekomen aan de Radboud Universiteit Nijmegen in het kader van een LIO-project, ondersteund door NWO.

1 Vectoren in de ruimte

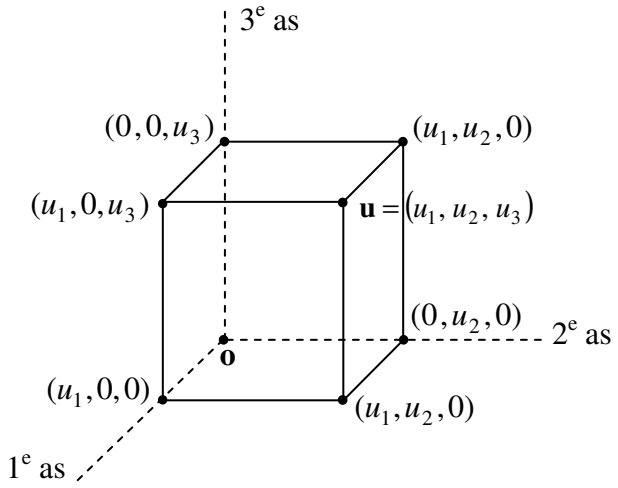
Wiskunde is een taal.
Josiah Willard Gibbs (1839-1903)

In de eerste drie paragrafen geven we een inleiding in de meetkunde, die door de Griekse wiskundige Euclides in de derde eeuw voor Christus werd beschreven in de Elementen, een dertiendelig verzamelwerk over meetkunde en rekenkunde. Deze meetkunde wordt daarom ook wel Euclidische meetkunde genoemd. De Euclidische meetkunde kan worden onderverdeeld in vlakke meetkunde en ruimtemeetkunde. Wij zullen ons beperken tot de ruimtemeetkunde, omdat we die vooral nodig zullen hebben. De meeste concepten kunnen echter zonder enige moeite vertaald worden naar de vlakke meetkunde, op het moment dat de behoefte er is. Onze insteek is de moderne manier met coördinaten. Dit heeft als voordeel dat de ruimte direct op een constructieve manier voorhanden is, en bovendien dat naast meetkundig redeneren de algebra een nuttig en efficiënt gereedschap is. Het is absoluut noodzakelijk om deze taal te leren spreken, wil je de wiskunde achter de planeetbanen kunnen begrijpen.
We gaan er van uit dat de getallenlijn, bestaande uit de reële getallen, bekend is. Hier is een plaatje met $\frac{1}{4} = 0.25$, $\sqrt{2} = 1.41...$, $\pi = 3.14...$ etc.



De collectie van de reële getallen wordt genoteerd met het symbool $\mathbb{R}$. We kunnen reële getallen bij elkaar optellen en met elkaar vermenigvuldigen, en de regels daarvoor zijn bekend.
In navolging van de Franse wiskundige René Descartes in zijn Geometria uit 1637 voeren we de Cartesische ruimte $\mathbb{R}^3$ in op algebraïsche wijze: $\mathbb{R}^3$ bestaat uit alle drietallen (u_1, u_2, u_3) waarbij u_1, u_2, u_3 reële getallen zijn.
De Cartesische ruimte kan worden gebruikt om de ruimte, waarin wij ons bevinden, te beschrijven. Dit gaat als volgt. Kies achtereenvolgens drie onderling loodrechte lijnen die door één punt gaan. Het snijpunt van de drie lijnen heet de oorsprong en deze noteren we met **o** (van oorsprong). De drie lijnen zijn de eerste, tweede en derde as (of x-as , y-as en z-as). Voorzie de lijnen van een zelfde schaalverdeling, waarbij in de oorsprong het getal nul

staat. Een willekeurig punt in de ruimte heeft loodrechte projecties op elk van de drie assen. Deze geven de respectievelijke coördinaten van het punt. Het drietal (u_1, u_2, u_3) noteren we soms kort met $\mathbf{u}$ en we zien $\mathbf{u}$ als een punt in de driedimensionale ruimte. Omgekeerd horen bij elk punt $\mathbf{u}$ in de driedimensionale ruimte drie getallen u_1, u_2 en u_3. Het getal u_1 heet de eerste coördinaat van $\mathbf{u}$, u_2 de tweede coördinaat van $\mathbf{u}$ en u_3 de derde coordinaat van $\mathbf{u}$. In $\mathbb{R}^3$ hebben we een uitverkoren punt $\mathbf{o} = (0, 0, 0)$.
Hieronder is een plaatje getekend van een rechthoekig blok met een hoekpunt $\mathbf{o} = (0, 0, 0)$ en een hoekpunt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. De lengte van het blok is u_1, de breedte is u_2 en de hoogte is u_3, waarbij we aannemen dat deze drie getallen positief zijn.



We definiëren in $\mathbb{R}^3$ twee bewerkingen, een optelling en een scalaire vermenigvuldiging. De optelling van twee punten $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ en $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ levert een nieuw punt $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ op via de formule $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$.
De vermenigvuldiging van een punt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ met een reëel getal λ wordt scalaire vermenigvuldiging genoemd (een scalair is een reëel getal) en levert een nieuw punt $\lambda\mathbf{u}$ op via de formule $\lambda\mathbf{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$.

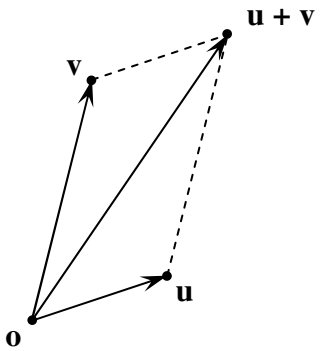
Merk op dat we een Griekse letter gebruikt hebben voor de scalair (het reële getal) en niet een gewone letter. Dit doen we met een reden: op deze manier zijn scalairen (reële getallen) nog beter te onderscheiden van vectoren (die

altijd vet worden gedrukt) en dat komt de leesbaarheid ten goede. Er zijn ook andere gangbare manieren om vectoren te noteren. Bijvoorbeeld met een pijl erboven: $\vec{u}$ of met een streep eronder: $\underline{u}$. In handgeschreven stukken verdienen deze schrijfwijzen de voorkeur.

De optelling en de scalaire vermenigvuldiging werken dus coördinaatsgewijs. Deze bewerkingen hebben een aantal mooie eigenschappen, zoals:

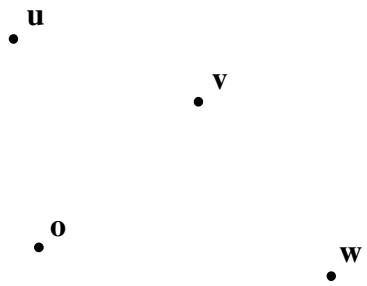
$$\begin{gathered}
\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u} \\
\mathbf{u}+\mathbf{o}=\mathbf{o}+\mathbf{u}=\mathbf{u} \\
(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \\
1\mathbf{u}=\mathbf{u} \\
\lambda(\mu\mathbf{u})=(\lambda\mu)\mathbf{u} \\
\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\lambda\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v} \\
(\lambda+\mu)\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{u}
\end{gathered}$$

We spreken daarom soms liever van vectoren dan van punten. Bij een vector denken we aan een pijl (verplaatsing) vanuit de oorsprong naar het bijbehorende punt. We zullen beide opvattingen gebruiken en dus de ene keer spreken over punten en de andere keer over vectoren. Bedenk wel dat vectoren bij ons altijd aangrijpen (starten) in de oorsprong, dit in tegenstelling tot de in andere contexten gebruikte zogenaamde "vrije" vectoren, die in elk punt kunnen aangrijpen. In feite identificeren we een vector met zijn eindpunt. In de praktijk leidt dit niet tot verwarring. De meetkundige betekenis van optellen is zo dat de eindpunten van de vectoren $\mathbf{o}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ en $\mathbf{v}$ (in die volgorde) de hoekpunten vormen van een parallellogram. [1]



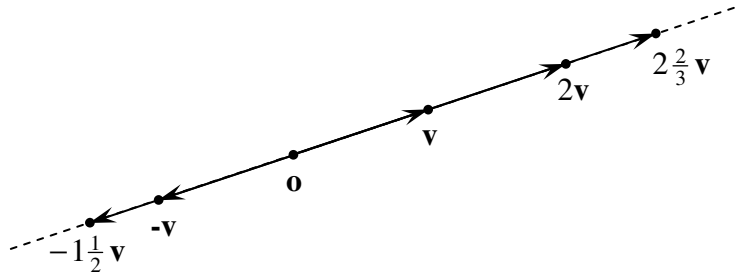
[1] Als $\mathbf{o}$, $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ op een lijn liggen, dan noemen we het parallellogram ontaard.

Opgave 1.1. *In de figuur hieronder staan de punten* **o, u** , **v** *en* **w.** *Het punt* **o** *is de oorsprong. Neem de figuur over en bepaal met de parallellogram-constructie de punten* $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$ en $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ en ga na dat deze punten samenvallen.



Opgave 1.2. *Laat met een algebraïsche berekening zien dat voor elk drietal punten* **u**, **v** *en* **w** *ten opzichte van een gekozen oorsprong* **o** *geldt:* $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$. Schrijf hiervoor **u**, **v** *en* **w** uit in coördinaten: $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$ en $\mathbf{w}=(w_1, w_2, w_3)$.

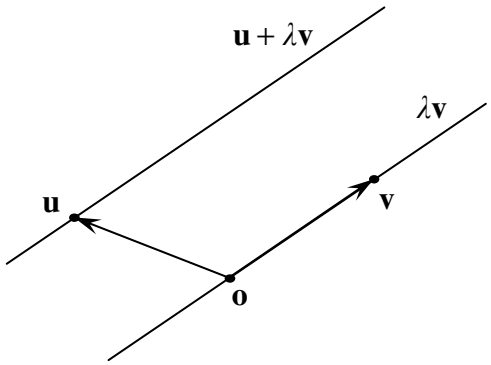
Bij de scalaire vermenigvuldiging van een vector $\mathbf{v}$ met een positief getal λ ontstaat een vector $\lambda\mathbf{v}$, die in dezelfde richting wijst als $\mathbf{v}$ en λ keer zo lang is. Bij vermenigvuldiging met een negatief getal λ is de vector $\lambda\mathbf{v}$ $|\lambda|=-\lambda$ keer zo lang als $\mathbf{v}$, en is zijn richting tegengesteld aan die van $\mathbf{v}$.



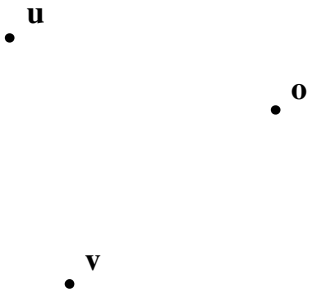
Opgave 1.3. *Laat met een algebraïsche berekening zien dat voor elk getal* λ *en elk tweetal punten* **u** en **v** *ten opzichte van een gekozen oorsprong* **o** *geldt:* $\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$. Schrijf hiervoor **u** *en* **v** *weer* uit in coördinaten.

We schrijven meestal $-\mathbf{v}$ in plaats van $-1\mathbf{v}$. En voor $\mathbf{u}+(-\mathbf{v})$ schrijven we kortweg $\mathbf{u}-\mathbf{v}$. De bijbehorende rekenregels doen vertrouwd aan. Zo is $\lambda(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} - \lambda\mathbf{v}$, $-(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = -\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}-\mathbf{u}$ en $\mathbf{u}-(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}-\mathbf{v}-\mathbf{w}$.

Is $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, dan vormen alle veelvouden $\lambda\mathbf{v}$ (waarbij λ loopt door $\mathbb{R}$) een lijn, genaamd de **drager** van $\mathbf{v}$. Tellen we bij ieder punt van de lijn $\lambda\mathbf{v}$ een vaste vector $\mathbf{u}$ op, dan krijgen we de lijn $\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}$, die door $\mathbf{u}$ gaat en parallel is aan de drager van $\mathbf{v}$.



Opgave 1.4. *Hieronder staan de punten* **o**, **u** *en* **v**. *Punt* **o** *is de oorsprong. Neem de figuur over en teken de punten* $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ *en* $\mathbf{v}-\mathbf{u}$ *erbij.*



Opgave 1.5. *Hieronder staan twee punten* **a** *en* **b**.

a. Neem de figuur over en kies zelf een plaats voor de oorsprong **o**. *Zet vervolgens de punten* $2\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}$ *en* $3\mathbf{b}-2\mathbf{a}$ *erbij.*

b. Neem de figuur nogmaals over en kies nu een andere plaats voor de oorsprong. Zet vervolgens weer de punten $2\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}$ *en* $3\mathbf{b}-2\mathbf{a}$ *erbij.*

c. Vergelijk de figuren die je bij a. en bij b. hebt gekregen. Valt je iets op?

d. Teken in beide figuren ook het punt $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ *erbij? Krijg je weer hetzelfde punt?*

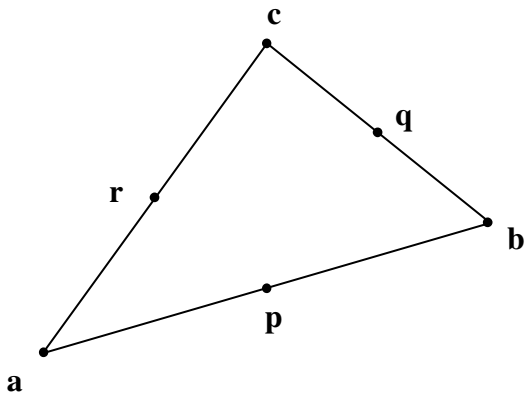
e. Voor welke getallen λ *en* μ *zal de plaats van het punt* $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$ *niet afhangen van de plaats van de oorsprong? Formuleer een vermoeden.*

f. Leg uit dat elk punt van de vorm $\lambda\mathbf{a}+(1-\lambda)\mathbf{b}$ *op de lijn door* **a** *en* **b** *ligt.*

g. Leg uit dat de plaats van een punt van de vorm $\lambda\mathbf{a}+(1-\lambda)\mathbf{b}$ *niet afhangt van de plaats van de oorsprong.*

Opgave 1.6. *Gegeven is een driehoek met hoekpunten* **a**, **b** *en* **c**. *We kiezen een zekere oorsprong* **o** *in het Euclidische vlak*[2] *(alhoewel alles wat we verder in deze opgave opschrijven onafhankelijk is van deze keuze). Het punt dat midden tussen* **a** *en* **b** *ligt is* **p**, *het punt dat midden tussen* **b** *en* **c** *ligt is* **q** *en het punt dat midden tussen* **a** *en* **c** *ligt is* **r**. *Hierna is deze driehoek getekend.*

[2] Of we in het Euclidische vlak (2-dimensionaal) of de Euclidische ruimte (3-dimensionaal) werken, doet niet ter zake.



a. Druk de middens **p**, **q** *en* **r** *uit in de hoekpunten* **a**, **b** *en* **c**.

b. Druk ook de hoekpunten **a**, **b** *en* **c** *uit in de middens* **p**, **q** *en* **r**. *Hint: Teken de drie middenparallellen.*

c. Toon aan dat het punt $\mathbf{z} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$ *ligt op de zwaartelijn*[3] *door* **a**.

d. Toon aan dat de drie zwaartelijnen van de driehoek door één punt gaan. (Dit punt wordt het zwaartepunt van de driehoek genoemd.)

[3] Een zwaartelijn in een driehoek is de lijn door een hoekpunt en het midden van de overstaande zijde.

2 Het inwendig product

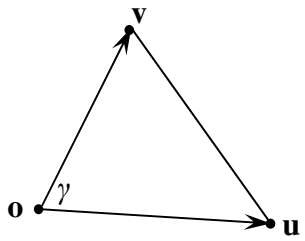
> Toen algebra en meetkunde gescheiden vakken waren, was hun voortgang langzaam en hun nut beperkt. Maar sinds beide vakken zijn verenigd, hebben ze elkaar onderling versterkt en zijn ze gezamenlijk opgetrokken naar perfectie.
> *Joseph-Louis Lagrange* (1736-1813)

De lengte van een vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ is $\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$. Dit is in te zien door de stelling van Pythagoras twee maal toe te passen in de blokfiguur op pagina 2. De lengte van vector **u** noteren we met **|u|**.

Opgave 2.1. *Bereken in elk van de volgende gevallen de lengtes van de twee genoemde vectoren en de afstand tussen hun eindpunten.*

a. $\mathbf{a} = (1,2,3)$ *en* $\mathbf{b} = (2,2,-2)$
b. $\mathbf{c} = (1,-2,4)$ *en* $\mathbf{d} = (3,2,1)$
c. $\mathbf{e} = (0,2,3)$ *en* $\mathbf{f} = (1,2,-1)$

Opgave 2.2. *Gegeven is een driehoek in de ruimte met hoekpunten* **o**, **u** *en* **v**. *De hoek tussen de vectoren* **u** *en* **v** *noemen we* γ . *Hierbij is* $0 \le \gamma \le 180^\circ$.



a. Ga na dat $|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2$ *als* $\gamma = 90^\circ$.

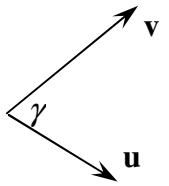
b. Ga na dat $|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 < |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2$ *als* $\gamma > 90^\circ$
en ook dat $|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 > |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2$ *als* $\gamma < 90^\circ$.

Opgave 2.3. *Ga in elk van de volgende gevallen na of de hoek tussen de twee genoemde vectoren recht, scherp of stomp is.*

a. $\mathbf{a} = (1,2,3)$ *en* $\mathbf{b} = (2,2,-2)$
b. $\mathbf{c} = (1,-2,4)$ *en* $\mathbf{d} = (3,2,1)$
c. $\mathbf{e} = (0,2,3)$ *en* $\mathbf{f} = (1,2,-1)$

Opgave 2.4. *Gegeven zijn de vectoren* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *en* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. *Neem aan dat* $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ *en* $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$. *De hoek tussen* **u** *en* **v** *noemen we* γ. *Toon aan dat het volgende geldt:*

$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 = 0$ *precies dan als* $\gamma = 90^\circ$
$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 < 0$ *precies dan als* $\gamma > 90^\circ$
$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 > 0$ *precies dan als* $\gamma < 90^\circ$



Uit opgave 2.4 blijkt dat het getal $u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$ iets zegt over de hoek γ tussen de vectoren **u** en **v**. We schrijven in het vervolg kortweg $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ voor $u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$ en noemen $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ het **inwendig product** of kortweg **inproduct** van de vectoren **u** en **v** in $\mathbb{R}^3$. Merk op dat het inproduct $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ geen vector is, maar een reëel getal. Omdat reële getallen ook scalairen genoemd worden, wordt het inproduct ook wel het **scalaire product** genoemd. Terugkijkend vinden we nu de volgende stelling:

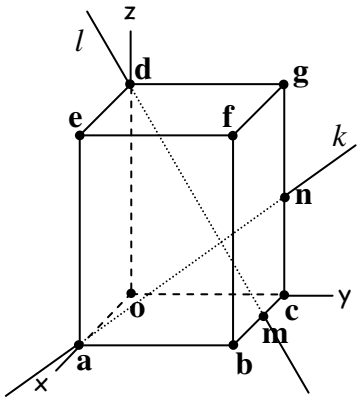
Stelling 2.1. *Als* $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ *en* $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, *dan geldt het volgende:*
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ *precies dan als* **u** *loodrecht staat op* **v**,
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$ *precies dan als de hoek tussen* **u** *en* **v** stomp is,
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$ *precies dan als de hoek tussen* **u** *en* **v** scherp is.

Opgave 2.5. *Ga in elk van de gevallen van opgave 2.3 met behulp van het inproduct na of de hoek tussen de twee vectoren recht, scherp of stomp is.*

Beschouw de lijn *k* door het punt **u** die parallel is aan een vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$. Elk punt van de lijn *k* kan worden geschreven als $\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ (voor zekere λ in $\mathbb{R}$). Omgekeerd ligt elk punt van de vorm $\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ op de lijn *k*. We noemen $\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ (met λ in $\mathbb{R}$) een **parametervoorstelling** van lijn *k*. De vector **u** wordt een **steunvector** van *k* genoemd en de vector **v** een **richtingsvector**. Het getal λ is de **parameter**.

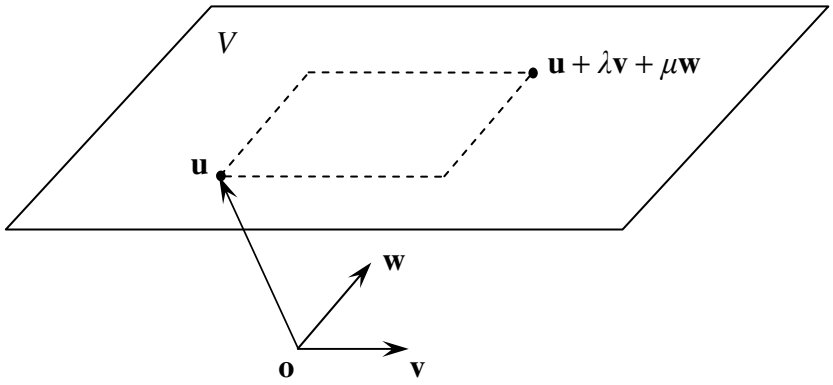
We stellen een parametervoorstelling op van de lijn *m* door de punten **a** = (2, 1, 4) en **b** = (4, 3, 0). Een steunvector van deze lijn is bijvoorbeeld **a** = (2, 1, 4). Een richtingsvector van deze lijn is bijvoorbeeld **b** – **a** = (2, 2, -4). Een parametervoorstelling van lijn *m* is (2, 1, 4) + λ·(2, 2, -4). Maar er zijn veel meer mogelijkheden. Ook (4, 3, 0) + λ·(1, 1, -2) is een parametervoorstelling van *m*. Geef zelf nog enkele andere parametervoorstellingen van *m*.

Opgave 2.6. *De punten* $\mathbf{a} = (3,0,0)$, $\mathbf{c} = (0,4,0)$ *en* $\mathbf{d} = (0,0,6)$ *zijn hoekpunten van een balk* **oabc.defg**. *Punt* **m** *is het midden van ribbe* **bc** *en punt* **n** *is het midden van ribbe* **cg**. *Lijn k gaat door de punten* **a** *en* **n** *en lijn l gaat door de punten* **d** *en* **m**.

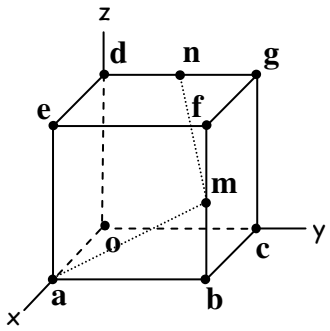


a. Stel parametervoorstellingen op van de lijnen k en l.
b. Ga met een algebraïsche berekening na dat de lijnen k en l elkaar snijden en bereken de coördinaten van hun snijpunt.

Zoals we weten, wordt een vlak in de ruimte bepaald door drie punten, die niet op een lijn liggen. Dit betekent dat een vlak wordt bepaald door één punt in dat vlak en twee richtingsvectoren van dat vlak, die niet proportioneel zijn. Preciezer geformuleerd: elk punt in een vlak *V*, dat gaat door een punt **u**, met niet-proportionele richtingsvectoren **v** en **w,** is van de vorm $\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}$ voor zekere getallen λ en μ. Omgekeerd ligt elk punt van de vorm $\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}$ in *V*. Een parametervoorstelling van *V* is $\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}$ (met λ en μ in $\mathbb{R}$). De vector u is een steunvector van vlak *V*.



Opgave 2.7. *Gegeven is een kubus* **oabc.defg** *met ribbe 4. Punt* **m** *is het midden van ribbe* **bf** *en punt* **n** *is het midden van ribbe* **dg**.



a. Laat zien dat de lijnen **ac** *en* **db** *loodrecht op elkaar staan.*
b. Is de hoek tussen de lijnstukken **am** en **nm** *scherp, recht of stomp?*

Een punt **p** *ligt zodanig op de z-as, dat lijnstuk* **bp** *loodrecht staat op het vlak door* **a**, **m** *en* **c**.

c. Bereken de coördinaten van punt **p**. *Hint: een lijn staat loodrecht op een vlak, als hij loodrecht staat op twee niet-proportionele richtingsvectoren van dat vlak.*

Het inproduct heeft een aantal mooie eigenschappen. Het inproduct is **symmetrisch**, dat wil zeggen dat voor alle vectoren **u** en **v** geldt: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.
Het inproduct is ook **bilineair**, dat wil zeggen dat voor alle vectoren **u** en **v** en voor alle reële getallen λ geldt:

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$$
$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$$
$$(\lambda\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=\lambda(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$$
$$\mathbf{u}\cdot(\lambda\mathbf{v})=\lambda(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$$

Het bewijs van deze regels gaat door $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$ en $\mathbf{w}=(w_1, w_2, w_3)$ te schrijven en vervolgens linker- en rechterlid uit te schrijven in coördinaten.

Opgave 2.8. *Controleer door middel van uitschrijven dat:*
a. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$
b. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$
c. $(\lambda\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=\lambda(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$

Een andere mooie eigenschap van het inproduct is, dat ook de lengte van een vector ermee kan worden berekend. Er geldt namelijk voor elke vector $\mathbf{u}$ dat $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=|\mathbf{u}|^2$ ofwel $|\mathbf{u}|=\sqrt{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})}$.

Opgave 2.9. *Controleer het bovenstaande door middel van uitschrijven.*

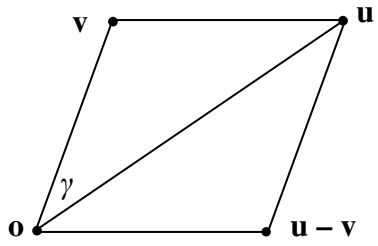
Opgave 2.10. *Gegeven zijn twee vectoren* $\mathbf{u}$ *en* $\mathbf{v}$ *in* $\mathbb{R}^3$. *Bewijs met behulp van de regels voor inproducten de volgende formules:*
a. $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2=|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2+2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$
b. $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2=|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2-2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$
c. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})=|\mathbf{u}|^2-|\mathbf{v}|^2$
d. $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2+|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2=2|\mathbf{u}|^2+2|\mathbf{v}|^2$

Opmerking. *Uit opgave 2.10 c volgt dat de diagonalen in een parallellogram loodrecht op elkaar staan, precies dan als het parallellogram een ruit is. Ga dit na. De formule bij onderdeel d staat bekend als de parallellogramwet. Als je van een parallellogram de lengtes van de zijden en de lengte van één van de diagonalen kent, dan kun je met deze formule de lengte van de andere diagonaal berekenen.*

De volgende stelling geeft een antwoord op de vraag naar de meetkundige betekenis van het inwendig product.

Stelling 2.2. *Als* $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ *en* $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$*, dan geldt* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos\gamma$*, waarbij* γ *de hoek is tussen* **u** *en* **v**.

Bewijs. We tekenen eerst een geschikt plaatje.



Vervolgens bekijken we de lengtes van de zijden van de driehoek met hoekpunten **o**, **u** en **v**. De afstand van **o** tot **u** is gelijk aan $|\mathbf{u}|$ en de afstand van **o** tot **v** is gelijk aan $|\mathbf{v}|$. De afstand van **u** tot **v** is gelijk aan de afstand van **o** tot **u – v** en die is gelijk aan $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$. Passen we nu de cosinusregel op deze driehoek, dan vinden we dat: $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2 \cdot |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos\gamma$.

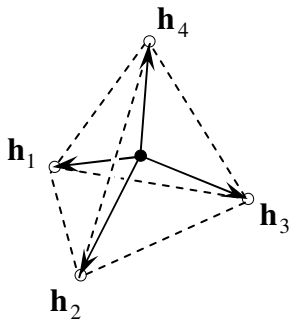
Het linkerlid is volgens opgave 2.10 b gelijk aan: $|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2 \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$. Dus geldt: $|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2 \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2 \cdot |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos\gamma$, waaruit de stelling eenvoudig (door schrappen) volgt. □

Opgave 2.11. *Bereken de hoek die de vectoren* $\mathbf{a} = (1,2,3)$ *en* $\mathbf{b} = (4,5,6)$ *met elkaar maken in graden nauwkeurig.*

Opgave 2.12. *Bereken de hoek tussen de lijnstukken* **am** en **nm** *in de kubus van opgave 2.7 in graden nauwkeurig.*

Opgave 2.13. *Leg uit hoe Stelling 2.1 direct volgt uit Stelling 2.2.*

Opgave 2.14. *Een model van het CH_4-molecuul ziet er als volgt uit. Het koolstofatoom zit in het zwaartepunt van een (regelmatige) tetraëder waarbij de waterstofatomen in de hoekpunten zitten. Kies de oorsprong zo, dat deze bij het C-atoom ligt. Noem de vectoren vanuit het C-atoom naar een van de H-atomen respectievelijk $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$, $\mathbf{h}_3$ en $\mathbf{h}_4$. De lengtes van de vier vectoren $|\mathbf{h}_i|$ zijn gelijk en de zes hoeken tussen $\mathbf{h}_i$ en $\mathbf{h}_j$ $(i \neq j)$ zijn ook gelijk. Omdat het koolstofatoom in het zwaartepunt zit, is $\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_3 + \mathbf{h}_4$ gelijk aan de nulvector.*

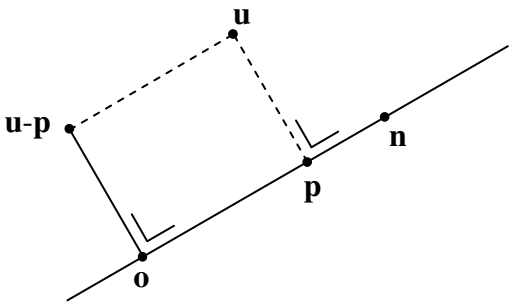


Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen $\mathbf{h}_i$ en $\mathbf{h}_j$ $(i \neq j)$.
Hint: Bekijk $\mathbf{h}_1 \cdot (\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_3 + \mathbf{h}_4)$.

Het inproduct is zeer geschikt om de loodrechte projectie **p** van een vector **u** op de drager van een vector **n** (met $\mathbf{n} \neq \mathbf{o}$) te berekenen. De drager van **n** is de lijn die precies bestaat uit alle veelvouden van de vector **n**. Dus **p** is een veelvoud van **n**, ofwel $\mathbf{p} = \lambda \cdot \mathbf{n}$ voor een zeker getal λ. We kunnen nu de volgende stelling bewijzen.[4]

Stelling 2.3. *Gegeven zijn een vector* **u** *en een vector* $\mathbf{n} \neq \mathbf{o}$. *De loodrechte projectie* **p** *van* **u** *op de drager van* **n** *wordt gegeven door* $\mathbf{p} = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \cdot \mathbf{n}$.

Bewijs. We tekenen weer eerst een geschikt plaatje.



[4] Deze stelling geldt zowel in $\mathbb{R}^2$ als in $\mathbb{R}^3$.

De vector $\mathbf{p}$ is de loodrechte projectie van $\mathbf{u}$ op $\mathbf{n}$, dus de vector $\mathbf{u}-\mathbf{p}$ staat loodrecht op $\mathbf{n}$. Dus $(\mathbf{u}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{n}=0$. Vullen we nu $\mathbf{p}=\lambda\cdot\mathbf{n}$ in, dan vinden we dat $(\mathbf{u}-\lambda\mathbf{n})\cdot\mathbf{n}=0$. Dus $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}-\lambda\cdot(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})=0$, ofwel $\lambda=\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}=\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}$.

De projectievector $\mathbf{p}$ is dus gelijk aan $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n}$. □

Een vector $\mathbf{n}\neq\mathbf{o}$ in $\mathbb{R}^3$ heet een **normaalvector** van een vlak *V*, als $\mathbf{n}$ loodrecht staat op alle richtingen in het vlak *V*.

Opgave 2.15. *Laat U het vlak zijn met normaalvector* $\mathbf{n}=(1, 1, 0)$*, dat gaat door de oorsprong* $\mathbf{o}$*.*

a. Bepaal het beeld $\mathbf{p}$ *van* $\mathbf{u}=(4, 5, 6)$ *bij loodrechte projectie op de drager van* $\mathbf{n}$*.*

b. Bepaal het beeld $\mathbf{q}$ *van* $\mathbf{u}=(4, 5, 6)$ *bij loodrechte projectie op vlak U. Hint: Ga na dat* $\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{u}$ *en maak daar gebruik van.*

c. Bepaal het beeld $\mathbf{s}$ *van* $\mathbf{u}=(4, 5, 6)$ *bij spiegeling in vlak U.*

Opgave 2.16. *Laat V het vlak zijn door een punt* $\mathbf{q}$ en *met normaalvector* $\mathbf{n}\neq\mathbf{o}$*. Bewijs dat voor een vector* $\mathbf{v}$ *geldt:*

a. Als $\mathbf{v}$ *in vlak V ligt, dan is* $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}$.

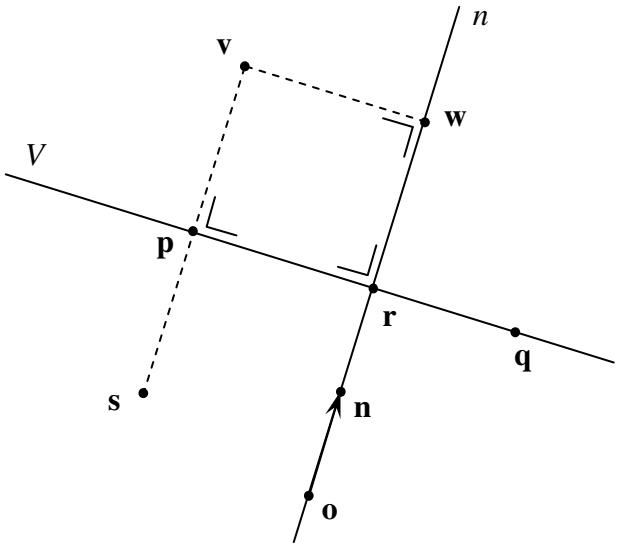
b. Als $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}$*, dan ligt* $\mathbf{v}$ *in vlak V.*

Opgave 2.17. *Laat W het vlak zijn met normaalvector* $\mathbf{n}=(1, 2, -1)$*, dat gaat door het punt* $\mathbf{q}=(2, 1, 3)$*. Er zijn reële getallen a, b, c en d zo dat voor een vector* $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$ *geldt:* $\mathbf{v}$ *ligt in vlak W, precies dan als* $av_1+bv_2+cv_3=d$*. Bepaal de getallen a, b, c en d.*

Opgave 2.18. *Laat V het vlak zijn dat gegeven wordt door de vergelijking* $3v_1+2v_2-5v_3=8$*, d.w.z. een vector* $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$ *ligt in vlak V, precies dan als* $3v_1+2v_2-5v_3=8$*. Vind vectoren* $\mathbf{q}$ *en* $\mathbf{n}$ *zo dat geldt: een vector* $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$ *ligt in vlak V, precies dan als* $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}$.

Stelling 2.4. *Laat V het vlak zijn door een punt* **q** en *met normaalvector* $\mathbf{n} \neq \mathbf{o}$. *Laat* **p** *de loodrechte projectie van een punt* **v** *op vlak V zijn en* **s** *het spiegelbeeld van* **v** *in vlak V.*
Dan geldt $\mathbf{p} = \mathbf{v} - \dfrac{((\mathbf{v}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n}$ *en* $\mathbf{s} = \mathbf{v} - \dfrac{2\cdot((\mathbf{v}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n}$.

Bewijs. We kijken op een zodanige wijze naar de situatie, dat we het vlak V van opzij zien. Hierdoor zien we V als een lijn. Lijn n is de drager van de normaalvector **n**. De loodrechte projecties van **v** en **q** op lijn n noemen we **w** respectievelijk **r**. Het plaatje ziet er dan zo uit.



Met behulp van stelling 2.3 zien we dat $\mathbf{w}-\mathbf{r} = \dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n} - \dfrac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n}$. Uit de bilineariteit van het inproduct volgt nu dat $\mathbf{w}-\mathbf{r} = \dfrac{((\mathbf{v}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n}$.

We zien in het plaatje dat $\mathbf{v}-\mathbf{p} = \mathbf{w}-\mathbf{r}$ en dat $\mathbf{v}-\mathbf{s} = 2\cdot(\mathbf{w}-\mathbf{r})$.

Dus $\mathbf{p} = \mathbf{v} - (\mathbf{w}-\mathbf{r}) = \mathbf{v} - \dfrac{((\mathbf{v}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n}$

en $\mathbf{s} = \mathbf{v} - 2\cdot(\mathbf{w}-\mathbf{r}) = \mathbf{v} - \dfrac{2\cdot((\mathbf{v}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\cdot\mathbf{n}$ □

Opgave 2.19. *Laat V het vlak zijn door het punt* $\mathbf{q} = (1, 2, 3)$ *en met normaalvector* $\mathbf{n} = (1, 1, 0)$. *Verder is gegeven het punt* $\mathbf{v} = (4, 5, 6)$.
a. Bereken de coördinaten van de loodrechte projectie van **v** *op V.*
b. Bereken de coördinaten van het spiegelbeeld van **v** *in V.*
c. Bereken de afstand van punt **v** *tot vlak V.*

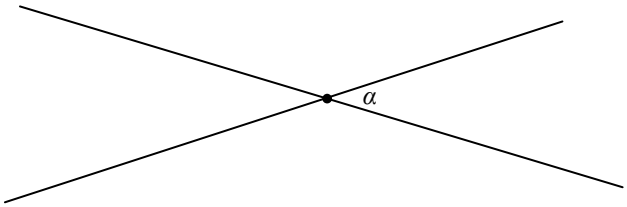
Opgave 2.20. *Laat V het vlak zijn door een punt* **q** en *met normaalvector* $\mathbf{n} \neq \mathbf{o}$ *en laat* **v** *een willekeurig punt in de ruimte zijn.*
Laat zien dat de afstand van punt **v** *tot vlak V gelijk is aan* $\dfrac{|(\mathbf{v}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$.

Opgave 2.21. *Laat W het vlak zijn met vergelijking* $3v_1 + 4v_2 - 5v_3 = 20$ *en* $\mathbf{u} = (6, 5, 2)$ *een punt. Bereken de afstand van punt* **u** *tot vlak W.*

Opgave 2.22. *Laat V het vlak zijn met vergelijking* $av_1 + bv_2 + cv_3 = d$.
Toon aan dat de afstand van punt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *tot vlak V gelijk is aan* $\dfrac{|au_1 + bu_2 + cu_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

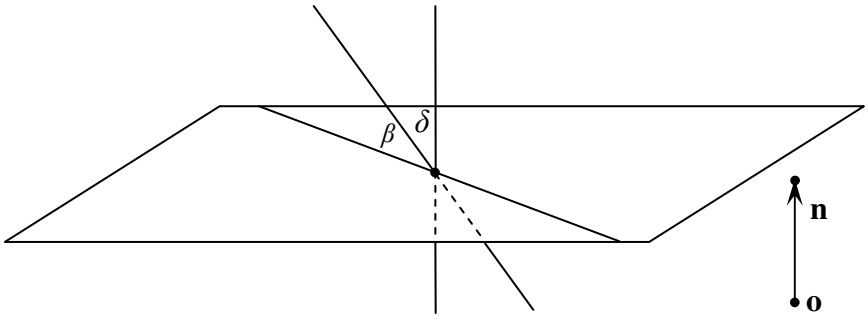
Met behulp van het inproduct kunnen we de hoek tussen twee vectoren berekenen. Met enig nadenken kunnen we hieruit afleiden hoe de hoek tussen twee lijnen, de hoek tussen een lijn en een vlak en de hoek tussen twee vlakken berekend kan worden. We geven de resultaten zonder bewijs. De details worden ingevuld in opgave 2.23 tot en met 2.26.

Bekijk twee snijdende lijnen met richtingsvectoren **v** respectievelijk **w**. Deze lijnen snijden elkaar onder vier hoeken die of alle vier gelijk zijn aan $90°$ of twee aan twee gelijk zijn. Onder de hoek tussen de twee lijnen verstaan we de kleinste van deze vier hoeken. Voor deze hoek α geldt: $\cos\alpha = \dfrac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}|}{|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|}$.
Als de twee lijnen elkaar kruisen, dan kunnen we een van de lijnen zodanig verplaatsen dat deze de andere lijn snijdt. Onder de hoek van de twee lijnen verstaan we dan de hoek tussen de verplaatste lijn en de andere lijn.



Opgave 2.23. *Waarom staat in de formule, waarmee de hoek tussen twee lijnen wordt berekend, het inproduct tussen absolute waarde strepen?*

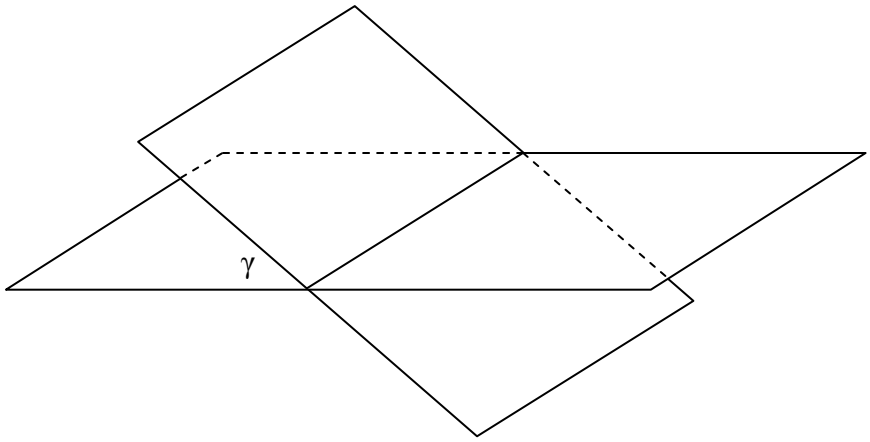
Bekijk een lijn met richtingsvector **v** en een vlak met normaalvector **n**. Tenzij de lijn loodrecht staat op het vlak, verstaan we onder de hoek tussen de lijn en het vlak de hoek tussen de lijn en zijn projectie op het vlak. Voor deze hoek β geldt: $\sin\beta = \dfrac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{n}|}$.



Opgave 2.24. *In de figuur hierboven is door het snijpunt van lijn en vlak een lijn getekend met de normaalvector* **n** als richtingsvector. *Leg uit dat voor de hoek* δ *tussen die twee lijnen geldt:* $\cos\delta = \dfrac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{n}|}$ en dat $\sin\beta = \cos\delta$.

Opgave 2.25. Leg uit dat de formule $\sin\beta = \dfrac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{n}|}$ ook klopt, als de lijn wel loodrecht staat op het vlak.

Bekijk twee niet-evenwijdige vlakken met normaalvectoren **m** respectievelijk **n**. Onder de hoek tussen de twee vlakken verstaan we de kleinste van de hoeken die je ziet als je langs de richting van de snijlijn van de vlakken kijkt. Voor deze hoek γ geldt: $\cos\gamma = \dfrac{|\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{m}|\cdot|\mathbf{n}|}$.



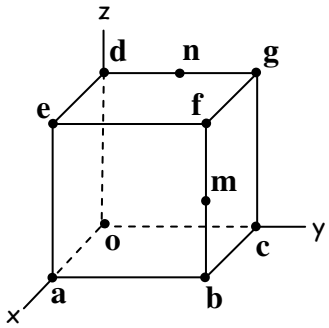
Opgave 2.26. *Leg uit dat de hoek tussen twee snijdende vlakken gelijk is aan de hoek tussen de dragers van de normaalvectoren van die vlakken.*

Opgave 2.27. *Gegeven is een kubus* **oabc.defg** *met ribbe 4. Punt* **m** *is het midden van ribbe* **bf** *en punt* **n** *is het midden van ribbe* **dg**.

a. Bereken de afstand van punt **n** *tot vlak* **afc**.
b. Bereken de afstand van punt **m** *tot lijn* **on**.

Bereken in graden nauwkeurig:

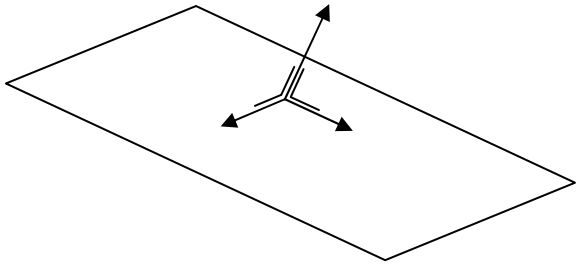
c. de hoek tussen de lijnen **an** *en* **md**.
d. de hoek tussen lijn **mn** *en vlak* **afc**.
e. de hoek tussen vlak **abgd** *en vlak* **bcde**.
f. de hoek tussen vlak **afc** *en vlak* **bge**.



3 Het uitwendig product

Wees niet bezorgd over je moeilijkheden met wiskunde.
Ik kan je verzekeren dat de mijne groter zijn.
Albert Einstein (1879-1955)

In onze Cartesische ruimte $\mathbb{R}^3$ hebben we nu en dan behoefte aan een vector, niet de nulvector, die loodrecht staat op twee gegeven vectoren (die niet elkaars veelvoud zijn). Bijvoorbeeld wanneer we een normaalvector zoeken van een gegeven vlak.



Intuïtief is duidelijk dat zo'n vector altijd wel bestaat, maar in de praktijk valt het vaak niet mee om er direct een te vinden. Er moet aan gerekend worden, zoals blijkt uit het volgende voorbeeld.

We zoeken een vector $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ met $\mathbf{n} \neq \mathbf{o}$ die loodrecht staat op de vectoren $\mathbf{a} = (2, -2, 3)$ en $\mathbf{b} = (3, 4, -5)$.
Voor de gezochte vector **n** moet gelden: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0$ en $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0$. Dit houdt in dat: $2n_1 - 2n_2 + 3n_3 = 0$ en $3n_1 + 4n_2 - 5n_3 = 0$. Dit zijn twee vergelijkingen met drie onbekenden. We gaan eerst één van de onbekenden elimineren, bijvoorbeeld n_1. Door de eerste vergelijking met 3 te vermenigvuldigen en de tweede vergelijking met 2 en daarna het verschil van beide vergelijkingen te nemen, vinden we: $-14n_2 + 19n_3 = 0$. Nu zien we dat we $n_2 = 19$ en $n_3 = 14$ kunnen nemen. Vullen we dit in in de eerste vergelijking, dan krijgen we: $2n_1 - 2 \cdot 19 + 3 \cdot 14 = 0$ ofwel $n_1 = -2$. Dus vinden we $\mathbf{n} = (-2, 19, 14)$. Een controle bevestigt dat $\mathbf{n} = (-2, 19, 14)$ loodrecht staat op de vectoren **a** en **b**. Kun je nog meer vectoren geven die loodrecht staan op zowel **a** als **b**?

Opgave 3.1. *Bepaal in elk van de volgende gevallen een vector* **n** met $\mathbf{n} \neq \mathbf{o}$*, die loodrecht staat op de twee gegeven vectoren.*

a. $\mathbf{a} = (1,3,2)$ en $\mathbf{b} = (1,0,1)$

b. $\mathbf{c} = (0,5,2)$ en $\mathbf{d} = (2,0,-5)$

c. $\mathbf{e} = (4,3,-1)$ en $\mathbf{f} = (1,2,6)$

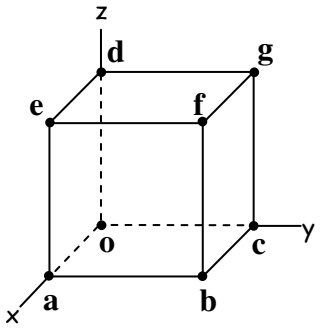
Opgave 3.2. *Gegeven is een kubus* **oabc.defg**, *die in een assenstelsel is geplaatst, zoals aangegeven in de onderstaande figuur.*

Bepaal (algebraïsch of meetkundig) van elk van de volgende vlakken een normaalvector.

a. vlak **abgd**

b. vlak **beg**

c. vlak **acf**



We kunnen het bovenstaande procedé om een vector te vinden, die loodrecht staat op twee gegeven vectoren, ook in het algemeen uitvoeren. Bij twee vectoren $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ en $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, beide ongelijk aan de nulvector, zoeken we een vector $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, ook ongelijk aan de nulvector, die loodrecht staat op zowel **u** als **v**. Er moet dan gelden: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ en $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$. Uitgeschreven in coördinaten: $u_1 \cdot n_1 + u_2 \cdot n_2 + u_3 \cdot n_3 = 0$ en $v_1 \cdot n_1 + v_2 \cdot n_2 + v_3 \cdot n_3 = 0$. We kiezen er voor om de onbekende n_1 te elimineren. Hiervoor vermenigvuldigen we de eerste vergelijking met v_1 en de tweede vergelijking met u_1. Dit geeft: $u_1 v_1 \cdot n_1 + u_2 v_1 \cdot n_2 + u_3 v_1 \cdot n_3 = 0$ en $u_1 v_1 \cdot n_1 + u_1 v_2 \cdot n_2 + u_1 v_3 \cdot n_3 = 0$. Nemen we vervolgens het verschil van beide vergelijkingen, dan vinden we:

$(u_2 v_1 - u_1 v_2) \cdot n_2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \cdot n_3 = 0$ ofwel

$(u_3 v_1 - u_1 v_3) \cdot n_3 = (u_1 v_2 - u_2 v_1) \cdot n_2$.

Dit is een vergelijking waarin de onbekende n_1 niet meer voorkomt. We kunnen nu nemen: $n_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3$ en $n_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1$. Vervolgens vullen we de gekozen waarden in in de eerste vergelijking:

$u_1 \cdot n_1 + u_2 \cdot (u_3 v_1 - u_1 v_3) + u_3 \cdot (u_1 v_2 - u_2 v_1) = 0$, ofwel

$u_1 \cdot n_1 + u_2u_3v_1 - u_1u_2v_3 + u_1u_3v_2 - u_2u_3v_1 = 0$, ofwel
$u_1 \cdot n_1 = u_1u_2v_3 - u_1u_3v_2$, delen door u_1 (!) geeft
$n_1 = u_2v_3 - u_3v_2$.

We vinden zo de vector $\mathbf{n} = (u_2v_3 - u_3v_2,\, u_3v_1 - u_1v_3,\, u_1v_2 - u_2v_1)$. Maar in de berekening hierboven hebben we ergens gedeeld door u_1, terwijl dit getal wel eens 0 zou kunnen zijn. Het is echter een eenvoudige opgave om na te gaan dat de zojuist gevonden vector **n** loodrecht staat op de vectoren **u** en **v**, ook in het geval dat $u_1 = 0$.

Opgave 3.3. *Ga met een rechtstreekse berekening na dat de vector* $\mathbf{n} = (u_2v_3 - u_3v_2,\, u_3v_1 - u_1v_3,\, u_1v_2 - u_2v_1)$ *inderdaad loodrecht staat op de vectoren* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *en* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Maar de vector **n** zou wel eens de nulvector kunnen zijn. Dit is inderdaad het geval als **u** en **v** **proportioneel** zijn, d.w.z. veelvouden van elkaar zijn, zoals eenvoudig is na te gaan. Maar of het ook kan gebeuren, als **u** en **v** geen veelvouden van elkaar zijn, vereist een scherpere blik. We stellen de oplossing van dit probleem nog even uit en gebruiken de gevonden uitdrukking als definitie voor het uitwendig product.

Het **uitwendig product** of **uitproduct** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ van de vectoren **u** en **v** wordt gedefinieerd door: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2,\, u_3v_1 - u_1v_3,\, u_1v_2 - u_2v_1)$.
Merk op dat het uitproduct van twee vectoren weer een vector in $\mathbb{R}^3$ is, dit in tegenstelling tot het inproduct van twee vectoren, dat een reëel getal is. Het uitproduct heeft een aantal mooie eigenschappen, die we eerst zullen bespreken. Net als het inproduct is ook het uitwendig product bilineair, zodat:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$$
$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$$
$$(\lambda\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$
$$\mathbf{u} \times (\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

In tegenstelling tot het symmetrische inproduct is het uitproduct **anti-symmetrisch**, dat wil zeggen: $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.

Hieruit volgt direct dat $\mathbf{u}\times\mathbf{u}=\mathbf{o}$, met andere woorden het uitproduct van een vector met zichzelf is de nulvector. Immers $\mathbf{u}\times\mathbf{u}=-(\mathbf{u}\times\mathbf{u})$, dus $2(\mathbf{u}\times\mathbf{u})=\mathbf{o}$ en dus is $\mathbf{u}\times\mathbf{u}=\mathbf{o}$.

Ook volgt vrijwel direct dat $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{o}$, als **u** en **v** proportioneel zijn. Immers veronderstel dat $\mathbf{u}=\lambda\mathbf{v}$, dan is $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(\lambda\mathbf{v})\times\mathbf{v}=\lambda(\mathbf{v}\times\mathbf{v})=\mathbf{o}$.

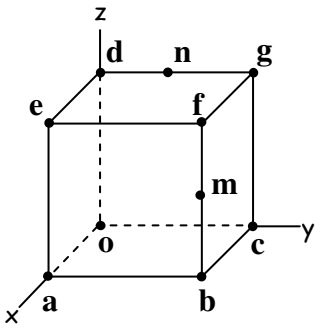
Opgave 3.4. *Controleer door middel van uitschrijven dat:*
a. $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$
b. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times\mathbf{w}=\mathbf{u}\times\mathbf{w}+\mathbf{v}\times\mathbf{w}$
c. $(\lambda\mathbf{u})\times\mathbf{v}=\lambda(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$

Opgave 3.5. *Bereken voor elk van de drie paren vectoren in opgave 3.1 het uitproduct. Vergelijk de antwoorden met de antwoorden op opgave 3.1.*

Opgave 3.6. *Bekijk weer de kubus* **oabc.defg** *van opgave 3.2. Punt* **m** *is het midden van ribbe* **bf** *en punt* **n** *is het midden van ribbe* **dg**.

Bereken van elk van de volgende vlakken een normaalvector.

a. vlak **amc**
b. vlak **amn**
c. vlak **emn**
d. vlak **amg**



Voor inproduct en uitproduct gelden de volgende tripelproductformules.

Stelling 3.1. *Voor* ***u****,* ***v*** *en* ***w*** *gelden de formules:*

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$$
$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}$$

Bewijs. Het bewijs is een kwestie van linker- en rechterlid uitschrijven in coördinaten, waarbij $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ en $\mathbf{w}=(w_1,w_2,w_3)$. Bijvoorbeeld voor de eerste formule vinden we:
$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=u_1(v_2w_3-v_3w_2)+u_2(v_3w_1-v_1w_3)+u_3(v_1w_2-v_2w_1)$

$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = (u_2v_3 - u_3v_2)w_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)w_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)w_3$

En beide uitdrukkingen in het rechterlid zijn inderdaad gelijk. Het bewijs van de tweede formule vergt wat meer schrijfwerk, maar gaat net zo. □

Opgave 3.7. *Bewijs de tweede formule van Stelling 3.1.*

Opgave 3.8. *Bewijs met behulp van de eerste formule van Stelling 3.1. dat* $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = 0$ *en* $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v} = 0$*, ofwel* $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *staat loodrecht op* **u** *en op* **v.**

Stelling 3.2. *Voor* **u** *en* **v** *(beide* $\neq \mathbf{o}$*) geldt:* $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\sin\gamma$*, waarbij* γ *de hoek is tussen de vectoren* **u** *en* **v.**

Bewijs. We laten zien dat $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2\cdot|\mathbf{v}|^2\cdot\sin^2\gamma$. Daarbij worden beide formules van Stelling 3.1 gebruikt. Ga bij het lezen van het bewijs precies na, welke formule er bij elke stap wordt toegepast. Bedenk dat de eerste formule van stelling 3.1 ook van rechts naar links kan worden gelezen.

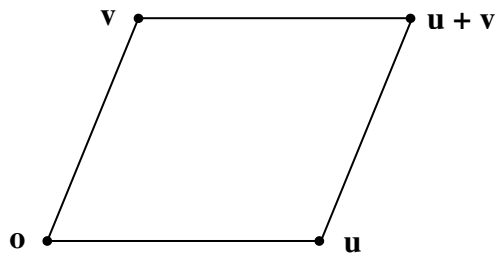
$|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})) =$

$\mathbf{u}\cdot((\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}) = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) =$

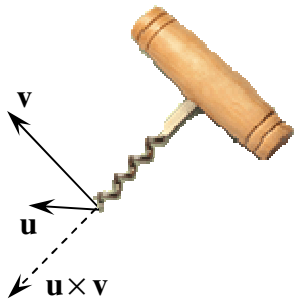
$|\mathbf{u}|^2\cdot|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 = |\mathbf{u}|^2\cdot|\mathbf{v}|^2 - (|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\cos\gamma)^2 =$

$|\mathbf{u}|^2\cdot|\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2\cdot|\mathbf{v}|^2\cdot\cos^2\gamma = |\mathbf{u}|^2\cdot|\mathbf{v}|^2\cdot(1-\cos^2\gamma) = |\mathbf{u}|^2\cdot|\mathbf{v}|^2\cdot\sin^2\gamma.$ □

Een direct gevolg van Stelling 3.2 is dat de lengte van de vector $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ gelijk is aan de oppervlakte van het parallellogram dat wordt opgespannen door de vectoren **u** en **v**, d.w.z. het parallellogram met hoekpunten **o**, **u**, **u+v** en **v** (in die volgorde).



Bekijk nu twee vectoren **u** en **v**, die niet proportioneel zijn. De lengte van de vector $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ wordt volledig bepaald door de lengtes van de vectoren **u** en **v** en de hoek tussen deze twee vectoren. Omdat de vector $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ ook loodrecht moet staan op zowel **u** als **v**, ligt deze hiermee bijna vast. Er zijn nog twee mogelijkheden voor $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, die elkaars tegengestelde zijn. De daadwerkelijke richting van $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ wordt ten slotte bepaald door de zogenaamde **kurkentrekkerregel**: $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ wijst in de richting waarin een kurkentrekker zich verplaatst, wanneer deze van **u** naar **v** wordt gedraaid. Een bewijs van dit laatste feit voert te ver om hier te geven. Samengevat hebben we de volgende meetkundige beschrijving van het uitwendig product.



Stelling 3.3. *Het uitwendig product* $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *staat loodrecht op zowel* **u** *als* **v**. *Zijn lengte is gelijk aan de oppervlakte* $|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\sin\gamma$ *van het parallellogram, opgespannen door* **u** *en* **v**. *Zijn richting wordt gegeven door de kurkentrekkerregel. Deze meetkundige eigenschappen leggen* $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *eenduidig vast.*

Opgave 3.9. *Laat* $\mathbf{x}=(1,0,0)$, $\mathbf{y}=(0,1,0)$ *en* $\mathbf{z}=(0,0,1)$. *Bereken* $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$, $\mathbf{y}\times\mathbf{z}$ *en* $\mathbf{x}\times\mathbf{z}$ *en ga na dat hun richtingen overeenstemmen met de kurkentrekkerregel.*

Opgave 3.10. *Bewijs dat als* $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{o}$, *dan zijn* **u** *en* **v** *proportioneel.*
Hint: Gebruik Stelling 3.2.

Opgave 3.11. *Bewijs dat* $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$.
Merk op dat je dit op twee manieren aan kunt pakken: linker- en rechterlid uitschrijven in coördinaten (veel schrijfwerk) of gebruik maken van de formules van Stelling 3.1.

Opgave 3.12. *Bewijs dat* $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})+\mathbf{v}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{u})+\mathbf{w}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{o}$.
Hint: Gebruik de tweede formule van Stelling 3.1.

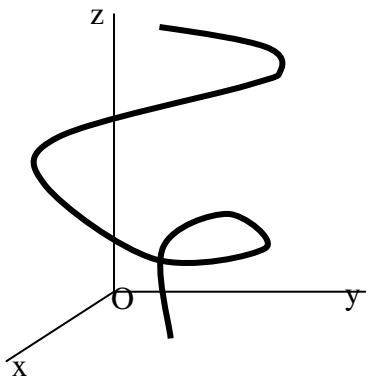
Opgave 3.13. *Maak een samenvatting en een formulekaart over de begrippen inproduct en uitproduct in* $\mathbb{R}^3$.

4 Krommen in de ruimte

Alles stroomt en niets blijft.
Herakleitos (6e eeuw v. Chr.)

De baan van een bewegend deeltje in het vlak of in de ruimte is een **vlakke kromme** respectievelijk een **ruimtekromme**. In eerste instantie zullen we ons in dit hoofdstuk beperken tot ruimtekrommen. Voor vlakke krommen geldt een vrijwel analoog verhaal.

Na de keuze van een rechthoekig assenstelsel wordt een ruimtekromme **f** gegeven door drie coördinaatfuncties $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$, zo dat $((x(t), y(t), z(t))$ de plaats is van het bewuste deeltje op tijdstip *t*. Met andere woorden: $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ is de **positievector** van het deeltje op tijdstip *t*. We noemen $(x(t), y(t), z(t))$ een **parametrisering** of **parametervoorstelling** van de ruimtekromme **f**. We spreken ook wel van een **geparametriseerde kromme**. Eén en dezelfde kromme kan vele parametriseringen hebben (zie opgave 4.2).



We veronderstellen dat de collectie van alle tijdstippen t, waarop de beweging gedefinieerd is, een deelinterval is van $\mathbb{R}$ of de gehele $\mathbb{R}$. Als het niet nader is aangegeven, dan is de beweging gedefinieerd op $\mathbb{R}$.

Voorbeelden van geparametriseerde krommen zijn:
$\mathbf{f}(t) = (2t, 4t, -4t)$
$\mathbf{g}(t) = (3, 2t, t^2 - 2t)$
$\mathbf{h}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$

Opgave 4.1.
a. *Wat is het snijpunt van de baan van* **f** *met het vlak* $z = 17$ *?*
b. *Wat is het laagste punt van de baan van* **g** *?*
c. *Wat is het snijpunt van de baan van* **h** *met het vlak* $z = 5$ *?*
d. *Wat is het snijpunt van de baan van* **h** *met het vlak* $x = 0{,}5$ *?*

Opgave 4.2. *Ga na hoe de baan van het deeltje er bij elk van de drie bovenstaande voorbeelden uitziet. Je kunt daarvoor op je grafische rekenmachine eerst een geschikte projectie tekenen. Teken bijvoorbeeld bij* $\mathbf{g}$ *de vlakke kromme geparametriseerd door:* $x(t) = 2t$ *en* $y(t) = t^2 - 2t$.

Opgave 4.3. *Gegeven zijn drie geparametriseerde ruimtekrommen* $\mathbf{p}(t) = (2t, 4t, -4t)$, $\mathbf{q}(t) = (2t-4, 4t-8, -4t+8)$ *en* $\mathbf{r}(t) = (2t^3, 4t^3, -4t^3)$.

a. *Ga na dat de deeltjes bij deze drie parametriseringen dezelfde baan doorlopen.*
b. *Hoe bewegen de deeltjes bij* $\mathbf{p}$ *en* $\mathbf{q}$ *ten opzichte van elkaar?*
c. *Doorloopt het deeltje bij de parametrisering* $\mathbf{s}(\mathrm{t}) = (2\mathrm{t}^2, 4\mathrm{t}^2, -4\mathrm{t}^2)$ *ook de zelfde baan als bij* $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ *en* $\mathbf{r}$*?*

Hoewel het dus strikt genomen verschillende dingen zijn, zullen we in het vervolg vaak spreken over een "kromme", als we een "geparametriseerde kromme" bedoelen. Dit slordige taalgebruik leidt in de praktijk niet tot problemen en het maakt de zinnen wat minder lang.

Net als vectoren kunnen we krommen[5] optellen en met een reëel getal vermenigvuldigen. Dat gaat als volgt. Laat $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ en $\mathbf{g}(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$ twee krommen zijn. De kromme $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ wordt gedefinieerd door $(\mathbf{f} + \mathbf{g})(t) = \mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)$. Voor een reëel getal λ wordt de kromme $\lambda\mathbf{f}$ gedefinieerd door $(\lambda\mathbf{f})(t) = \lambda \cdot \mathbf{f}(t)$. Net als bij vectoren spreken we af dat $-\mathbf{f} = -1 \cdot \mathbf{f}$ en $\mathbf{f} - \mathbf{g} = \mathbf{f} + (-\mathbf{g})$.

Opgave 4.4. *Beschouw nogmaals de ruimtekrommen* $\mathbf{p}(t) = (2t, 4t, -4t)$, $\mathbf{q}(t) = (2t-4, 4t-8, -4t+8)$ *en* $\mathbf{r}(t) = (2t^3, 4t^3, -4t^3)$. *Geef parametriseringen van de ruimtekrommen* $\mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\mathbf{p} - \mathbf{q}$, $-3\mathbf{r}$ *en* $2\mathbf{p} - 3\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{r}$.

[5] Veel eigenschappen gelden op een analoge wijze voor vlakke en voor ruimtekrommen. Daarom spreken we in zulke gevallen over krommen.

Beschouw de kromme $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$. De afstand van de plaats van het bijbehorende deeltje tot de oorsprong op tijdstip t is $|\mathbf{f}(t)|$. De afstandsfunctie, die wordt genoteerd met $|\mathbf{f}|$, wordt dus gedefinieerd door: $|\mathbf{f}|(t) = |\mathbf{f}(t)| = \sqrt{(f_1(t))^2 + (f_2(t))^2 + (f_3(t))^2}$.

Opgave 4.5. *Bekijk de kromme* $\mathbf{k}(t) = (\cos^2(t), \sin(t)\cdot\cos(t), \sin(t))$.

a. *Laat zien dat de afstandsfunctie* $|\mathbf{k}|$ *constant gelijk is aan* 1.

b. *Wat betekent dit voor de baan van het bijbehorende deeltje?*

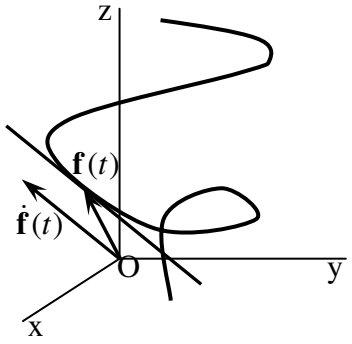
Een deeltje beweegt volgens de kromme $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$. De **snelheidsvector** of kortweg **snelheid** van het deeltje op tijdstip t kunnen we bepalen door de gemiddelde snelheid op een klein tijdsinterval $[t, t+\Delta t]$ te berekenen en daarna Δt tot nul te laten naderen. De gemiddelde snelheid van het deeltje op het tijdsinterval $[t, t+\Delta t]$ is gelijk aan $\frac{1}{\Delta t}(\mathbf{f}(t+\Delta t) - \mathbf{f}(t))$. Dit herschrijven we tot:

$$\frac{1}{\Delta t}(f_1(t+\Delta t) - f_1(t), f_2(t+\Delta t) - f_2(t), f_3(t+\Delta t) - f_3(t)) =$$

$$\left(\frac{f_1(t+\Delta t) - f_1(t)}{\Delta t}, \frac{f_2(t+\Delta t) - f_2(t)}{\Delta t}, \frac{f_3(t+\Delta t) - f_3(t)}{\Delta t}\right).$$

Laten we vervolgens Δt tot nul naderen, dan vinden we de snelheidsvector op tijdstip t: $(f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$. Het differentiëren van een ruimtekromme gebeurt dus (net als van een vlakke kromme) coördinaatgewijs. [6]

De snelheidsvector behorende bij de plaatsvector $\mathbf{f}(t)$ noteren we met $\dot{\mathbf{f}}(t)$. De snelheidsvector $\dot{\mathbf{f}}(t)$ is parallel met de raaklijn aan de kromme in het punt $\mathbf{f}(t)$. De functie $\dot{\mathbf{f}}(t) = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$ noemen we de **snelheidskromme** van de kromme **f**.



[6] De snelheidsvector $\dot{\mathbf{f}}(t)$ is alleen dan gedefinieerd, als de coördinaatfuncties f_1, f_2 en f_3 in t differentieerbaar zijn. Dit wordt stilzwijgend verondersteld. Meer nog: we gaan er vanuit dat alle drie de coördinaatfuncties onbeperkt vaak differentieerbaar zijn in alle tijdstippen t.

Opgave 4.6. *Bereken voor de krommen* **f**, **g** *en* **h** *van opgave 4.1 de bijbehorende snelheidskrommen* $\dot{\mathbf{f}}$, $\dot{\mathbf{g}}$ en $\dot{\mathbf{h}}$.

De **snelheid** van een bewegend deeltje op tijdstip *t* is de lengte van de snelheidsvector $\dot{\mathbf{f}}(t)$. De snelheid wordt genoteerd met $\left|\dot{\mathbf{f}}\right|$ en wordt gegeven door $\left|\dot{\mathbf{f}}\right|(t) = \left|\dot{\mathbf{f}}(t)\right| = \sqrt{\left(f_1'(t)\right)^2 + \left(f_2'(t)\right)^2 + \left(f_3'(t)\right)^2}$.

De plaatsfunctie $\mathbf{f}$ en de snelheidsfunctie $\dot{\mathbf{f}}$ zijn vectorwaardige functies: $\mathbf{f}(t)$ en $\dot{\mathbf{f}}(t)$ zijn (ruimtelijke) vectoren. Maar de afstandsfunctie $\left|\mathbf{f}\right|$ en de snelheidsfunctie $\left|\dot{\mathbf{f}}\right|$ zijn reëelwaardige functies: $\left|\mathbf{f}\right|(t)$ en $\left|\dot{\mathbf{f}}\right|(t)$ zijn (niet-negatieve) getallen. Omdat in het Nederlands de term snelheid zowel wordt gebruikt voor de snelheidsvector als voor de grootte ervan, kan dit soms verwarring geven. In het Engels bestaat dit probleem niet, omdat de snelheidsvector daar wordt aangegeven met velocity en de grootte van de snelheidsvector met speed.

Opgave 4.7. *Bekijk weer de drie krommen van opgave 4.1.*

a. *Bereken de bijbehorende snelheidsfuncties* $\left|\dot{\mathbf{f}}\right|$, $\left|\dot{\mathbf{g}}\right|$ *en* $\left|\dot{\mathbf{h}}\right|$.

b. *In welk punt heeft een deeltje dat beweegt volgens de kromme* **g** *zijn laagste snelheid?*

Als het goed is, dan heb je bij onderdeel a. gezien dat de snelheid bij de kromme **h** *constant is.*

c. *Laat zien dat ook het inproduct* $\dot{\mathbf{h}}(t) \cdot (0,0,1)$ *constant is.*

d. *Laat zien dat de hoek tussen de snelheidsvector* $\dot{\mathbf{h}}(t)$ *en de z-as constant is en bereken die hoek.*

Opgave 4.8. *Bekijk weer de kromme* $\mathbf{k}(t) = (\cos^2(t), \sin(t) \cdot \cos(t), \sin(t))$.

a. *Laat zien dat de snelheidsvector op tijdstip t wordt gegeven door* $\dot{\mathbf{k}}(t) = (-\sin(2t), \cos(2t), \cos(t))$.

b. *Laat zien dat de snelheid op tijdstip t gelijk is aan* $\sqrt{1+\cos^2(t)}$.

c. *Wat is de minimale snelheid van het deeltje? Waar bevindt het zich dan?*

d. *Wat is de maximale snelheid van het deeltje? Waar bevindt het zich dan?*

Opgave 4.9. *Een platte klaverbladknoop kan worden beschreven door de kromme:* $\mathbf{f}(t) = \big((2+\cos(3t)\cdot\cos(2t), (2+\cos(3t)\cdot\sin(2t)\big)$.
Teken deze knoop eerst op de grafische rekenmachine.

a. *Toon aan dat* $|\mathbf{f}(t)| = 2+\cos(3t)$.
b. *Welke waarden kan de afstandsfunctie aannemen?*
c. *Geef een parametrisering van de snelheidskromme.*
d. *Toon aan dat* $|\dot{\mathbf{f}}(t)| = \sqrt{25+16\cos(3t)-5\cos^2(3t)}$.
e. *Wat is de laagste snelheid tijdens het doorlopen van de kromme.*

Opgave 4.10. *Een ruimtelijke klaverbladknoop kan worden beschreven door de kromme:* $\mathbf{g}(t) = \big((2+\cos(3t)\cdot\cos(2t), (2+\cos(3t)\cdot\sin(2t), \sin(3t)\big)$.

a. Toon aan dat $|\mathbf{g}(t)| = \sqrt{5+4\cos(3t)}$.
b. *Welke waarden kan de afstandsfunctie aannemen?*
c. *Geef een parametrisering van de snelheidskromme.*
d. *Toon aan dat* $|\dot{\mathbf{g}}(t)| = \sqrt{9+4\cdot(2+\cos(3t))^2}$.
e. *Welke waarden kan de snelheid aannemen?*

Bij twee krommen $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ en $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$ kunnen we een inproductfunctie **f·g** definiëren door **f·g** (t) = **f**(t) · **g**(t). De functie **f·g** geeft voor elke *t* de waarde van het inproduct van de vectoren **f**(*t*) en **g**(*t*). Dus $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}\ (t) = f_1(t)\cdot g_1(t) + f_2(t)\cdot g_2(t) + f_3(t)\cdot g_3(t)$ of kortweg
$\mathbf{f}\cdot\mathbf{g} = f_1\cdot g_1 + f_2\cdot g_2 + f_3\cdot g_3$.

Voorbeeld. Als $\mathbf{f}(t) = (2t, 4t, -4t)$ en $\mathbf{g}(t) = (3, 2t, t^2-2t)$, dan is
$\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}\ (t) = 2t\cdot 3 + 4t\cdot 2t + -4t\cdot(t^2-2t) = -4t^3+16t^2+6t.$

Voor het differentiëren van het inproduct van twee krommen bestaat een regel, die verrassend veel lijkt op de productregel voor gewone functies. Er geldt namelijk: $\frac{\mathrm{d}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{g} + \mathbf{f}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{g}}{\mathrm{d}t}$ ofwel $(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})\dot{} = \dot{\mathbf{f}}\cdot\mathbf{g} + \mathbf{f}\cdot\dot{\mathbf{g}}$.

Het bewijs lijkt veel op dat van de productregel voor gewone functies. $\frac{\mathrm{d}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})}{\mathrm{d}t}(t)$ is namelijk de limiet van $\frac{1}{\Delta t}\left[(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(t+\Delta t)-(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(t)\right]$ als Δt tot nul nadert. Verder is

$$\frac{1}{\Delta t}\left[(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(t+\Delta t)-(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(t)\right]=\frac{1}{\Delta t}\left[\mathbf{f}(t+\Delta t)\cdot\mathbf{g}(t+\Delta t)-\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t)\right]$$

$$=\frac{1}{\Delta t}\left[\left(\mathbf{f}(t+\Delta t)\cdot\mathbf{g}(t+\Delta t)-\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t+\Delta t)\right)+\left(\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t+\Delta t)-\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t)\right)\right]$$

$$=\left[\frac{\left(\mathbf{f}(t+\Delta t)-\mathbf{f}(t)\right)}{\Delta t}\cdot\mathbf{g}(t+\Delta t)+\mathbf{f}(t)\cdot\frac{\left(\mathbf{g}(t+\Delta t)-\mathbf{g}(t)\right)}{\Delta t}\right].$$

De laatste uitdrukking nadert tot $\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t}(t)\cdot\mathbf{g}(t)+\mathbf{f}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{g}}{\mathrm{d}t}(t)$ als Δt nadert tot nul. Dit geeft het gewenste resultaat.

We kunnen bij twee ruimtekrommen $\mathbf{f}=(f_1,f_2,f_3)$ en $\mathbf{g}=(g_1,g_2,g_3)$ ook een uitproduct[7] $\mathbf{f}\times\mathbf{g}$ definiëren door $\mathbf{f}\times\mathbf{g}\,(t)=\mathbf{f}(t)\times\mathbf{g}(t)$. De kromme $\mathbf{f}\times\mathbf{g}$ geeft voor elke t het uitproduct van de vectoren $\mathbf{f}(t)$ en $\mathbf{g}(t)$. Dus $\mathbf{f}\times\mathbf{g}\,(t)=$

$(f_2(t)\cdot g_3(t)-f_3(t)\cdot g_2(t)\ ,\ f_3(t)\cdot g_1(t)-f_1(t)\cdot g_3(t), f_1(t)\cdot g_2(t)-f_2(t)\cdot g_1(t))$

of kortweg: $\mathbf{f}\times\mathbf{g}=(f_2\cdot g_3-f_3\cdot g_2\ ,\ f_3\cdot g_1-f_1\cdot g_3\ ,\ f_1\cdot g_2-f_2\cdot g_1)$.

Voor het differentiëren van het uitproduct van twee ruimtekrommen bestaat een soortgelijke productregel als voor het differentiëren van het inproduct, namelijk: $\frac{\mathrm{d}(\mathbf{f}\times\mathbf{g})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{g}+\mathbf{f}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{g}}{\mathrm{d}t}$ ofwel $(\mathbf{f}\times\mathbf{g})^{\cdot}=\dot{\mathbf{f}}\times\mathbf{g}+\mathbf{f}\times\dot{\mathbf{g}}$. Het bewijs van de productregel voor het uitproduct is vrijwel hetzelfde als dat van de productregel voor het inproduct.

Opgave 4.11. *Schrijf het bewijs van de productregel voor het uitproduct netjes uit.*

Opgave 4.12. *Een deeltje beweegt over een kromme* $\mathbf{k}$ *gedefinieerd door* $\mathbf{k}(t)=(\sin t+\cos t,\ \sin t,\ \sin t-\cos t)$.

a. *Toon aan dat* $\mathbf{k}(t)\times\dot{\mathbf{k}}(t)$ *een constante vector is.*

b. *Zeg in woorden wat het resultaat van onderdeel a. betekent.*

[7] Het uitproduct is niet gedefinieerd voor vlakke krommen.

Opgave 4.13. *Een deeltje beweegt over een bol met straal r. Zijn baan wordt beschreven door de kromme* **f**.
Bewijs dat de snelheidsvector van het deeltje steeds loodrecht staat op de straal (ofwel $\mathbf{f}(t) \perp \dot{\mathbf{f}}(t)$ *voor elke t).*
Hint: ga na dat $\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}(t) = r^2$ *en differentieer deze uitdrukking naar t.*

Bekijk een deeltje dat beweegt over de kromme $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$. We vinden de **versnellingsvector** of kortweg **versnelling** van het deeltje op tijdstip *t* door de gemiddelde versnelling $\frac{1}{\Delta t}\left(\dot{\mathbf{f}}(t+\Delta t) - \dot{\mathbf{f}}(t)\right)$ op een klein tijdsinterval [*t, t*+Δ*t*] te berekenen en daarna Δ*t* tot nul te laten naderen. Deze versnellingsvector wordt genoteerd met $\ddot{\mathbf{f}}(t)$ en is gelijk aan: $\left(f_1''(t), f_2''(t), f_3''(t)\right)$.

De functie $\ddot{\mathbf{f}}(t) = \left(f_1''(t), f_2''(t), f_3''(t)\right)$ noemen we de **versnellingskromme** van het deeltje dat beweegt langs de kromme **f**. De grootte van de versnellingsvector wordt ook **versnelling** genoemd (notatie $\left|\ddot{\mathbf{f}}\right|$) en wordt gegeven door $\left|\ddot{\mathbf{f}}\right|(t) = \left|\ddot{\mathbf{f}}(t)\right| = \sqrt{\left(f_1''(t)\right)^2 + \left(f_2''(t)\right)^2 + \left(f_3''(t)\right)^2}$. We zullen in een aantal voorbeelden de versnellingsvector nader onderzoeken.

Opgave 4.14. *Bereken zowel de versnellingsvector als de versnelling van de krommen* $\mathbf{p}(t) = (2t, 4t, -4t)$ *en* $\mathbf{r}(t) = (2t^3, 4t^3, -4t^3)$.

Opgave 4.15. *Bekijk de kromme* **k,** *die wordt gedefinieerd door* $\mathbf{k}(t) = (\sin t + \cos t, \sin t, \sin t - \cos t)$. *Toon aan dat* $\ddot{\mathbf{k}}(t) = -\mathbf{k}(t)$.

Opgave 4.16. *Een deeltje beweegt met constante snelheid over een kromme. Toon aan dat de snelheidsvector loodrecht staat op de versnellingsvector. Hint: kijk nog eens goed naar opgave 4.13.*

In de mechanica is het gebruikelijk om bij een bepaalde kromme de positievector te noteren met $\mathbf{r}(t)$, de snelheidsvector met $\mathbf{v}(t)$ en de versnellingsvector met $\mathbf{a}(t)$. De r staat voor radius (wat voerstraal betekent), de v staat voor velocity (snelheid) en de a voor acceleration (versnelling). Vaak laten we gemakshalve het woord vector weg en hebben we het over de positie $\mathbf{r}(t)$, de snelheid $\mathbf{v}(t)$ en de versnelling $\mathbf{a}(t)$. Aan de notatie is te zien dat er sprake is van een vector en niet van een reëel getal. Het is gebruikelijk om de lengte van een vector aan te geven met dezelfde letter, maar dan niet vet-gedrukt: de afstand tot de oorsprong is $r(t) = |\mathbf{r}(t)|$, de snelheid is $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$ en de versnelling is $a(t) = |\mathbf{a}(t)|$. Deze notatie is bondig en bovendien ondubbelzinnig. Je moet er even aan wennen, maar na enige tijd besef je waarschijnlijk wel de voordelen van deze notatie.

We bekijken een viertal klassen van bijzondere ruimtekrommen.

De eenparig rechtlijnige beweging

Voor $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^3$ beschrijft de kromme $\mathbf{r}(t) = \mathbf{u} + t\mathbf{v}$ een rechte lijn. Het punt $\mathbf{u}$ is de positie op tijdstip $t = 0$. De snelheid is $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}$ en de versnelling is $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{o}$. Omdat de snelheid constant is, wordt de lijn eenparig doorlopen.

De eenparig versnelde beweging

Voor reële getallen a, b en c met $a > 0$ beschrijft de vlakke kromme $\mathbf{r}(t) = (t, -\frac{1}{2}at^2 + bt + c)$ een bergparabool. De snelheid is $\mathbf{v}(t) = (1, -at + b)$ en de versnelling is $\mathbf{a}(t) = (0, -a)$.

Opgave 4.17. *Laat zien dat voor de eenparig versnelde beweging geldt:* $v(t) = \sqrt{a^2t^2 - 2abt + b^2 + 1}$ *en* $a(t) = a$.

De eenparig cirkelvormige beweging

Voor $r > 0$ en $\omega \neq 0$ beschrijft de vlakke kromme $\mathbf{r}(t) = (r\cos\omega t, r\sin\omega t)$ een cirkel met straal r en hoeksnelheid ω. De snelheid en de versnelling zijn $\mathbf{v}(t) = (-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t)$ en $\mathbf{a}(t) = (-r\omega^2\cos\omega t, -r\omega^2\sin\omega t)$.

Opgave 4.18. *Laat zien dat voor een eenparig cirkelvormige beweging met hoeksnelheid ω over een cirkel met middelpunt* **o** *en straal R geldt:*

a. $\mathbf{v}(t) \perp \mathbf{r}(t)$

b. $v(t) = v = \omega R$

c. $\mathbf{a}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t)$

d. $a(t) = \omega^2 R$

e. $a(t) = v^2 / R$

Door opgave 4.18 vinden we dat bij een eenparige cirkelbeweging de versnelling gericht is naar het middelpunt en de grootte gelijk is aan v^2/R. Dit werd in 1659 reeds aangetoond door Christiaan Huygens.

De richting en grootte van de versnelling van een eenparige cirkelbeweging kan ook als volgt worden afgeleid:

Opgave 4.19. *Laat $\mathbf{r}(t)$ een eenparige beweging zijn met snelheid v over een cirkel met middelpunt* **o** *en straal R. De periode van de beweging is T.*

a. *Ga na dat* $\mathbf{v}(t) = \dfrac{v}{R}\mathbf{r}(t + \frac{1}{4}T)$.

b. *Toon aan dat* $\mathbf{a}(t) = -\dfrac{v^2}{R^2}\mathbf{r}(t)$. *Hint: differentieer de uitdrukking bij a.*

c. *Toon aan dat de versnelling gericht is naar het middelpunt en gelijk is aan v^2/R.*

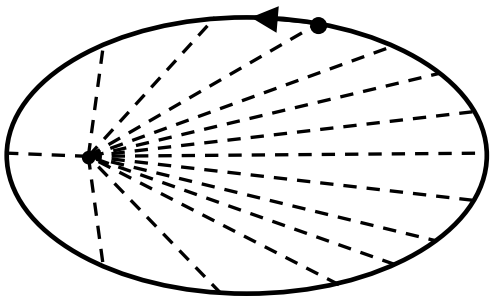
De harmonische beweging

Voor $a \geq b > 0$ beschrijft de vlakke kromme $\mathbf{r}(t) = (a\cos\omega t, b\sin\omega t)$ een ellips met halve lange as a en halve korte as b. Deze beweging wordt wel de harmonische beweging genoemd.

Opgave 4.20. *Laat zien dat voor de harmonische beweging geldt:*

a. $\mathbf{a}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t)$

b. $(r(t))^2 + \big(v(t)/\omega\big)^2 = a^2 + b^2$



Stelling 4.1. (De Perkenwet) *Als een beweging* $\mathbf{r}(t)$ *een versnelling* $\mathbf{a}(t)$ *heeft die proportioneel is met* $\mathbf{r}(t)$ *(d.w.z. op elk tijdstip t zijn* $\mathbf{r}(t)$ *en* $\mathbf{a}(t)$ *veelvouden van elkaar), dan geldt het volgende:*

- *De baan van de beweging ligt in een vlak door de oorsprong* $\mathbf{o}$.
- *De oppervlakte van het perk dat per tijdseenheid wordt uitgeveegd door het lijnstuk met eindpunten* $\mathbf{o}$ *en* $\mathbf{r}(t)$ *is constant, met andere woorden, in gelijke tijden worden gelijke perken doorlopen.*

Bewijs. Bekijk de kromme $\mathbf{n}(t)$ gedefinieerd door $\mathbf{n}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$. Dan is $\dot{\mathbf{n}}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{v}(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{r}(t) \times \mathbf{a}(t) = \mathbf{o} + \mathbf{r}(t) \times \mathbf{a}(t) = \mathbf{o}$. De laatste stap geldt, omdat $\mathbf{r}(t)$ en $\mathbf{a}(t)$ veelvouden zijn van elkaar. Maar als $\mathbf{n}(t)$ voortdurend snelheid $\mathbf{o}$ heeft, dan moet het een constante vector zijn. Noem deze vector $\mathbf{n}$. Omdat $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$ loodrecht staat op $\mathbf{r}(t)$, speelt de beweging zich af in het vlak door de oorsprong met normaalvector $\mathbf{n}$. Dit bewijst het eerste deel van de stelling.

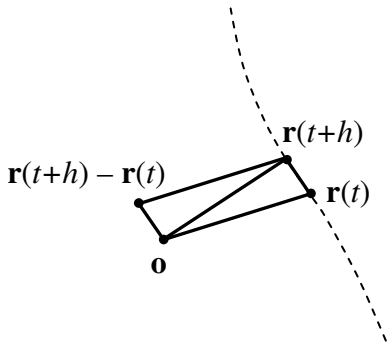
Neem voor t_0 een willekeurige begintijd en laat t een tijdstip zijn later dan t_0. De oppervlakte van het perk dat wordt uitgeveegd door het lijnstuk met eindpunten $\mathbf{o}$ en $\mathbf{r}(s)$ in het tijdsinterval $[t_0, t]$, noemen we $O(t)$. We tonen aan dat $O'(t) = \frac{1}{2}\left|\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)\right|$.

Welnu, voor een klein positief getal h is: $O'(t) \approx \dfrac{O(t+h) - O(t)}{h} \approx$

$\frac{1}{h} \cdot$ oppervlakte van de driehoek met hoekpunten $\mathbf{o}$, $\mathbf{r}(t)$ en $\mathbf{r}(t+h)$ =

$\frac{1}{2h} \cdot$ oppervlakte van het parallellogram opgespannen door $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ en

$\mathbf{r}(t)$ $= \frac{1}{2h} \cdot \left|\mathbf{r}(t) \times \big(\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)\big)\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\mathbf{r}(t) \times \dfrac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}\right| \approx \frac{1}{2} \cdot \left|\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)\right|$.



Laten we vervolgens h naar nul gaan, dan zien we dat $O'(t) = \frac{1}{2}\left|\mathbf{r}(t)\times\mathbf{v}(t)\right|$. Omdat $\mathbf{r}(t)\times\mathbf{v}(t) = \mathbf{n}$ een constante vector is, is $O'(t) = \frac{1}{2}\left|\mathbf{n}\right|$ een constant getal. Maar dan is $O(t) = \frac{1}{2}\left|\mathbf{n}\right|\left(t - t_0\right)$ (opgave 4.21). Dus worden in gelijke tijden gelijke perken doorlopen. □

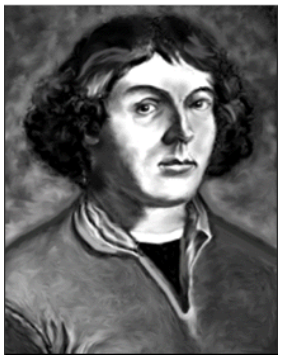
Opgave 4.21. *Laat zien dat voor de oppervlaktefunctie in het bewijs van de Perkenwet geldt:* $O(t) = \frac{1}{2}\left|\mathbf{n}\right|\left(t - t_0\right)$.

5 De reuzen van Newton

> Als ik verder kon zien, dan was dat doordat ik op de schouders van reuzen stond.
> *Isaac Newton* (1642-1727)

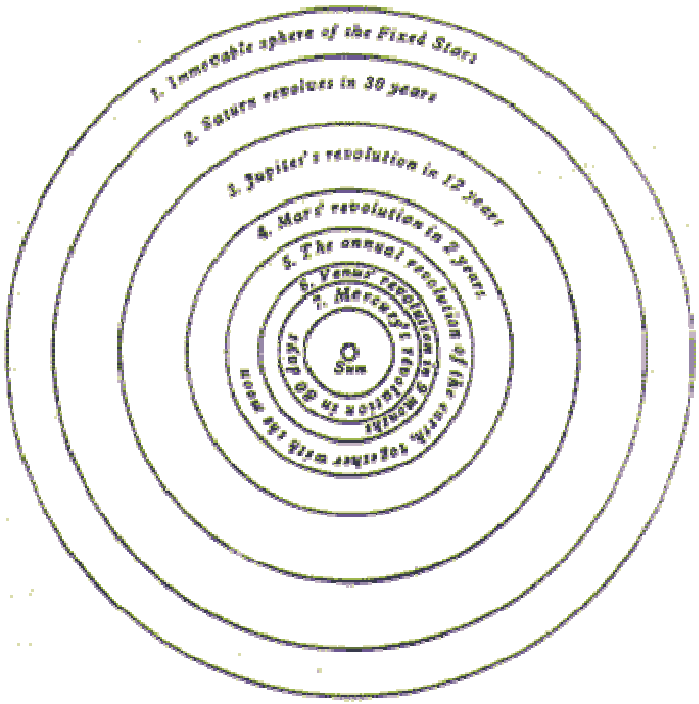
Met de ontdekkingen van Nicolaus Copernicus, Johannes Kepler en Galileo Galilei werd in de tweede helft van de zestiende en de eerste helft van de zeventiende eeuw het klassieke Griekse wereldbeeld, dat sinds de tweede eeuw na Christus onaantastbaar was geweest, definitief verruild voor het moderne wereldbeeld. Het was dankzij deze ontdekkingen, dat Isaac Newton in 1687 in staat was om in zijn Principia Mathematica de werking van de zwaartekracht op wiskundige wijze af te leiden uit de waarnemingen. Newton sprak dan ook de woorden, dat hij zijn werk over de zwaartekracht alleen had kunnen doen, omdat hij op de schouders van reuzen stond. In deze paragraaf zullen we het werk van elk van deze drie "reuzen" bekijken.

Nicolaus Copernicus (1473-1543)



Gebaseerd op de waarnemingen van planeetbanen uit de klassieke Griekse oudheid formuleerde de Pools-Duitse priester en astronoom Nicolaus Copernicus in zijn hoofdwerk De Revolutionibus Orbium Coelestium (Over de Omlopen van de Hemellichamen) uit 1543 het zogenaamde heliocentrische wereldbeeld. Dit zegt dat alle planeten (inclusief de Aarde) in cirkelvormige banen eenparig om de stilstaande Zon bewegen. Tot dan toe heerste het antieke geocentrische wereldbeeld van Ptolemeus (beschreven in zijn boek Almagest in het jaar 150).
Volgens Ptolemeus bewegen de planeten om de Aarde volgens cirkels die langs de omtrek van andere cirkels lopen (zogenaamde epicykels). Om er voor te zorgen dat zijn model zo goed mogelijk met de waarnemingen overeenkwam, had Ptolemeus voor zijn model tientallen epicykels nodig. Dat het geocentrische wereldbeeld bijna 1400 jaar stand heeft weten te houden, kwam enerzijds doordat de wetenschap in Europa in deze periode nauwelijks vorderingen maakte en anderzijds door de machtige positie van de katholieke kerk. Volgens de bijbel is de aarde immers het middelpunt van het heelal, een beeld dat overeen kwam met dat van Ptolemeus. Kritiek op dit beeld werd niet geoorloofd en soms bestraft.

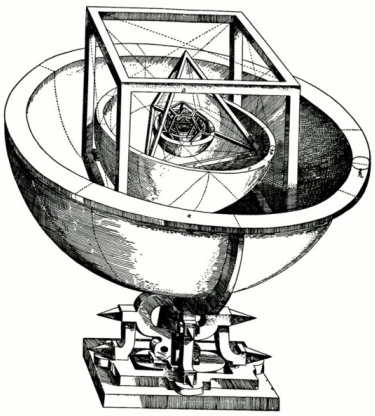
Ten tijde van Copernicus kende men naast de Aarde de binnenplaneten Mercurius en Venus (die binnen de Aardbaan bewegen) en de buitenplaneten Mars, Jupiter en Saturnus (die buiten de Aardbaan bewegen). Copernicus spreekt in zijn boek over zeven sferen met in het middelpunt de stilstaande zon. De eerste en buitenste sfeer is de onbeweeglijke sfeer van de vaste sterren. Daarbinnen heeft elke planeet zijn eigen sfeer, die wordt doorlopen in een vaste tijd, afhankelijk van de grootte van de sfeer (zie figuur).



Naast het heliocentrische wereldbeeld is er nog een tweede inzicht van Copernicus, namelijk dat de Aarde in 24 uur om haar as draait ten opzichte van de Zon en de sterren. Beide inzichten van Copernicus stoelen op hetzelfde principe. De centrale rol van een stilstaande Aarde ten opzichte van een bewegende kosmische achtergrond van Zon, planeten en sterren wordt vervangen door een bewegende roterende Aarde en bewegende planeten ten opzichte van een stilstaande Zon en een stilstaande kosmische achtergrond van sterren. Een werkelijk eenvoudig en tegelijkertijd briljant en vernieuwend inzicht. De eenparige cirkelvormige banen om de Zon volgens het wereldbeeld van Copernicus zouden het nog uithouden tot het begin van de zeventiende eeuw, toen Johannes Kepler dankzij de nauwkeurige waarnemingen van Tycho Brahe de ware aard van hun baan om de zon zou onthullen.

Johannes Kepler (1571-1630)

Het jaar 1600 is belangrijk voor de geschiedenis van de astronomie. De jeugdige Duitse wiskundige Johannes Kepler ontmoet in dat jaar de oudere Deense astronoom Tycho Brahe (1546-1601), en wordt aangesteld als zijn assistent. De extroverte Brahe was een eminent experimenteel astronoom. Op het destijds Deense eiland Hven had hij een observatorium waar hij, (zonder hulp van telescopen) met reusachtige sextanten in staat was zeer nauwkeurig de posities van sterren en planeten waar te nemen. Brahe kreeg echter conflicten met de kerk en moest Denemarken verlaten. In 1599 werd hij aangesteld in Praag aan het hof van keizer Rudolf II van Oostenrijk. De introverte Kepler daarentegen was een briljant theoretisch astronoom met een grote kennis van en intuïtie voor wiskunde. In 1596 kwam zijn eerste boek uit met als titel Mysterium Cosmographicum (Het kosmologisch raadsel). Kepler stelde zich vragen als: Waarom zijn er zes planeten Mercurius, Venus, Aarde, Mars, Jupiter en Saturnus? Waarom zijn de afstanden van de planeten tot de Zon zoals ze zijn? Kepler kreeg de fantastische ingeving dat de antwoorden op beide vragen gevonden kon worden in de meetkunde van de vijf Platonische lichamen octaëder (achtvlak), icosaëder (twintigvlak), dodecaëder (twaalfvlak), tetraëder (viervlak) en hexaëder (kubus), in deze volgorde met afwisselend ingeschreven en omgeschreven bollen.



De straal van de baan van Saturnus om de Zon stellen we gelijk aan de straal van de omgeschreven bol van een hexaëder. De straal van de baan van Jupiter om de Zon is dan gelijk aan de straal van de ingeschreven bol van deze zelfde hexaëder. Neem nu een tetraëder met als straal van de omgeschreven bol de straal van de baan van Jupiter om de Zon. De straal van de baan van Mars om de Zon is dan gelijk aan de straal van de ingeschreven bol van deze tetraëder, enzovoort. Zo krijgen we dus zes bollen die afwisselend omgeschreven en ingeschreven worden door de vijf Platonische lichamen en waarvan de stralen volgens Kepler zouden overeenkomen met de stralen van de banen van de zes genoemde planeten. Kepler meende hiermee diep in de geheimen van de Schepper te zijn doorgedrongen.
Een berekening leert dat de jeugddroom van Kepler een onnauwkeurigheid van zo'n 15% had. De finale afrekening met de illusie van Kepler zou echter pas komen met de ontdekking van de planeten Uranus in 1781 en Neptunus in 1846. Hoe fout de eerste ontdekking van Kepler ook moge zijn, zijn vermoeden dat de planeetbanen te begrijpen zijn via de taal van de wiskunde bleek wel juist te zijn. Kepler, die een overtuigd aanhanger was van het heliocentrisch wereldbeeld van Copernicus, zou met zijn later gevonden wetten alsnog de spijker op zijn kop slaan.
In 1601 overleed Brahe, naar verluidt aan een geknapte blaas. Tijdens een copieus diner met de keizer kon hij zich namelijk moeilijk terugtrekken voor een gang naar het toilet. Kepler volgde hem weldra op als hofastronoom en kreeg hiermee toegang tot de schat van experimentele data van Brahe. In de jaren die volgden zou hij met deze data de drie naar hem genoemde wetten opstellen: de Wetten van Kepler.

Eerste wet van Kepler (De Ellipsbanenwet) *De planeten bewegen over ellipsen met de Zon in een van de brandpunten van de ellips.*

Tweede wet van Kepler (De Perkenwet) *De oppervlakte van het perk dat per tijdseenheid wordt uitgeveegd door de voerstraal van een planeet vanuit de Zon, is constant.*

De eerste en de tweede wet publiceerde hij in Astronomia Nova (De nieuwe astronomie) in 1609. Deze twee wetten had hij al eerder ontdekt, namelijk de Perkenwet in 1602 en de Ellipsbanenwet in 1605, maar de publicatie liet enkele jaren op zich wachten, vanwege conflicten met de erfgenamen van Tycho Brahe, over het recht van Kepler om gebruik te mogen maken van diens meetresultaten. De erfgenamen zagen de inspanningen van Tycho Brahe graag verzilverd, waarbij het hen voornamelijk om het geld te doen

was. Kepler had de twee wetten namelijk afgeleid uit de Brahes meetresultaten aan de baan van de planeet Mars. Nadat hij had vastgesteld dat Mars in gelijke tijden gelijke perken doorloopt en dat de baan van Mars een ellips is met de Zon in één van de brandpunten, stelde Kepler dat deze wetmatigheden voor alle planeten zouden gelden. Deze twee wetten vormen een hoogtepunt in de ontwikkeling van de astronomie en mede hierdoor wist Newton zo'n 80 jaar later zijn zwaartekrachtswet te formuleren en uit deze twee wetten af te leiden.

Derde wet van Kepler (De Harmonische wet) *Voor alle planeten is de verhouding T^2/a^3 gelijk. Hierbij is T de omlooptijd en a de lengte van de halve lange as van de ellipsbaan van de planeet.*

De derde wet werd gepubliceerd in 1619, in Harmonice Mundi (De harmonieleer van de werelden), tien jaar na de publicatie van de eerste twee wetten. De derde wet heeft belangrijke toepassingen. We zullen later zien dat de Harmonische wet kan worden afgeleid uit de Ellipsbanenwet en de Perkenwet. Mede om deze reden is de Harmonische wet naar de achtergrond verschoven, en vormen de Ellipsbanenwet en de Perkenwet het meest bekende werk van Kepler.

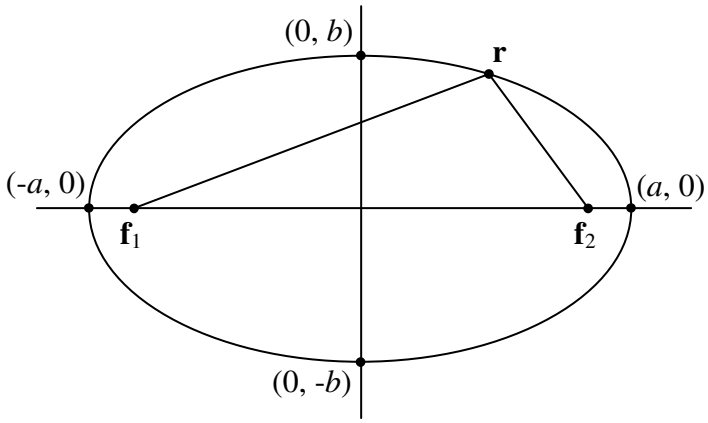
Opgave 5.1. *Een vlakke figuur E wordt gegeven door de vergelijking* $\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1.$

a. *Bereken de coördinaten van E met de x-as en de y-as.*
b. *Ga na dat voor punten van E geldt:* $y=\sqrt{4-\frac{4}{9}x^2}$ *of* $y=-\sqrt{4-\frac{4}{9}x^2}$.
c. *Teken de grafiek van E op een grafische rekenmachine.*
d. *Leg uit dat E ontstaat uit cirkel C met vergelijking* $x^2+y^2=9$ *door een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met factor* $\frac{2}{3}$.

Figuur E in opgave 5.1 is in feite een in één richting uitgerekte cirkel. Zo'n figuur noemen we een **ellips**. De standaardvergelijking van een ellips is $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$. Een ellips, die geen cirkel is, heeft twee onderling loodrechte symmetrieassen. De twee lijnstukken die door de ellips van de symmetrieassen worden afgesneden heten de **lange as** en de **korte as** van de ellips. Als $a>b$, dan is de lengte van de lange as $2a$ en de lengte van de

korte as $2b$. Laat c een positief getal zijn, zo dat $a^2 = b^2 + c^2$. De punten $\mathbf{f}_1 = (-c, 0)$ en $\mathbf{f}_2 = (c, 0)$ heten de **brandpunten** van de ellips. Dat deze twee punten bijzonder zijn voor de ellips, blijkt uit de volgende opgave.

Opgave 5.2. *Laat a en c positieve getallen zijn met $a > c$. Gegeven zijn de punten $\mathbf{f}_1 = (-c, 0)$ en $\mathbf{f}_2 = (c, 0)$. Bekijk de figuur bestaande uit de punten $\mathbf{r} = (x, y)$ waarvoor $|\mathbf{r} - \mathbf{f}_1| + |\mathbf{r} - \mathbf{f}_2| = 2a$. We gaan bewijzen dat deze figuur een ellips is, met vergelijking $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ waarbij $b^2 = a^2 - c^2$.*

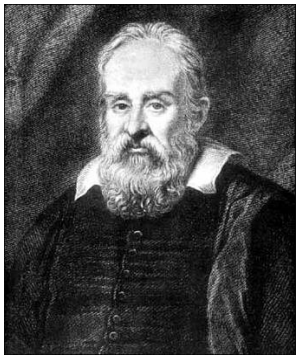


Deze(pittige) berekening kan het best als volgt worden uitgevoerd.

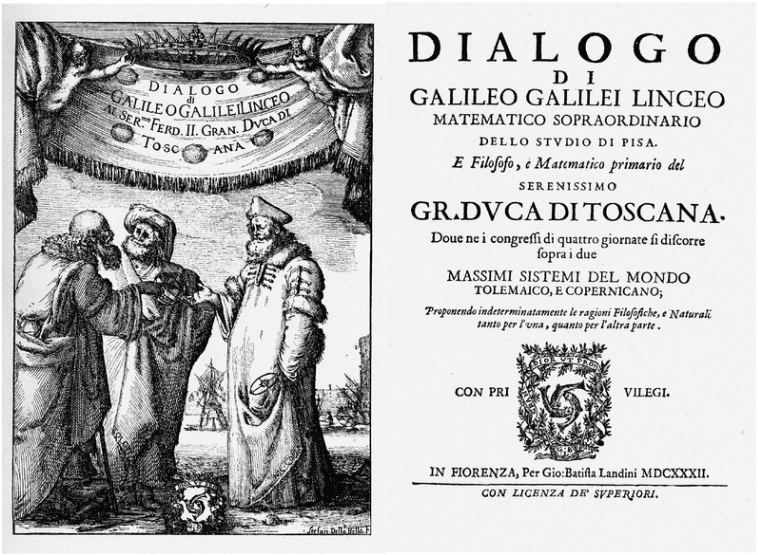
a. *Herschrijf de vergelijking als $|\mathbf{r} - \mathbf{f}_1| = 2a - |\mathbf{r} - \mathbf{f}_2|$, druk hierin de vectoren in coördinaten uit en kwadrateer linker- en rechterlid.*
b. *Herschrijf het resultaat van onderdeel a. als $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$ en kwadrateer wederom linker- en rechterlid.*
c. *Bedenk dat $b^2 = a^2 - c^2$ en maak het bewijs af.*

De karakterizering van een ellips als de collectie van punten waarvoor de som van de afstanden tot twee gegeven punten constant is, wordt ook wel de tuinmandefinitie van een ellips genoemd. Je kunt namelijk een ellipsvormig bloemperk aanleggen door twee pinnen in de grond te slaan en een touw, bevestigd aan beide pinnen, strak te bewegen.

Galileo Galilei (1564-1642)



Een volgende cruciale stap in de ontwikkeling van de mechanica werd gezet door de Italiaanse natuurwetenschapper Galileo Galilei. Galilei was een van de eersten die de hemellichamen met een telescoop onderzocht. Zo ontdekte hij in 1610 de vier manen Io, Europa, Ganymedes en Callisto van de planeet Jupiter. In onze huidige tijd weten we dat Jupiter wel zo'n 70 manen telt, waarvan slechts de vier manen van Galilei met een kleine telescoop goed zijn waar te nemen.
Galilei was een overtuigd aanhanger van het heliocentrisch wereldbeeld van Copernicus. In 1632 verscheen zijn boek Dialogo sopra i due Massimi Sistemi del Mondo Tolemaico e Copernicano (Een tweegesprek over de twee belangrijkste wereldsystemen, het Ptolemeïsche en Copernicaanse). In gesprekken tussen drie personen, Salviati (de geleerde die namens Galilei spreekt), Sagredo (de verstandige leek opgevoerd ter versterking van Salviati) en Simplicio (de aanhanger van het antieke wereldbeeld van Ptolemeus en Aristoteles) maakt Galilei zijn punt op niet mis te verstane wijze duidelijk. De katholieke kerk, geleid door paus Urbanus VIII, ziet haar gedachtegoed geridiculiseerd weergegeven door Simplicio en daagt Galilei voor de inquisitie. Dit leidt een jaar later tot zijn veroordeling. Volgens het vonnis dient Galilei zijn mening te herroepen en hij krijgt voor de rest van zijn leven huisarrest.



Mede onder invloed van zijn veroordeling keert Galilei zich af van de astronomie en hervat zijn studie naar de beweging van projectielen op de Aarde. In 1638 verschijnt zijn boek Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove scienze (Gesprekken en wiskundige bewijzen in twee nieuwe wetenschappen), waarin hij een studie maakt naar de beweging en de luchtweerstand van projectielen op Aarde. Ook hier weer bouwt Galilei zijn betoog op in de vorm van gesprekken tussen Salviati, Sagredo en Simplicio. De volgende gedachten zijn er in terug te vinden.

Propositie 5.1. *Projectielen op Aarde bewegen over bergparabolen met de symmetrieas loodrecht op het aardoppervlak.*

Propositie 5.2. *Projectielen op Aarde leggen in gelijke tijden gelijke horizontale afstanden af.*

Er is een duidelijke analogie tussen de bovenstaande proposities en de eerste twee wetten van Kepler. Als we de horizontale positie van het projectiel aangeven met x en de verticale positie (dus de hoogte boven het aardoppervlak) met y, dan wordt de beweging gegeven door $x = at + b$ en $y = -\frac{1}{2}gt^2 + ct + d$ voor zekere constanten a, b, c, d en $g > 0$.

Propositie 5.3. *De constante g (zijnde de grootte van de versnelling van de beweging van het projectiel) hangt niet af van de massa van het projectiel.*

Dus de beweging van een geweerkogel van 50 gram en van een kanonskogel van 50 kilogram geven dezelfde waarde van g. De drie bovenstaande proposities waren alle gebaseerd op experimenten.

Propositie 5.4. *De constante g (van Galilei) is de grootte van de versnelling ten gevolge van de zwaartekracht aan het aardoppervlak in vacuüm (d.w.z. als er geen luchtweerstand is). Deze constante hangt niet af van de vorm van het projectiel.*

Dus in vacuüm geven de beweging van een kogel of een ganzenveer dezelfde waarde van g. Op bladzijde 116 van de Discorsi laat Galilei de verbaasde Simplicio zeggen: ”Dit is een opmerkelijke bewering, Salviati. Maar ik zal nooit geloven dat zelfs in vacuüm (zo beweging op zo'n plek mogelijk is) een pluk wol en een stukje lood met dezelfde snelheid kunnen vallen.” De universaliteit van de constante g voor de beweging van projectielen op Aarde in vacuüm is een mijlpaal in het gedachtegoed van Galilei. Deze laatste propositie van Galilei was niet meer het gevolg van een experiment. Het was een gedachte-experiment gebaseerd op het bestaan van het vacuüm voor bewegingen van een projectiel op Aarde.

De grootte van de versnelling van de zwaartekracht op Aarde blijkt experimenteel ongeveer gelijk te zijn aan $g = 9{,}8$ *m/s*^{2}. Samenvattend komen we tot de volgende conclusie, ook wel de Valwet van Galilei genaamd.

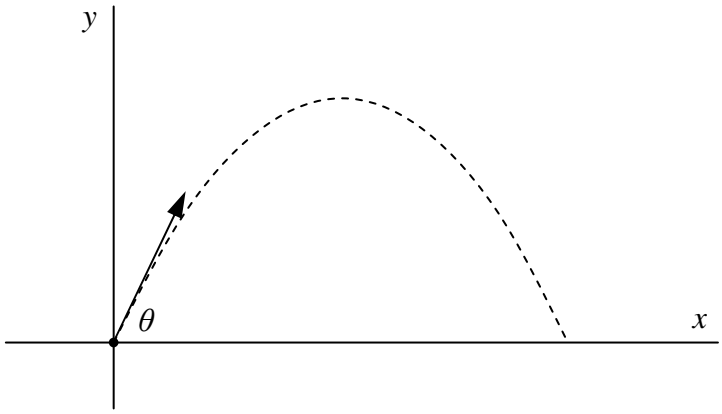
Valwet van Galilei. *De beweging van een projectiel op Aarde in vacuüm heeft een constante versnelling* $\mathbf{g}$*, onafhankelijk van de massa en de vorm van het projectiel. Deze versnelling* $\mathbf{g}$ *is neerwaarts gericht, loodrecht op het aardoppervlak en heeft als grootte* $g = 9{,}8$ *m/s*^{2}.

Uit de valwet van Galilei kunnen we propositie 5.1 als volgt afleiden. Bij een beweging in vacuüm van een projectiel op het aardoppervlak kiezen we coördinaten (x, y) met x de horizontale positie en y de hoogte boven het aardoppervlak. Volgens de Valwet van Galilei is $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{g}$, ofwel $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = (0,-g)$. Hieruit volgt dat $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = (a, -gt + c)$ voor zekere constanten a en c die afhankelijk zijn van de beginsnelheid van het projectiel. Vervolgens zien we dat $\mathbf{r}(t) = (at + b, -\frac{1}{2}gt^2 + ct + d)$ voor zekere constanten b en d die afhankelijk zijn van de beginpositie van het projectiel.

Latere nauwkeurige berekeningen hebben onthuld dat de Aarde niet perfect bolvormig is, maar enigszins afgeplat aan de Noordpool en de Zuidpool. De versnelling van de zwaartekracht blijkt evenzo aan de beide polen iets groter te zijn dan aan de evenaar.
Door de leek zal Galilei voornamelijk herinnerd worden vanwege zijn conflict met de katholieke kerk. Dit conflict staat model voor de spanning tussen wetenschap en religie. Zijn belangrijkste werk voor de natuurwetenschap is echter zijn Valwet. Bizar genoeg mogen we de katholieke kerk hiervoor ”erkentelijk” zijn, omdat Galilei vanwege zijn conflict werd afge-

houden van de astronomie en terugkeerde naar zijn studie over valbewegingen. Het werk van Kepler over planeetbanen en het werk van Galilei over valbewegingen zijn de twee pijlers, waarop de latere synthese door Newton was gebaseerd.

Opgave 5.3. *Een kogel wordt vanaf de grond met een vaste snelheid onder een bepaalde hoek afgeschoten. Door de hoek te variëren, verandert ook de horizontale afstand die de kogel aflegt, voordat hij weer de grond raakt. Gevoelsmatig weet je dat de kogel bij een grote hoek wel hoog komt, maar niet ver. Bij een kleine hoek is de kogel niet lang in de lucht en komt daardoor ook niet ver. We gaan onderzoeken onder welke hoek we de kogel moeten afvuren om hem zo ver mogelijk te krijgen.*



De beweging van de kogel wordt gegeven door $x = at$ *en* $y = -\frac{1}{2}gt^2 + ct$ *voor zekere getallen a en c. De vaste beginsnelheid noemen we v. De hoek in graden waaronder de kogel wordt afgevuurd, noemen we* θ*. We gaan uit van een ideale situatie zonder enige vorm van wrijving.*

a. *Leg uit dat* $a = v\cos\theta$ *en* $c = v\sin\theta$.

b. *Laat zien dat de tijd dat de kogel in de lucht is gelijk is aan* $\dfrac{2c}{g}$.

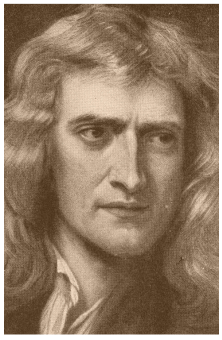
c. *Laat zien dat de overbrugde afstand gelijk is aan* $\dfrac{v^2}{g}\sin 2\theta$.

d. *Bepaal de optimale afvuurhoek.*

e. *Laat zien dat de overbrugde afstanden bij afvuurhoeken* θ *en* $90° - \theta$ *gelijk zijn.*

6 De wetten van Newton

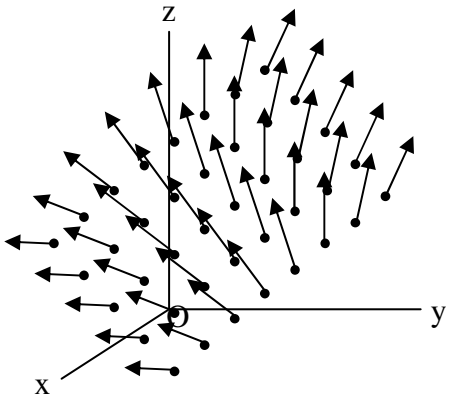
Het boek van de natuur is geschreven in de taal van de wiskunde.
Galileo Galilei (1564-1642)



Isaac Newton
1642-1727

De theoretische onderbouwing van de op experimenten gebaseerde wetten van Kepler en Galilei zou worden geleverd door de Engelse wetenschapper Sir Isaac Newton met zijn theorie over zwaartekracht, ook wel klassieke mechanica genaamd. Newton publiceerde deze theorie in 1687 in zijn hoofdwerk Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Wiskundige Beginselen van de Natuurwetenschap). We beginnen met een definitie.

Definitie. *Een krachtveld* **F** *op* $\mathbb{R}^3$ *is een afbeelding* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, die aan (bijna) ieder punt* **u** *in* $\mathbb{R}^3$ een krachtvector $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ *in* $\mathbb{R}^3$ *toekent.*



De letter *F* is van het Engelse woord force voor kracht. We zullen bij **F** meestal denken aan een zwaartekrachtveld. Newton stelde zich voor dat een puntdeeltje met massa *m* ten gevolge van de massaverdeling in de fysische ruimte $\mathbb{R}^3$ de invloed ervaart van een zwaartekrachtveld **F** op $\mathbb{R}^3$. Het woord puntdeeltje met massa *m* kan dus een kogel zijn in het zwaartekrachtveld van de Aarde, een planeet die beweegt in het zwaartekrachtveld van de Zon, of een komeet die beweegt in het zwaartekrachtveld van ons Zonnestelsel. Het verkleinwoord “deeltje” slaat dus niet zozeer op de massa *m*, die ook

heel groot mag zijn, als wel op de geïdealiseerde puntvormige omvang. Newton stelde zich de cruciale vraag: Hoe wordt een puntdeeltje met massa m en positie $\mathbf{r}(t)$ op tijd t in zijn beweging door een zwaartekrachtveld $\mathbf{F}$ beïnvloed? Het antwoord op deze vraag postuleerde Newton als Bewegingsvergelijking.

Bewegingsvergelijking. *Een puntdeeltje met massa m en positie* $\mathbf{r}$ *op tijd t, dat beweegt onder invloed van een zwaartekrachtveld* $\mathbf{F}$ *op* $\mathbb{R}^3$ *ondervindt op tijdstip t een versnelling* $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$, *ofwel* $\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$ *met* $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$.

Newton formuleerde drie natuurwetten, die samen met de wetten van behoud van impuls en impulsmoment de grondslag vormen van de klassieke mechanica. De Bewegingsvergelijking is Newtons tweede wet. Newtons eerste wet heet de Traagheidswet en die zegt wat er gebeurt met een puntdeeltje waarop geen krachten werken, een zogenaamd vrij deeltje.

Traagheidswet. *Een vrij deeltje is in rust of beweegt eenparig rechtlijnig.*

De Traagheidswet kan worden afgeleid uit de Bewegingsvergelijking. Voor een vrij deeltje geldt namelijk $\mathbf{F} = \mathbf{o}$, onafhankelijk van de positie van het deeltje. De Bewegingsvergelijking zegt vervolgens dat voor een vrij deeltje $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{a}(t) = \mathbf{F}/m = \mathbf{o}/m = \mathbf{o}$. Als de beginpositie (op tijdstip $t = 0$) van dit deeltje $\mathbf{u}$ is en de beginsnelheid $\mathbf{v}$, dan wordt de snelheid op tijdstip t gegeven door $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}$ en de positie door $\mathbf{r}(t) = \mathbf{u} + t\mathbf{v}$. Anders gezegd, het vrije deeltje is in rust of beweegt eenparig rechtlijnig. De Traagheidswet werd al eerder geformuleerd door Galilei en Descartes.

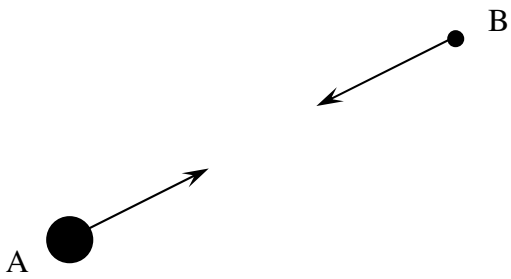
Het zwaartekrachtveld voor een deeltje met massa m aan het aardoppervlak is constant gelijk aan $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$. Hierbij is in de gebruikelijke vlakke coördinaten $\mathbf{g} = (0,-g)$ met g = 9,8 *m/s*^{2}. De Bewegingsvergelijking van Newton komt in dit geval neer op de Valwet van Galilei. De Bewegingsvergelijking $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ is dus op te vatten als een uitbreiding van de Valwet voor een zwaartekrachtveld $\mathbf{F}$ dat mag variëren met de plaats $\mathbf{r}$ in de ruimte.
De Bewegingsvergelijking van Newton is een zogenaamde differentiaalvergelijking. Hiermee bediende Newton zich van de taal van de differentiaalrekening, die hij voor dit doel ontwikkelde. Voor een gegeven krachtveld $\mathbf{F}$ op $\mathbb{R}^3$ kan men bewijzen dat bij voorgeschreven beginpositie $\mathbf{r}(0)$ en voorgeschreven beginsnelheid $\mathbf{v}(0) = \dot{\mathbf{r}}(0)$ er gedurende een zeker tijdsinterval een unieke oplossingskromme $\mathbf{r}(t)$ bestaat. De theorie is in deze zin deterministisch. De natuur gedraagt zich als het ware als een mechaniek dat blijft

lopen als de klokkenmaker het eenmaal in gang heeft gezet. Vandaar de naam mechanica voor deze theorie.
De Bewegingsvergelijking $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ wordt pas echt een vergelijking als we weten wat het zwaartekrachtveld $\mathbf{F}$ is in voorkomende fysische situaties. Het cruciale geval is het zogenaamde tweelichamenprobleem, ook wel Kepler-probleem genaamd.

Newton formuleerde nog een derde wet, die zegt dat krachten nooit alleen voorkomen, maar altijd optreden in paren. Deze wet, die meestal wordt aangeduid met de term: actie = – reactie, luidt als volgt.

Actie = – reactie. *Als een voorwerp A een kracht* $\mathbf{F}$ *op een voorwerp B uitoefent, dan gaat deze kracht gepaard met een even grote, maar tegengestelde kracht* $-\mathbf{F}$ *van B op A.*

Deze wet is merkbaar in de praktijk van alledag: als je op een trampoline springt, dan duwt de trampoline je met de zelfde kracht terug. Als je een ballon opblaast, dan duwt de ballon de lucht net zo hard terug. Maar hij geldt ook voor de zwaartekrachten tussen twee massa's: als een massa A door een andere massa B wordt aangetrokken met een zekere zwaartekracht, dan wordt de massa B door de massa A aangetrokken met een zwaartekracht die precies tegengesteld is.



Een van de cruciale gedachten van Newton is dat het dezelfde zwaartekracht is, die een appel doet vallen op Aarde en die de Maan in haar baan om de Aarde houdt. Het verhaal gaat dat Newton deze ingeving kreeg toen hij een appel zag vallen van de appelboom in zijn tuin in Woolthorpe Manor. Voor de grootte van de zwaartekracht tussen twee puntmassa's stelde Newton de volgende formule op.

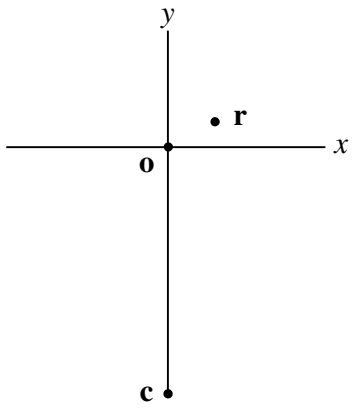
Zwaartekrachtformule. *Twee puntdeeltjes met massa M en m op afstand* $r > 0$ *trekken elkaar aan met krachten ter grootte van* GMm/r^2*, waarbij G een universele constante is.*

De Zwaartekrachtformule heet ook de (universele) Gravitatiewet van Newton, en wordt ook wel de $1/r^2$-wet genoemd. De constante G heet de universele gravitatieconstante. De universele gravitatieconstante G blijkt ongeveer gelijk te zijn aan $6{,}673 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 / kg^2$, waarbij N de eenheid van kracht, genaamd de Newton, gelijk is aan $N = kg \cdot m/s^2$. Deze waarde werd in 1798, ruim een eeuw na het verschijnen van de Principia, bepaald door de Engelse natuur- en scheikundige Sir Henry Cavendish. De universaliteit van G betekent dat bovenstaande waarde van G overal in het heelal geldt. In de menselijke maten meter, kilogram en seconde is de zwaartekracht dus een uiterst zwakke kracht. De zwaartekracht wordt pas voelbaar als ten minste één van de twee aantrekkende massa's erg groot is.

Stelling 6.1. *Het zwaartekrachtveld voor een projectiel met massa m aan het aardoppervlak wordt in de gebruikelijke vlakke coördinaten gegeven door* $\mathbf{F}(x, y) = m\mathbf{g} = (0, -mg)$*, met* $g = GM / R^2$.

Hierbij is $M = 5{,}976 \cdot 10^{24}\ kg$ *de massa van de Aarde en* $R = 6{,}371 \cdot 10^6\ m$ *de straal van de Aarde.*

Bewijs. We kiezen een oorsprong **o** op het aardoppervlak. Vervolgens bekijken we het systeem van een projectiel en de Aarde rond de oorsprong **o** en krijgen dan het volgende plaatje met **c** het centrum van de Aarde, **o** onze oorsprong op het aardoppervlak en ten slotte **r** een punt dichtbij **o**. Dan is $|\mathbf{o} - \mathbf{c}|$ gelijk aan de straal R van de Aarde.



We veronderstellen dat het zwaartekrachtveld van de Aarde gegeven wordt door de $1/r^2$-wet, waarbij de Aarde wordt opgevat als een puntdeeltje met massa M en positie **c**.

De Gravitatiewet van Newton zegt dat $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\lambda(\mathbf{r}-\mathbf{c})$ voor een positief getal λ, dat zodanig is dat $|\mathbf{F}(\mathbf{r})| = |\lambda(\mathbf{r}-\mathbf{c})| = \dfrac{GMm}{|\mathbf{r}-\mathbf{c}|^2}$.

Omdat het punt $\mathbf{r}$ relatief dicht bij punt $\mathbf{o}$ ligt, is $\mathbf{r}-\mathbf{c} \approx \mathbf{o}-\mathbf{c} = (0,R)$ en is $|\mathbf{r}-\mathbf{c}| \approx |\mathbf{o}-\mathbf{c}| = R$.

Uit het bovenstaande kunnen we nu afleiden dat $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\lambda(0,R)$ en dat $\lambda R = \dfrac{GMm}{R^2}$, ofwel $\lambda = \dfrac{GMm}{R^3}$. Dus $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\dfrac{GMm}{R^3}(0,R) = m\left(0,-\dfrac{GM}{R^2}\right)$.

Omdat ook $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\mathbf{g}$, volgt hieruit dat $\mathbf{g} = (0,-\dfrac{GM}{R^2})$ en $g = |\mathbf{g}| = \dfrac{GM}{R^2}$. □

Stelling 6.1 zegt dat het constante zwaartekrachtveld van Galilei gezien kan worden als een limietgeval van het Keplerprobleem.We zullen in de volgende paragraaf laten zien hoe de eerder besproken wetten van Kepler uit de Bewegingsvergelijking en de Gravitatiewet door louter wiskundig redeneren kunnen worden afgeleid. De wetten van Newton geven dus een wiskundige onderbouwing van de Valwet van Galilei voor projectielen op Aarde.

Opgave 6.1. *Voor een projectiel met massa m op Aarde heeft het zwaartekrachtveld* $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ *voor de bewegingsvergelijking* $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ *als oplossingen bewegingen met* $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{a}(t) = \mathbf{g}$.

Laat zien dat deze oplossingen van de vorm $\mathbf{r}(t) = \mathbf{u} + t\mathbf{v} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{g}$ *zijn, voor zekere beginpositie* $\mathbf{u}$ *en beginsnelheid* $\mathbf{v}$ *in* $\mathbb{R}^3$.

Opgave 6.2. *Voor een fysische grootheid P noteren we met* [*P*] *de eenheden waarin P wordt uitgedrukt. Bijvoorbeeld* [*r*] = *m*, [*v*] = *m/s*, [*a*] = m/s^2 *en* [*F*] = $N = kg \cdot m/s^2$. *Controleer met behulp van de Gravitatiewet van Newton dat* [*G*] = $N \cdot m^2/kg^2$.

Opgave 6.3. *De universele gravitatieconstante G en de constanten g, M en R voor de Aarde zijn te vinden in deze paragraaf.*

a. *Controleer de relatie* $g = GM/R^2$ *met de getallen in deze paragraaf.*
b. *Leg uit dat de soortelijke massa van de Aarde gelijk is aan* $3M/4\pi R^3$.
c. *Bepaal de soortelijke massa van de Aarde.*
d. *Had je dit getal verwacht, en welke conclusie kun je hieraan verbinden?*

7 De wetten van Kepler

Waar materie is, daar is meetkunde.
Johannes Kepler (1571-1630)

In deze paragraaf zullen we de drie wetten van Kepler afleiden uit Newtons zwaartekrachtwet. We bekijken eerst de situatie van een planeet en een zon en veronderstellen dat de massa m van de planeet verwaarloosbaar is ten opzichte van de massa M van de zon. Dit betekent dat de baan van de planeet wordt beïnvloed door de zon, maar dat de baan van de zon niet wordt beïnvloed door de planeet. Omdat de zon geen versnelling ondervindt, is ze in rust of beweegt eenparig rechtlijnig. We mogen veronderstellen dat de zon stil staat, omdat we een assenstelsel kunnen kiezen dat meebeweegt met de zon. We kiezen dit assenstelsel zo, dat de zon in de oorsprong ligt. Het algemene geval, waarbij de massa van de planeet niet verwaarloosbaar is ten opzichte van de massa van de zon, wordt in de paragraaf 8 behandeld.

We gaan er vanuit dat de gehele massa van een bolsymmetrisch object zich in het middelpunt bevindt. Dat dit voor bolsymmetrische objecten inderdaad geoorloofd is, is een diepe stelling die al door Newton op meetkundige wijze werd bewezen. Een modern analytisch bewijs werd een eeuw later door de Franse wiskundige Laplace gevonden. We mogen dus zowel de zon als de planeet opvatten als puntdeeltjes.

De versnelling $\mathbf{a}$ die de zon uitoefent op de planeet wanneer deze zich in positie $\mathbf{r}$ bevindt is gelijk aan $-\frac{GM}{r^3}\mathbf{r}$, met G de universele gravitatieconstante. Het zwaartekrachtveld dat de planeet ondervindt van de zon wordt dus gegeven door $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\mathbf{a} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r}$. Voor het gemak schrijven we $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{k}{r^3}\mathbf{r}$, waarbij k een positieve constante is.

Opgave 7.1. Leg uit dat de lengte van deze $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ evenredig is met $1/r^2$.

We noemen dit zwaartekrachtveld daarom wel een $1/r^2$-zwaartekrachtveld.

Definitie. *Een krachtveld* $\mathbf{F}$ *heet* ***centraal*** *als* $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ en $\mathbf{r}$ *proportioneel zijn.*

Opgave 7.2. *Leg uit dat een zwaartekrachtveld* $\mathbf{F}$ *gedefinieerd door* $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{k}{r^3}\mathbf{r}$ *een centraal krachtveld is.*

Definitie. *Beschouw een deeltje met massa m, dat zich bevindt op positie* $\mathbf{r}$ *en beweegt met snelheid* $\mathbf{v}$. *De* ***impuls*** $\mathbf{p}$ *van dit deeltje wordt gedefinieerd door* $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. *Het* ***impulsmoment*** $\mathbf{L}$ *van dit deeltje wordt gedefinieerd door* $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$.

Een deeltje in een krachtveld beweegt langs een kromme $\mathbf{r}(t)$. De snelheidskromme wordt gegeven door $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ en de versnellingskromme door $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$. De kracht werkend op het deeltje is ook een ruimtekromme gegeven door $\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$. Ook de impuls en het impulsmoment zijn ruimtekrommen gegeven door respectievelijk $\mathbf{p}(t) = m\mathbf{v}(t)$ en $\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t)$.

Opgave 7.3. *Bewijs dat voor een puntdeeltje in een krachtveld* $\mathbf{F}$ *geldt:*

a. $\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{F}(t)$

b. $\dot{\mathbf{L}}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{F}(t)$

c. $\dot{\mathbf{L}}(t) = \mathbf{o}$ *als* $\mathbf{F}$ *een centraal krachtveld is.*

Stelling 7.1. *In een centraal krachtveld is het impulsmoment* $\mathbf{L}(t)$ *een constante vector. Het puntdeeltje beweegt in het vlak door de oorsprong loodrecht op het impulsmoment.*

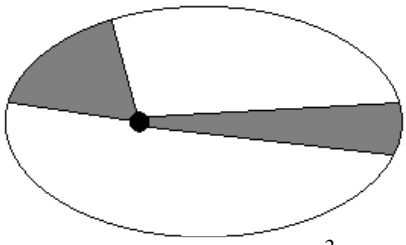
Bewijs. De eerste bewering volgt direct uit opgave 7.3 onderdeel c. De tweede bewering volgt uit het feit dat $\mathbf{r}(t)$ loodrecht staat op $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t)$. □

Het wordt tijd om de notatie wat bondiger te maken. Nu we terdege beseffen dat allerlei grootheden van de tijd afhangen, is het niet echt noodzakelijk dit steeds in de notatie op te nemen. We schrijven daarom in het vervolg gewoon $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{F}$ en $\mathbf{L}$ in plaats van $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{F}(t)$ en $\mathbf{L}(t)$. $\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$ wordt $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, $\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{F}(t)$ wordt $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ en $\dot{\mathbf{L}}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{F}(t)$ wordt $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Dit komt de leesbaarheid van de berekeningen ten goede.

Stelling 7.2. *Een puntdeeltje met massa m beweegt in een centraal krachtveld in een vlak door de oorsprong, loodrecht op het impulsmoment* $\mathbf{L}$ *en zodanig dat de voerstraal in gelijke tijden gelijke perken doorloopt. De oppervlakte van het door de voerstraal per tijdseenheid uitgeveegde perk is gelijk aan L/2m.*

Bewijs. Uit stelling 7.1 volgt dat het deeltje in een vlak door de oorsprong beweegt, loodrecht op het impulsmoment. Voor een centraal krachtveld zijn $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ en $\mathbf{r}$ proportioneel. Omdat $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\mathbf{a}$, zijn ook de versnelling $\mathbf{a}$ en positie $\mathbf{r}$ proportioneel. De bewering dat de voerstraal in gelijke tijden gelijke perken doorloopt volgt nu uit stelling 4.1. De oppervlakte van het door de voerstraal per tijdseenheid uitgeveegde perk is volgens het bewijs van deze stelling gelijk aan de constante $n/2$, waarbij $\mathbf{n} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$. Uit $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m\mathbf{n}$ volgt dat $L = mn$. Dus $n/2 = (L/m)/2 = L/2m$. □

Stelling 7.3. (De Perkenwet)
Een puntdeeltje beweegt in een $1/r^2$*-zwaartekrachtveld in een vlak door de oorsprong, zodanig dat de voerstraal in gelijke tijden gelijke perken doorloopt.*



Bewijs. Dit volgt direct uit stelling 7.2 en het feit dat een $1/r^2$-zwaartekrachtveld een centraal krachtveld is (zie opgave 7.2). □

Een grootheid die constant is in de tijd noemen we een **behouden grootheid**. In een centraal krachtveld (en dus in het bijzonder in een $1/r^2$-zwaartekrachtveld) is het impulsmoment **L** een behouden grootheid. Behouden grootheden blijken de sleutel tot de oplossingen van veel problemen in de mechanica. De kunst is dan ook om bij een gegeven probleem de behouden grootheden te vinden. We zullen in het vervolg van deze paragraaf zien dat in een $1/r^2$-zwaartekrachtveld ook de totale energie een behouden grootheid is. We kunnen in een $1/r^2$-zwaartekrachtveld nog een behouden grootheid vinden, die ons in staat zal stellen om de Ellipsbanenwet te bewijzen. Om na te gaan of een bepaalde grootheid behouden is, berekenen we zijn afgeleide naar de tijd. Is deze 0 (in het geval van een scalaire grootheid) of $\mathbf{o}$ (in het geval van een vectoriële grootheid), dan is de grootheid behouden. Bij het differentiëren komen we geregeld in- en uitproducten tegen; daarom gaan we eerst hiermee oefenen.

Opgave 7.4. Laat zien dat:

a. $(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})^{\cdot} = v^2 + \mathbf{r}\cdot\mathbf{a}$

b. $(\mathbf{r}\times\mathbf{v})^{\cdot} = \mathbf{r}\times\mathbf{a}$

c. $(r^2)^{\cdot} = 2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})$ (Hint: schrijf $r^2 = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}$)

d. $(r)^{\cdot} = \dfrac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})}{r}$ (Hint: schrijf $r = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{\frac{1}{2}}$ en gebruik de kettingregel)

e. $\left(\dfrac{1}{r}\right)^{\cdot} = -\dfrac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})}{r^3}$ (Hint: schrijf $\dfrac{1}{r} = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{-\frac{1}{2}}$ en gebruik de kettingregel)

f. $(v^4)^{\cdot} = 4v^2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})$ (Hint: schrijf $v^4 = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})^2$ en gebruik de kettingregel)

g. $(rv)^{\cdot} = \dfrac{v}{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}) + \dfrac{r}{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})$ (Hint: gebruik de (gewone) productregel)

Opgave 7.5. Differentieer $r(t) = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2}$ zonder gebruik van inproduct en ga na dat het resultaat overeenkomt met opgave 7.4d.

Vanaf dit moment zullen we ons in deze paragraaf beperken tot een $1/r^2$-zwaartekrachtveld.

Definitie. In een $1/r^2$-zwaartekrachtveld wordt de ***totale energie*** *H gedefinieerd door* $H = \frac{1}{2}mv^2 - \dfrac{k}{r}$. De *totale energie is de som van de* ***kinetische energie*** $\frac{1}{2}mv^2$ *en de* ***potentiële energie*** $-\dfrac{k}{r}$.

Opgave 7.6. Laat zien dat $H = \dfrac{p^2}{2m} - \dfrac{k}{r}$.

Stelling 7.4. *De totale energie H is een behouden grootheid.*

Bewijs. Eerst herschrijven we H m.b.v. inproducten. Uit opgave 7.5 volgt dat $H = \dfrac{1}{2m}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}) - \dfrac{k}{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{\frac{1}{2}}}$. Vervolgens gaan we na dat $\dot{H} = 0$.

$$\dot{H} = \frac{1}{m}(\dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{p}) + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{k}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1\frac{1}{2}}} \cdot 2(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}) = \frac{1}{m}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{p}) + \frac{k}{r^3}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) =$$

$$= \frac{1}{m}\left(\left(-\frac{k}{r^3}\mathbf{r}\right) \cdot (m\mathbf{v})\right) + \frac{k}{r^3}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) = -\frac{k}{r^3}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) + \frac{k}{r^3}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) = 0\,. \qquad \square$$

Opgave 7.7. Beschouw een deeltje met massa m dat zich bevindt op afstand r_0 van de oorsprong met beginsnelheid 0.

a. Beschrijf de beweging van het deeltje.

b. Druk de snelheid op afstand r van de oorsprong uit in k, r, r_0 en m.

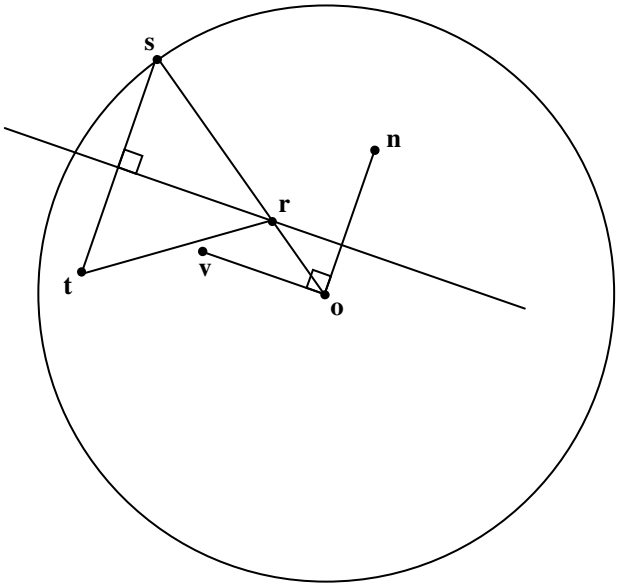
We bekijken vanaf nu objecten met negatieve totale energie, d.w.z. $H < 0$. Voor zulke objecten is de beweging beperkt tot een cirkelschijf, zoals blijkt uit de volgende stelling.

Stelling 7.5. *Als de totale energie $H < 0$, dan vindt de beweging plaats in het vlak door* **o** *loodrecht op het impulsmoment* ***L*** *begrensd tot het binnengebied van de cirkel* ***C*** *met middelpunt* ***o*** *en straal –k/H.*

Bewijs. Er geldt: $H = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} \geq -\frac{k}{r}$. *Dus* $-H \leq \frac{k}{r}$. *Dus* $-Hr \leq k$. *Dus* $r \leq \frac{k}{-H} = -\frac{k}{H}$. *Merk op dat –k/H > 0, omdat k > 0 en H < 0.* $\square$

De cirkel ***C*** waarbinnen de planeet zich, gelet op de totale energie, moet bevinden wordt ook wel de valcirkel genoemd. De verklaring voor de naam "valcirkel" ligt in het feit dat een stilstaand object dat zich op deze cirkel bevindt tijdens zijn val naar de zon de planeetbaan snijdt met precies dezelfde snelheid waarmee de planeet dat punt passeert.

Bekijk nu het volgende plaatje van het vlak loodrecht op de impulsmomentvector **L**. De vector **s** is het voetpunt van **r** op de valcirkel ***C***. De vector **t** is het spiegelbeeld van **s** in de lijn door **r** met richtingsvector **v**. De vector $\mathbf{n} = \mathbf{p} \times \mathbf{L}$ ligt in het vlak en staat loodrecht op **v**.



De resultaten van de volgende drie opgaven komen van pas bij het bewijs van stelling 7.6.

Opgave 7.8. Laat zien dat $\mathbf{s} = -\frac{k}{rH}\mathbf{r}$.

Opgave 7.9. Ga na dat in het plaatje de richting van de vector $\mathbf{n}$ in overeenstemming is met de ligging van de vectoren $\mathbf{r}$ en $\mathbf{v}$.

Opgave 7.10. Laat zien dat $p^2 = 2m(H + \frac{k}{r})$.

De Runge-Lenz-vector $\mathbf{K}$ wordt gedefinieerd door: $\mathbf{K} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{km}{r}\mathbf{r}$.

Opgave 7.11. Laat zien dat $\mathbf{K} \cdot \mathbf{L} = 0$.

De Runge-Lenz-vector $\mathbf{K}$ ligt dus in het vlak van beweging van het puntdeeltje, net als de vector $\mathbf{t}$. De volgende stelling leert ons dat de vectoren $\mathbf{t}$ en $\mathbf{K}$ zelfs proportioneel zijn.

Stelling 7.6. $\mathbf{t} = \frac{1}{mH}\mathbf{K}$

Bewijs. Volgens stelling 2.4 is $\mathbf{t} = \mathbf{s} - \frac{2((\mathbf{s}-\mathbf{r})\cdot\mathbf{n})}{n^2}\mathbf{n}$.

We bekijken eerst de teller: $(\mathbf{s}-\mathbf{r})\cdot\mathbf{n} = (-\frac{k}{rH}\mathbf{r}-\mathbf{r})\cdot\mathbf{n} = (-\frac{k}{rH}-1)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}) =$

$-(1+\frac{k}{rH})(\mathbf{r}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L})) = -(1+\frac{k}{rH})(\mathbf{r}\times\mathbf{p})\cdot\mathbf{L}) = -(1+\frac{k}{rH})(\mathbf{L}\cdot\mathbf{L}) =$

$= -(1+\frac{k}{rH})\cdot L^2 = -(H+\frac{k}{r})\cdot\frac{L^2}{H}$.

En daarna de noemer: $n^2 = \mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = (\mathbf{p}\times\mathbf{L})\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) = p^2L^2 = 2m(H+\frac{k}{r})\cdot L^2$.

Merk op dat uit $\mathbf{p}\perp\mathbf{L}$ volgt dat $(\mathbf{p}\times\mathbf{L})\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) = p^2L^2\cdot\sin^2(\frac{\pi}{2}) = p^2L^2$.

Dus $\mathbf{t} = -\frac{k}{rH}\mathbf{r} + \frac{1}{mH}\mathbf{n} = \frac{1}{mH}(\mathbf{p}\times\mathbf{L} - \frac{km}{r}\mathbf{r}) = \frac{1}{mH}\mathbf{K}$. □

Er is nog meer aan de hand, zoals blijkt uit de volgende twee stellingen.

Stelling 7.7. *De Runge-Lenz-vector **K** is een behouden grootheid.*

Bewijs: We gaan na dat $\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{o}$.

$$\dot{\mathbf{K}} = \dot{\mathbf{p}}\times\mathbf{L} + \mathbf{p}\times\dot{\mathbf{L}} - \frac{km}{r}\dot{\mathbf{r}} + \frac{km(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})}{r^3}\mathbf{r} =$$

$$\mathbf{F}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{p}) + \mathbf{p}\times\mathbf{o} - \frac{km}{r}\dot{\mathbf{r}} + \frac{km(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})}{r^3}\mathbf{r} =$$

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{p})\mathbf{r} - (\mathbf{F}\cdot\mathbf{r})\mathbf{p} - \frac{k}{r}\mathbf{p} + \frac{k(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}{r^3}\mathbf{r} =$$

$$(-\frac{k}{r^3}\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\mathbf{r} - (-\frac{k}{r^3}\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})\mathbf{p} - \frac{k}{r}\mathbf{p} + \frac{k(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}{r^3}\mathbf{r} =$$

$$-\frac{k}{r^3}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\mathbf{r} + \frac{k}{r^3}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})\mathbf{p} - \frac{k}{r}\mathbf{p} + \frac{k(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}{r^3}\mathbf{r} =$$

$$-\frac{k(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}{r^3}\mathbf{r}+\frac{k}{r}\mathbf{p}-\frac{k}{r}\mathbf{p}+\frac{k(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}{r^3}\mathbf{r}=\mathbf{o}\,.$$ □

Stelling 7.8. *De vector* ***t*** *is ook een behouden grootheid.*

Bewijs. Vanwege respectievelijk Stelling 7.4 en 7.7 zijn de totale energie H en de Runge-Lenz-vector $\mathbf{K}$ behouden grootheden. De massa m is ook constant. Dan volgt uit Stelling 7.6 dat $\mathbf{t}$ ook een behouden grootheid is. □

Het feit dat de vector $\mathbf{t}$ een behouden grootheid is, heeft grote gevolgen.

Stelling 7.9. (De Ellipsbanenwet) *Als een puntdeeltje beweegt in een zwaartekrachtveld van de vorm* $\mathbf{F}(\mathbf{r})=-\frac{k}{r^3}\mathbf{r}$ *met een totale energie* $H < 0$*, dan beweegt het langs een ellips met brandpunten* ***o*** *en* ***t*** *met lange as gelijk aan* $-k/H$.

Bewijs: De som van de afstanden van $\mathbf{r}$ tot $\mathbf{o}$ en $\mathbf{t}$ is constant. Namelijk: $|\mathbf{r}-\mathbf{o}|+|\mathbf{t}-\mathbf{r}|=|\mathbf{r}-\mathbf{o}|+|\mathbf{s}-\mathbf{r}|=|\mathbf{s}-\mathbf{o}|=-\frac{k}{H}$, want r ligt op het lijnstuk met eindpunten $\mathbf{o}$ en $\mathbf{s}$. De lengte van de lange as van de ellips is gelijk aan som van de afstanden tot de brandpunten, dus $-k/H$. □

Opgave 7.12. Wat is de straal van de valcirkel bij een cirkelbeweging?

Nu we de eerste twee Keplerwetten bewezen hebben, kunnen we hieruit met nog even flink wat rekenwerk de derde Keplerwet afleiden. In paragraaf 5 (opgave 5.2) hebben we gezien dat een ellips met lange as $2a$ en korte as $2b$ twee brandpunten heeft op afstand $2c$ van elkaar, waarbij $b^2=a^2-c^2$.

Opgave 7.13. Een ellips is een in één richting uitgerekte cirkel. Leid hieruit af dat de oppervlakte van een ellips met lange as $2a$ en korte as $2b$ gelijk is aan πab.

Volgens stelling 7.2 wordt de ellips doorlopen met constante "perkensnelheid" $L/2m$, waarbij L de lengte van het impulsmoment is. Noemen we de omlooptijd van het puntdeeltje T, dan is de oppervlakte van de ellips gelijk

aan de oppervlakte van het perk dat in tijd T wordt doorlopen, namelijk $LT/2m$. Uit opgave 13 volgt nu dat $LT/2m = \pi ab$.

Om het bewijs van de derde wet rond te krijgen, moeten we zowel a als b uitdrukken in bekende grootheden. Uit stelling 7.9 volgt dat de lengte van de lange as van de ellipsbaan van het puntdeeltje gelijk is aan *–k/H*. Dit geeft $2a = -k/H$ en dus $4a^2 = k^2/H^2$. Om ook b zo uit te drukken heeft wat meer voeten in de aarde. De werkwijze is als volgt: we gaan eerst c uitdrukken in bekende grootheden. Als dit is gelukt, dan zijn we zo goed als klaar, omdat $b^2 = a^2 - c^2$. Nu is $2c$ de afstand tussen de twee brandpunten en die is ook gelijk aan de lengte van de behouden vector $\mathbf{t} = \frac{1}{mH}\mathbf{K}$. Dus moeten we eerst de lengte van de Runge-Lenz-vector berekenen. Dit is een flinke rekenpartij, zoals blijkt uit het bewijs van de volgende stelling.

Stelling 7.10. *Voor de lengte K van de Runge-Lenz-vector geldt:* $K^2 = 2mHL^2 + k^2m^2$.

Bewijs. $K^2 = \mathbf{K}\cdot\mathbf{K} = \left(\mathbf{p}\times\mathbf{L} - \frac{km}{r}\mathbf{r}\right)\cdot\left(\mathbf{p}\times\mathbf{L} - \frac{km}{r}\mathbf{r}\right) =$

$(\mathbf{p}\times\mathbf{L})\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) - (\mathbf{p}\times\mathbf{L})\cdot\left(\frac{km}{r}\mathbf{r}\right) - \left(\frac{km}{r}\mathbf{r}\right)\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) + \left(\frac{km}{r}\mathbf{r}\right)\cdot\left(\frac{km}{r}\mathbf{r}\right) =$

$p^2L^2 - \frac{2km}{r}(\mathbf{r}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L})) + \frac{k^2m^2}{r^2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) =$

$p^2L^2 - \frac{2km}{r}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})\cdot\mathbf{L} + \frac{k^2m^2r^2}{r^2} =$

$\left(2mH + \frac{2km}{r}\right)L^2 - \frac{2km}{r}(\mathbf{L}\cdot\mathbf{L}) + k^2m^2 =$

$2mHL^2 + \frac{2km}{r}L^2 - \frac{2km}{r}L^2 + k^2m^2 =$

$2mHL^2 + k^2m^2$.

NB Omdat $\mathbf{p}\perp\mathbf{L}$, geldt dat $(\mathbf{p}\times\mathbf{L})\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{L}) = p^2L^2\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = p^2L^2$. □

Nu kan het oogsten beginnen:

Opgave 7.14. Laat zien dat $4c^2 = t^2 = \frac{2L^2}{mH} + \frac{k^2}{H^2}$.

Opgave 7.15. Laat zien dat $4b^2 = 4a^2 - 4c^2 = -\frac{2L^2}{mH}$.

Opgave 7.16. Leid uit $\frac{LT}{2m} = \pi ab$ af dat $\frac{T^2}{a^2} = \frac{4\pi^2 b^2 m^2}{L^2}$.

Opgave 7.17. Leid uit opgave 7.15 en 7.16 af dat $\frac{T^2}{a^2} = -\frac{2\pi^2 m}{H}$.

Opgave 7.18. Leid uit $2a = -k/H$ en opgave 7.17 af dat $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{k}$.

We kunnen nu de derde Keplerwet bewijzen:

Stelling 7.11. (De Harmonische wet) *Voor een bewegend puntdeeltje is de verhouding T^2/a^3 constant. Hierbij is T de omlooptijd en a de lengte van de halve lange as van de ellipsbaan van het deeltje.*

Bewijs. Terugkijkend naar het begin van deze paragraaf zien we dat $k = GMm$. Vullen we dit in in de formule van opgave 7.18, dan krijgen we $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$. Het rechterlid is constant, omdat zowel de universele gravitatieconstante als de massa van het centrale object (een zon), constant is.

Opgave 7.19. Leg uit dat twee puntdeeltjes met dezelfde massa en dezelfde negatieve totale energie dezelfde omlooptijd hebben.

Opgave 7.20. Controleer met de tabel op bladzijde 67 dat de verhouding T^2/a^3 voor de acht planeten in ons Zonnestelsel nagenoeg constant is. Neem voor het gemak T in jaren en a in AE. AE staat voor astronomische eenheid, de gemiddelde afstand van de Aarde tot de Zon (1 AE ≈ 150 miljoen km).

Opgave 7.21. De komeet van Halley beweegt in een langgerekte ellipsbaan om de Zon met een omlooptijd van ongeveer 75,3 jaar. Toon aan dat de maximale afstand van de komeet tot de Zon hoogstens 36 AE kan zijn.

8 Het Keplerprobleem

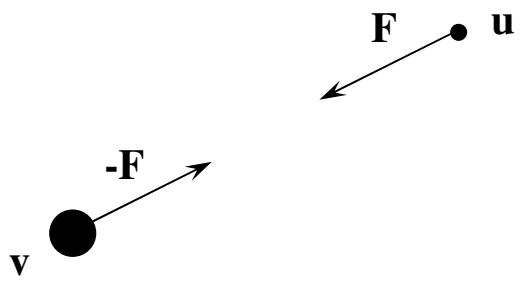
Wiskunde is onredelijk effectief in de natuurwetenschap
Eugene Wigner (1902-1995)

In deze paragraaf zullen we het tweelichamenprobleem, ook wel het Keplerprobleem genaamd, oplossen. We beschouwen daartoe twee puntdeeltjes met respectievelijke massa's m en M, die beide bewegen als gevolg van hun onderlinge zwaartekracht. Een voorbeeld hiervan is de situatie van een planeet (met massa m) en een zon (met massa M), waarbij de massa van de planeet niet wordt verwaarloosd ten opzichte van de massa van de zon. In dit geval zal de zon niet op haar plaats blijven, omdat ze voortdurend een kracht ondervindt in de richting van de planeet. Ofschoon beide een even grote kracht ondervinden, zal de versnelling van de zon veel kleiner zijn dan die van de planeet, vanwege het grote verschil in massa.

We zullen in deze paragraaf weer veronderstellen dat er sprake is van een $1/r^2$-zwaartekrachtveld. Voor het gemak zullen we voortaan spreken van de kleine puntmassa (met massa m) en de grote puntmassa (met massa M). De positie van de kleine puntmassa noemen we $\mathbf{u}$ en de positie van de grote puntmassa noemen we $\mathbf{v}$. Volgens de zwaartekrachtformule trekken de twee puntmassa's elkaar aan met krachten ter grootte van k/r^2, waarbij $k = GMm$ met G de universele gravitatieconstante.

Stelling 8.1. De zwaartekracht $\mathbf{F}$ die de kleine puntmassa in positie $\mathbf{u}$ ondervindt is gelijk aan $-\dfrac{k}{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^3}(\mathbf{u}-\mathbf{v})$ en de zwaartekracht die de grote puntmassa in positie $\mathbf{v}$ ondervindt is gelijk aan $-\mathbf{F} = \dfrac{k}{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^3}(\mathbf{u}-\mathbf{v})$.

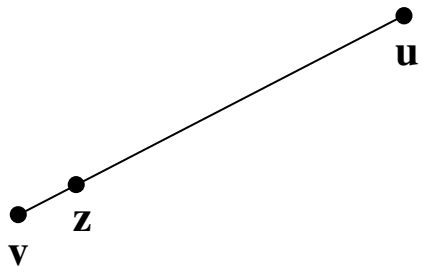
Bewijs. We moeten eenvoudigweg controleren dat de genoemde krachten de juiste richting en de juiste grootte hebben. Zie hiervoor opgave 8.1. □



Opgave 8.1. Laat zien dat de grootte èn de richting van de zwaartekrachten die de twee puntmassa's volgens stelling 8.1 ondervinden, in overeenstemming zijn met de zwaartekrachtformule.

Volgens Newtons tweede wet voldoet de versnelling $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ van de kleine puntmassa aan de bewegingsvergelijking $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{u}}(t)$. Uit stelling 8.1 volgt nu dat $\ddot{\mathbf{u}}(t) = -\dfrac{k/m}{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^3}(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = -\dfrac{GM}{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^3}(\mathbf{u}-\mathbf{v})$. Op dezelfde wijze vinden de versnelling van de grote puntmassa: $\ddot{\mathbf{v}}(t) = \dfrac{Gm}{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^3}(\mathbf{u}-\mathbf{v})$.

Het zwaartepunt $\mathbf{z}$ van de puntmassa's ligt op een zodanige positie op het lijnstuk tussen $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ dat $|\mathbf{u}-\mathbf{z}| : |\mathbf{v}-\mathbf{z}| = M : m$. Het zwaartepunt ligt het dichtst bij de puntmassa met de grootste massa, zo die er is.



Opgave 8.2. Maak een plaatje van twee puntmassa's en hun zwaartepunt waarbij de massaverhouding $M : m$ gelijk is aan $5 : 2$.

Het zwaartepunt van twee puntmassa's blijkt in fysisch opzicht een bijzonder punt te zijn, zoals blijkt uit de volgende stelling.

Stelling 8.2. *Het zwaartepunt* $\mathbf{z}$ *van twee puntmassa's is in rust of beweegt eenparig rechtlijnig.*

Bewijs. We zullen aantonen dat het zwaartepunt geen versnelling ondervindt, d.w.z. $\ddot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{o}$. Newtons Traagheidswet (zie paragraaf 6) zegt dan dat het zwaartepunt in rust is of eenparig rechtlijnig beweegt. Welnu, de positie van het zwaartepunt wordt gegeven door $\mathbf{z} = \frac{m}{M+m}\mathbf{u} + \frac{M}{M+m}\mathbf{v}$. Als we deze uitdrukking tweemaal differentiëren naar de tijd, krijgen we:

$$\ddot{\mathbf{z}} = \frac{m}{M+m}\ddot{\mathbf{u}} + \frac{M}{M+m}\ddot{\mathbf{v}} = \frac{1}{M+m}\left(m\ddot{\mathbf{u}} + M\ddot{\mathbf{v}}\right) = \frac{1}{M+m}\left(\mathbf{F} + -\mathbf{F}\right) = \mathbf{o}. \qquad \square$$

Opgave 8.3. Leg uit dat de snelheid van het zwaartepunt *van twee puntmassa's* een behouden grootheid is.

We gaan nu kijken naar de positie van de kleine puntmassa gezien vanuit de grote puntmassa, ofwel de positie van $\mathbf{u}$ gezien vanuit $\mathbf{v}$. Die positie noemen we $\mathbf{r}$. Dus $\mathbf{r} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. De beweging van $\mathbf{r}$ voldoet aan de volgende verrassende vergelijking.

Stelling 8.3. Voor $\mathbf{r}$ geldt de bewegingsvergelijking $\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k}{r^3}\mathbf{r}$, waarbij $\mu = \frac{Mm}{M+m}$ de zogenaamde gereduceerde massa is.

Bewijs. Uit $\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{o}$ (stelling 8.2) volgt dat $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{u}} = m(\ddot{\mathbf{u}} - \ddot{\mathbf{z}}) = m(\mathbf{u} - \mathbf{z})^{\cdot\cdot}$.

Tweemaal differentiëren van de uitdrukking $\mathbf{u} - \mathbf{z} = \frac{M}{M+m}(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ geeft $(\mathbf{u} - \mathbf{z})^{\cdot\cdot} = \frac{M}{M+m}(\mathbf{u} - \mathbf{v})^{\cdot\cdot} = \frac{M}{M+m}\ddot{\mathbf{r}}$. Dus $\mathbf{F} = m(\mathbf{u} - \mathbf{z})^{\cdot\cdot} = \frac{Mm}{M+m}\ddot{\mathbf{r}} = \mu\ddot{\mathbf{r}}$.

Omdat $\mathbf{F} = -\frac{k}{r^3}\mathbf{r}$, vinden we dat $\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{k}{r^3}\mathbf{r}$. $\square$

Stelling 8.3 zegt dat $\mathbf{r}$ ook voldoet aan een bewegingsvergelijking van de vorm die in de vorige paragraaf is besproken. Dit betekent dat voor $\mathbf{r} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ de drie Keplerwetten gelden. Dus de baan van $\mathbf{r}$ is een ellips (eerste wet) en de beweging van $\mathbf{r}$ voldoet aan de Perkenwet (tweede wet). De derde wet, die zegt wat het verband is tussen de omlooptijd en de lengte van de halve lange as van de baan, geeft het volgende resultaat.

Stelling 8.4. *Tussen de omlooptijd T en de lengte van de halve lange as a van de ellipsbaan van* $\mathbf{r}$ bestaat het volgende verband: $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{G(M+m)}$.

Bewijs. Voor het bewijs nemen we opgave 7.18 als uitgangspunt. Volgens deze opgave is $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2\mu}{k}$. Substitutie van $k = GMm$ en $\mu = \dfrac{Mm}{M+m}$ geeft het verlangde resultaat. □

De Harmonische wet (stelling 7.11) kan worden gezien als een limietgeval (voor $m \to 0$) van stelling 8.4.

Opgave 8.4. De ster Sirius in het sterrenbeeld Grote Hond is na de Zon de helderste ster aan de hemel. In werkelijkheid is Sirius een dubbelster, bestaande uit een zeer heldere ster (Sirius A) en een witte dwerg (Sirius B). De witte dwerg is voor ons onzichtbaar, omdat deze door de heldere ster wordt overstraald. De massa van Sirius A is 2,02 Zonnemassa's en de massa van Sirius B is 0,99 Zonnemassa's. De massa van de Zon is $1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg. Sirius B draait om Sirius A in een ellipsbaan met een periode van 50,1 jaar. Laat met behulp van stelling 8.4 zien dat de lengte van de halve lange as van die ellipsbaan ongeveer 20 AE is (1 AE is ongeveer 150 miljoen km).

9 Tabellen

Door meten tot weten
Heike Kamerlingh Onnes (1853-1926)

In deze paragraaf staan enkele tabellen over het Zonnestelsel. Ontbrekende of meer nauwkeurige data kun je vinden op het internet. De onderstaande tabel bevat gegevens over de planeten in het Zonnestelsel.

Planeet	**Massa**	**Diameter**	**a**	**e**	**T**	**P**
Eenheid	10^{24} kg	km	AE		d, a	d, h, m, s
Mercurius	0,33	4878	0,39	0,206	88 d	59 d
Venus	4,86	12102	0,72	0,007	225 d	-243 d
Aarde	5,97	12756	1,00	0,017	365,26 d	23 h 56 m 1 s
Mars	0,64	6792	1,52	0,093	687 d	24 h 37 m 23 s
Jupiter	1899	141700	5,20	0,048	11,86 a	9 h 50 m 30 s
Saturnus	568,5	120660	9,58	0,052	29,46 a	10 h 14 m
Uranus	86,8	50800	19,31	0,050	84,01 a	14 h 42 m
Neptunus	102,4	48600	30,20	0,004	164,79 a	18 h 24 m

a is de lengte van de halve lange as in AE
e is de excentriciteit (e = c/a, waarbij c de halve brandpuntsafstand is)
T is de omlooptijd om de Zon in dagen (d) of jaren (a)
P is de rotatieperiode in dagen (d), uren (h), minuten (m) en seconden (s)

De planeten Mercurius, Venus, Mars, Jupiter en Saturnus zijn met het blote oog zichtbaar en al bekend sinds de klassieke oudheid. Merk op dat Venus retrograde om zijn as draait (d.w.z. achterwaarts vergeleken met de andere planeten). Uranus werd in 1781 bij toeval ontdekt door de Engelse astronoom William Herschel. Na de ontdekking van Uranus werd al snel gespeculeerd over het bestaan van nog meer planeten, op nog grotere afstand van de Zon. De baan van Uranus bleek een kleine afwijking te vertonen ten opzichte van de met Newtons Bewegingsvergelijking voorspelde baan. Hierdoor werd uiteindelijk in 1846 Neptunus ontdekt door de Fransman Urbain Jean-Joseph Le Verrier en de Duitser Johann Gottfried Galle.
Het duurde tot 1930 voordat Pluto werd waargenomen door de Amerikaan Clyde Tombaugh op zo'n 40 AE van de Zon. De Ierse astronoom Kenneth Edgeworth publiceerde in 1949 een artikel, waarin hij stelde dat zich buiten de baan van Neptunus een hele schijf van kleine komeetachtige hemellichamen zou bevinden. Pluto zou slechts het topje van deze ijsberg zijn. In

1951 publiceerde de Nederlandse astronoom Gerard Kuiper een belangrijk overzichtsartikel over het ontstaan van ons Zonnestelsel, met daarin het idee dat zich in het buitengebied van ons Zonnestelsel een hele ring van planetoiden zou moeten bevinden. Er blijkt zich inderdaad een ring van kleine ijzige formaties van materie buiten de baan van Neptunus te bevinden. Deze ring wordt de Kuipergordel genoemd en bevindt zich op 30 AE tot 50 AE van de Zon. Aan het begin van de eenentwintigste eeuw werden in rap tempo nieuwe objecten in de Kuipergordel waargenomen. De belangrijkste daarvan staan in de volgende tabel.

Dwergplaneet	**Diameter**	**Jaar**	**a**	**e**	**T**
Eenheid	km		AE		a
Pluto	2300	1930	39,54	0,249	248,1
Varuna	900	2000	43,13	0,051	283,2
Ixion	800	2001	39,68	0,242	250,0
Quaoar	1300	2002	43,61	0,034	286,0
Sedna	1500	2003	525,86	0,855	12050
Orcus	1100	2004	39,42	0,225	247,5
Eris	2400	2005	67,67	0,442	557

Jaar is het jaar van ontdekking
a is de lengte van de halve lange as in AE
e is de excentriciteit (e = c/a, waarbij c de halve brandpuntsafstand is)
T is de omlooptijd om de Zon in jaren (a)

De objecten in de Kuipergordel worden dwergplaneten of ijsdwergen genoemd. Tijdens een congres van de Internationale Astronomische Unie in Praag in 2006 werd uitvoerig gediscussieerd en uiteindelijk gestemd over een goede definitie van het begrip planeet. Het resultaat was dat de objecten in de Kuipergordel slechts dwergplaneten werden. Ons Zonnestelsel kent acht planeten en daarmee basta. Als gevolg daarvan moest Pluto zijn status van planeet inleveren. Als pleister op de wonde werd de naam plutino ingevoerd voor objecten in de Kuipergordel die een baanresonantie met Neptunus hebben in een verhouding van 3:2 (dat wil zeggen dat hun omlooptijd ongeveer 1,5 maal zo groot is als die van Neptunus). Naast Pluto zelf zijn Ixion en Orcus voorbeelden van plutino's. Eris is de Griekse godin van de twist, ter herinnering aan de strijd die ontstond over de status van Pluto als planeet.

De dwergplaneet Sedna is een curieus object in de Kuipergordel. De baan is zeer excentrisch, en de afstand van het aphelium[8] tot de Zon bedraagt maar liefst 972 AE. Sedna heeft men slechts kunnen waarnemen nu deze ijsdwerg zich in het perihelium[9] bevindt, op zo'n 76 AE van de Zon.

De meeste planeten en ook sommige dwergplaneten in ons Zonnestelsel hebben manen, ook wel satellieten genaamd, een term die afkomstig is van Kepler. De bekendste satellieten zijn in de volgende tabel te vinden.

Planeet	**Satelliet**	**Diameter**	**Jaar**	**R**	**T**
Eenheid		km		km	d
Aarde	Maan	3476		$3{,}84 \cdot 10^5$	27,32
Mars	Phobos	22,2	1877	$9{,}38 \cdot 10^3$	0,32
	Deimos	12,6	1877	$2{,}35 \cdot 10^4$	1,26
Jupiter	Io	3660	1610	$4{,}22 \cdot 10^5$	1,769
	Europa	3120	1610	$6{,}71 \cdot 10^5$	3,551
	Ganymedes	5260	1610	$1{,}07 \cdot 10^6$	7,155
	Callisto	4820	1610	$1{,}88 \cdot 10^6$	16,69
Saturnus	Rhea	1530	1672	$5{,}27 \cdot 10^5$	4,52
	Titan	5150	1655	$1{,}22 \cdot 10^6$	15,95
	Iapetus	1470	1671	$3{,}56 \cdot 10^6$	79,32
Uranus	Titania	1580	1787	$4{,}36 \cdot 10^5$	8,70
	Oberon	1520	1787	$5{,}84 \cdot 10^5$	13,46
Neptunus	Triton	2710	1846	$3{,}55 \cdot 10^5$	-5,88
Pluto	Charon	1210	1978	$1{,}96 \cdot 10^4$	6,39
Eris	Dysnomia	150	2005	$3{,}74 \cdot 10^4$	15,77

Jaar is het jaar van ontdekking
R is de gemiddelde afstand van de satelliet tot het middelpunt van de planeet in km
T is de omlooptijd van de satelliet om de planeet in dagen (d)

Triton draait retrograde om zijn as (d.w.z. tegengesteld aan de draairichting van de planeet Neptunus). De massa van de satelliet Charon van de ijsdwerg Pluto bedraagt zo'n 12% van de massa van Pluto, zodat men eerder kan spreken over een dubbelplanetoïde.

[8] Het verste punt in de baan van een planeet tot de zon
[9] Het dichtstbijzijnde punt in de baan van een planeet tot de zon

De wetten van Kepler Antwoorden

1 Vectoren in de ruimte

1.2. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = ((u_1,u_2,u_3)+(v_1,v_2,v_3))+(w_1,w_2,w_3) =$
$(u_1+v_1,\ u_2+v_2,\ u_3+v_3)+(w_1,\ w_2,\ w_3) =$
$((u_1+v_1)+w_1,\ (u_2+v_2)+w_2,\ (u_3+v_3)+w_3) =$
$(u_1+(v_1+w_1),\ u_2+(v_2+w_2),\ u_3+(v_3+w_3)) =$
$(u_1,u_2,u_3)+(v_1+w_1,\ v_2+w_2,\ v_3+w_3) =$
$(u_1,u_2,u_3)+((v_1,v_2,v_3)+(w_1,w_2,w_3)) = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

1.3. $\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \lambda((u_1,u_2,u_3)+(v_1,v_2,v_3)) =$
$\lambda(u_1+v_1,\ u_2+v_2,\ u_3+v_3) =$
$(\lambda(u_1+v_1),\lambda(u_2+v_2),\lambda(u_3+v_3)) =$
$(\lambda u_1+\lambda v_1,\lambda u_2+\lambda v_2,\lambda u_3+\lambda v_3) =$
$(\lambda u_1,\lambda u_2,\lambda u_3)+(\lambda v_1,\lambda v_2,\lambda v_3) =$
$\lambda(u_1,u_2,u_3)+\lambda(v_1,v_2,v_3) = \lambda\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}$

1.5 c. De punten liggen (bij a en b) op dezelfde plaats.

d. De punten liggen nu niet op dezelfde plaats.

e. $\lambda+\mu=1$

f. $\lambda\mathbf{a}+(1-\lambda)\mathbf{b} = \mathbf{b}+\lambda(\mathbf{a}-\mathbf{b})$

g. Kijk naar de uitdrukking $\mathbf{b}+\lambda(\mathbf{a}-\mathbf{b})$. De positie van $\mathbf{b}$ hangt niet van de plaats van de oorsprong af en ook de vector $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ hangt daar niet vanaf.

1.6 a. $\mathbf{p} = \mathbf{a}+\frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}$
$\mathbf{q} = \mathbf{b}+\frac{1}{2}(\mathbf{c}-\mathbf{b}) = \frac{1}{2}\mathbf{b}+\frac{1}{2}\mathbf{c}$
$\mathbf{r} = \mathbf{a}+\frac{1}{2}(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{c}$

b. $\mathbf{a} = \mathbf{p}+(\mathbf{r}-\mathbf{q}) = \mathbf{p}-\mathbf{q}+\mathbf{r}$
$\mathbf{b} = \mathbf{p}+(\mathbf{q}-\mathbf{r}) = \mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{r}$
$\mathbf{c} = \mathbf{r}+(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = -\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r}$

c. Een punt op de zwaartelijn door $\mathbf{a}$ is van de vorm: $\mathbf{a}+\lambda(\mathbf{q}-\mathbf{a}) =$

$\mathbf{a}+\lambda(\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a})=(1-\lambda)\mathbf{a}+\frac{1}{2}\lambda\mathbf{b}+\frac{1}{2}\lambda\mathbf{c}$. Voor $\lambda=\frac{2}{3}$ is dit het punt $\mathbf{z}=\frac{1}{3}\mathbf{a}+\frac{1}{3}\mathbf{b}+\frac{1}{3}\mathbf{c}$. Dus $\mathbf{z}$ ligt op de zwaartelijn door $\mathbf{a}$.

d. Op dezelfde wijze als bij c vind je dat $\mathbf{z}$ ligt op de zwaartelijnen door $\mathbf{b}$ respectievelijk $\mathbf{c}$. Dus de drie zwaartelijnen gaan door één punt, namelijk $\mathbf{z}$.

2 Het inwendig product

2.1 a. $|\mathbf{a}|=\sqrt{14}$, $|\mathbf{b}|=\sqrt{12}$ en $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=\sqrt{26}$.

b. $|\mathbf{c}|=\sqrt{21}$, $|\mathbf{d}|=\sqrt{14}$ en $|\mathbf{c}-\mathbf{d}|=\sqrt{29}$.

c. $|\mathbf{e}|=\sqrt{13}$, $|\mathbf{f}|=\sqrt{6}$ en $|\mathbf{e}-\mathbf{f}|=\sqrt{17}$.

2.2 a. Dit volgt uit de Stelling van Pythagoras.

b. Dit volgt uit de Uitgebreide Stelling van Pythagoras.

2.3 a. recht, want $14+12=26$.

b. scherp, want $21+14>29$.

c. scherp, want $13+6>17$.

2.4. Dit volgt door het uitschrijven in coördinaten van de resultaten van opgave 2.3.

2.5 a. recht, want $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$.

b. scherp, want $\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}=3>0$.

c. scherp, want $\mathbf{e}\cdot\mathbf{f}=1>0$.

2.6 a. k: $(3,0,0)+\lambda\cdot(-3,4,3)$ en l: $(0,0,6)+\mu\cdot(3,8,-12)$

b. Uit $(3,0,0)+\lambda\cdot(-3,4,3)=(0,0,6)+\mu\cdot(3,8,-12)$ volgt: $\lambda=\frac{2}{3}$ en $\mu=\frac{1}{3}$. Dus de coördinaten van het snijpunt zijn $(1,\ 2\frac{2}{3},\ 2)$.

2.7 a. $(\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{d})=0$

b. $(\mathbf{m}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{n}-\mathbf{m})=4>0$, dus de gevraagde hoek is scherp.

c. Zeg $\mathbf{p}=(0,0,z)$. Uit $(\mathbf{p}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{m}-\mathbf{a})=0$ en $(\mathbf{p}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{m}-\mathbf{c})=0$ volgt $z=8$. Dus $\mathbf{p}=(0,0,8)$.

2.8 a. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (u_1,u_2,u_3)\cdot(v_1,v_2,v_3) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 =$
$v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$

b. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = (u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)\cdot(w_1,w_2,w_3) =$
$(u_1+v_1)w_1 + (u_2+v_2)w_2 + (u_3+v_3)w_3 =$
$u_1w_1 + v_1w_1 + u_2w_2 + v_2w_2 + u_3w_3 + v_3w_3 =$
$u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 + v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 =$
$(u_1,u_2,u_3)\cdot(w_1,w_2,w_3) + (v_1,v_2,v_3)\cdot(w_1,w_2,w_3) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$

c. $(\lambda\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = (\lambda u_1,\lambda u_2,\lambda u_3)\cdot(v_1,v_2,v_3) =$
$(\lambda u_1)v_1 + (\lambda u_2)v_2 + (\lambda u_3)v_3 =$
$\lambda(u_1v_1) + \lambda(u_2v_2) + \lambda(u_3v_3) = \lambda(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$

2.9. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = (u_1,u_2,u_3)\cdot(u_1,u_2,u_3) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = |\mathbf{u}|^2$

2.10 a. $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$.

b. $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$.

c. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2$.

d. Volgt vrijwel rechtstreeks uit a en b.

2.11. $13°$

2.12. $79°$

2.13. $\cos\gamma = 0$ precies dan als $\gamma = 90°$ en
$\cos\gamma > 0$ precies dan als $0° \le \gamma < 90°$ en
$\cos\gamma < 0$ precies dan als $90° < \gamma \le 180°$.

2.14. Zeg dat $|\mathbf{h}_i| = R$ en noem de hoek tussen $\mathbf{h}_i$ en $\mathbf{h}_j$ φ.
Dan geldt enerzijds: $\mathbf{h}_1\cdot(\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2+\mathbf{h}_3+\mathbf{h}_4) =$
$\mathbf{h}_1\cdot\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_1\cdot\mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_1\cdot\mathbf{h}_3 + \mathbf{h}_1\cdot\mathbf{h}_4 = R^2 + 3R^2\cos\varphi$
En anderzijds: $\mathbf{h}_1\cdot(\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2+\mathbf{h}_3+\mathbf{h}_4) = \mathbf{h}_1\cdot\mathbf{o} = 0$.
Dus $R^2 + 3R^2\cos\varphi = 0$ en dus is $\cos\varphi = -\frac{1}{3}$ en $\varphi \approx 109°$.

2.15 a. $\left(4\frac{1}{2},\ 4\frac{1}{2},\ 0\right)$

b. $\mathbf{q} = \mathbf{u} - \mathbf{p} = \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 6\right)$

c. $\mathbf{s} = \mathbf{u} - 2\mathbf{p} = (-5,\ -4,\ 6)$

2.16 a. $\mathbf{v}$ ligt in $V \Rightarrow \mathbf{v} - \mathbf{q} \perp \mathbf{n} \Rightarrow (\mathbf{v} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$.

b. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \Rightarrow (\mathbf{v} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} - \mathbf{q} \perp \mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{v}$ ligt in V.

2.17. a = 1, b = 2, c = -1 en d = 1.

2.18. Bijvoorbeeld $\mathbf{n} = (3, 2, -5)$ en $\mathbf{q} = (0, 4, 0)$.

2.19 a. $\mathbf{p} = (1, 2, 6)$

b. $\mathbf{q} = (-2, -1, 6)$

c. $3\sqrt{2}$

2.20. De afstand is $|\mathbf{p} - \mathbf{v}| = \left| \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n} \right| = \frac{|(\mathbf{v} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|^2} |\mathbf{n}| = \frac{|(\mathbf{v} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$.

2.21. $\frac{8}{5\sqrt{2}} = \frac{4}{5}\sqrt{2}$

2.22. $\mathbf{n} = (a, b, c)$ is een normaalvector van vlak V. Laat $\mathbf{q}$ een punt zijn van V. Dan is $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ een vergelijking van V (opgave 2.17). Dus $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = d$. Volgens opgave 2.21 is de afstand van $\mathbf{u}$ tot V gelijk aan $\frac{|(\mathbf{u} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|au_1 + bu_2 + cu_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

2.23. De hoek tussen twee lijnen is per definitie scherp. De twee hoeken zijn samen $180°$ en hebben dus een tegengestelde cosinus.

2.24. Pas de formule voor de hoek tussen twee lijnen toe op de lijnen met richtingsvectoren $\mathbf{v}$ en $\mathbf{n}$. En omdat $\beta + \delta = 90°$ is $\sin\beta = \cos\delta$.

2.25. Dan is $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{n}|$. Volgens de formule is $\sin\beta = 1$ en dus is $\beta = 90°$. Dat klopt inderdaad.

2.26. Als je langs de richting van de snijlijn van de vlakken kijkt, dan zie je de vlakken als lijnen. De dragers van de bijbehorende normaalvectoren staan loodrecht op deze lijnen en maken dus ook onderling dezelfde hoek.

2.27 a. $2\sqrt{3}$
b. $\left(0, \frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$
c. $64°$
d. $71°$
e. $60°$
f. $71°$

3 Het uitwendig product

3.1 a. $(3,1,-3)$
b. $(25,-4,10)$
c. $(4,-5,1)$

3.2 a. $(1,0,1)$
b. $(1,1,1)$
c. $(1,1,-1)$

3.5 a. $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (1,0,-1)$
b. $\mathbf{c}\times\mathbf{d} = (-25,4,-10)$
c. $\mathbf{e}\times\mathbf{f} = (20,-25,5)$
Het uitproducten is telkens een veelvoud van het antwoord bij 3.1.

3.6 a. $(1,1,-2)$
b. $(3,-2,4)$
c. $(1,2,4)$
d. $(1,-1,2)$

3.7. Schrijf eerst het linkerlid helemaal uit in coördinaten en daarna het rechterlid. Als je secuur werkt, dan staat er tweemaal hetzelfde.

3.8. $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=(\mathbf{u}\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=\mathbf{o}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{o}\Rightarrow\mathbf{u}\times\mathbf{v}\perp\mathbf{u}$.
$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{v})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{o}=\mathbf{o}\Rightarrow\mathbf{u}\times\mathbf{v}\perp\mathbf{v}$.

3.9. $\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\mathbf{z}$, $\mathbf{y}\times\mathbf{z}=\mathbf{x}$ en $\mathbf{x}\times\mathbf{z}=-\mathbf{y}$. Het resultaat komt telkens overeen met de kurkentrekkerregel.

3.10. Als $\mathbf{u}=\mathbf{o}$ of $\mathbf{v}=\mathbf{o}$, dan zijn $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ proportioneel. Neem daarom aan, dat $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ beide ongelijk zijn aan $\mathbf{o}$. Dan geldt volgens stelling 3.2: $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{o}\Rightarrow|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|=0\Rightarrow|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\sin\gamma=0$. Aangezien $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ beide ongelijk zijn aan $\mathbf{o}$, moet $\sin\gamma=0$. Dus $\gamma=0°$ of $\gamma=180°$. Dus $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ zijn proportioneel.

3.11. $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}))=\mathbf{a}\cdot((\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\mathbf{c}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{d})=$
$(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$.
Uitschrijven in coördinaten is veel meer werk.

3.12. $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})+\mathbf{v}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{u})+\mathbf{w}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=$
$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{w}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u}+(\mathbf{w}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}-(\mathbf{w}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}=\mathbf{o}$.

4 Krommen in de ruimte

4.1 a. $\left(-8\tfrac{1}{2},-17,17\right)$
b. $(3,2,-1)$
c. $(\cos 5,\sin 5,5)$
d. $\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\tfrac{1}{3}\pi\right)+k(0,0,2\pi)$ en $\left(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\sqrt{3},-\tfrac{1}{3}\pi\right)+k(0,0,2\pi)$ (met k geheel).

4.2. rechte lijn; parabool; schroeflijn.

4.3 a. De baan is telkens de rechte lijn $\lambda(1,2,-2)$.
b. Het deeltje loopt bij de kromme $\mathbf{q}$ 2 seconden achter op het deeltje bij de kromme $\mathbf{p}$.
c. Nee, het deeltje doorloopt bij de kromme $\mathbf{s}$ een halve lijn.

4.4. $(\mathbf{p}+\mathbf{q})(t)=(4t-4,8t-8,-8t+8)$
$(\mathbf{p}-\mathbf{q})(t)=(4,8,-8)$

$(3\mathbf{r})(t) = (6t^3, 12t^3, -12t^3)$

$(2\mathbf{p} - 3\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{r})(t) = (-2t + 12 + t^3, -4t + 24 + 2t^3, 4t - 24 - 2t^3)$

4.5 a. $(|\mathbf{k}|(t))^2 = (\cos^2 t)^2 + (\sin t \cdot \cos t)^2 + (\sin t)^2 =$

$\cos^4 t + \sin^2 t \cdot \cos^2 t + \sin^2 t = \cos^4 t + (1 - \cos^2 t) \cdot \cos^2 t + \sin^2 t =$

$\cos^4 t + \cos^2 t - \cos^4 t + \sin^2 t = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$

b. Het deeltje beweegt over een bol met straal 1.

4.6. $\dot{\mathbf{f}}(t) = (2, 4, -4)$

$\dot{\mathbf{g}}(t) = (0, 2, 2t - 2)$

$\dot{\mathbf{h}}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$

4.7 a. $|\dot{\mathbf{f}}|(t) = 6$; $|\dot{\mathbf{g}}|(t) = \sqrt{4t^2 - 8t + 8}$; $|\dot{\mathbf{h}}|(t) = \sqrt{2}$.

b. $(3, 2, -1)$

c. $\dot{\mathbf{h}}(t) \cdot (0,0,1) = (-\sin t, \cos t, 1) \cdot (0,0,1) = 1$ en dus constant.

d. Die hoek is 45°.

4.8 a. $\dot{\mathbf{k}}(t) = (-2\cos t \cdot \sin t, \cos^2 t - \sin^2 t, \cos t) = (-\sin(2t), \cos(2t), \cos t)$

b. $|\dot{\mathbf{k}}|(t) = \sqrt{\sin^2(2t) + \cos^2(2t) + \cos^2 t} = \sqrt{1 + \cos^2 t}$

c. 1; in $(0,0,1)$ of in $(0,0,-1)$

d. $\sqrt{2}$; in $(1,0,0)$

4.9 a. $|\mathbf{f}(t)| = (2 + \cos(3t)) \cdot \sqrt{\cos^2(2t) + \sin^2(2t)} = 2 + \cos(3t)$

b. Alle waarden uit het interval [1, 3].

c. $\dot{\mathbf{f}}(t) = (-3\sin(3t)\cos(2t) - 2\sin(2t)(2 + \cos(3t)),$

$-3\sin(3t)\sin(2t) + 2\cos(2t)(2 + \cos(3t)))$

d. $|\dot{\mathbf{f}}(t)|^2 = (-3\sin(3t)\cos(2t) - 2\sin(2t)(2 + \cos(3t)))^2 +$

$(-3\sin(3t)\sin(2t) + 2\cos(2t)(2 + \cos(3t)))^2 = ...=$

$9\sin^2(3t) + 4 \cdot (2 + \cos(3t))^2 =$

$9\sin^2(3t) + 16 + 16\cos(3t) + 4\cos^2(3t) =$

$25 + 16\cos(3t) - 5\cos^2(3t)$.

Dus $\left|\dot{\mathbf{f}}(t)\right| = \sqrt{25+16\cos(3t)-5\cos^2(3t)}$.

e. 2 (als $\cos(3t) = -1$).

4.10 a. $\left|\mathbf{g}(t)\right|^2 = \big(2+\cos(3t)\big)^2 \cdot \big(\cos^2(2t)+\sin^2(2t)\big)+\sin^2(3t) =$
$\big(2+\cos(3t)\big)^2 + \sin^2(3t) = 5+4\cos(3t)$.
Dus $\left|\mathbf{g}(t)\right| = \sqrt{5+4\cos(3t)}$.

b. Alle waarden uit het interval [1, 3].

c. $\dot{\mathbf{g}}(t) = (-3\sin(3t)\cos(2t) - 2\sin(2t)(2+\cos(3t)),$
$-3\sin(3t)\sin(2t) + 2\cos(2t)(2+\cos(3t)), 3\cos(3t))$.

d. Door handig gebruik te maken van een tussenresultaat in het antwoord van 4.9 d kunnen we het rekenwerk beperken.
$\left|\dot{\mathbf{g}}(t)\right|^2 = \big(-3\sin(3t)\cos(2t) - 2\sin(2t)(2+\cos(3t))\big)^2 +$
$\big(-3\sin(3t)\sin(2t) + 2\cos(2t)(2+\cos(3t))\big)^2 + 9\cos^2(3t) = \ldots\ldots =$
$9\sin^2(3t) + 4\cdot(2+\cos(3t))^2 + 9\cos^2(3t) = 9+4\cdot(2+\cos(3t))^2$.
Dus $\left|\dot{\mathbf{g}}(t)\right| = \sqrt{9+4\cdot(2+\cos(3t))^2}$.

e. Alle waarden uit het interval $[\sqrt{13},\ 3\sqrt{5}]$.

4.11. Vervang in het bewijs van de productregel voor het inproduct alle inproducten door uitproducten en ga na dat alles weer klopt.

4.12 a. $\mathbf{k}(t)\times\dot{\mathbf{k}}(t) = (1,-2,1)$

b. De baan ligt in het vlak met vergelijking $x-2y+z=0$.

4.13. $\left|\mathbf{f}(t)\right| = r \Rightarrow \left|\mathbf{f}(t)\right|^2 = r^2 \Rightarrow \mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{f}(t) = r$.
Differentiëren geeft: $2\mathbf{f}(t)\cdot\dot{\mathbf{f}}(t) = 0$, ofwel $\mathbf{f}(t) \perp \dot{\mathbf{f}}(t)$.

4.14. $\ddot{\mathbf{p}}(t) = (0,0,0) = \mathbf{o}$ en $\ddot{\mathbf{r}}(t) = (12t, 24t, -24t) = 12t(1,2,-2)$
$\left|\ddot{\mathbf{p}}(t)\right| = 0$ en $\left|\ddot{\mathbf{r}}(t)\right| = \left|12t\right|\cdot 3 = 36|t|$.

4.15. $\ddot{\mathbf{k}}(t) = (-\sin t - \cos t, -\sin t, -\sin t + \cos t) = \mathbf{k}(t)$

4.16. Zeg $\left|\dot{\mathbf{f}}(t)\right| = c$. Dan is $\dot{\mathbf{f}}(t)\cdot\dot{\mathbf{f}}(t) = c^2$.

Differentiëren geeft: $2\dot{\mathbf{f}}(t)\cdot\ddot{\mathbf{f}}(t)=0$, ofwel $\dot{\mathbf{f}}(t)\perp\ddot{\mathbf{f}}(t)$.

4.17. $v(t)=\sqrt{1^2+(-at+b)^2}=\sqrt{a^2t^2-2abt+b^2+1}$
en $a(t)=\sqrt{0^2+(-a)^2}=a$.

4.18 a. $\mathbf{v}(t)=(-\omega R\sin(\omega t),\omega R\cos(\omega t))$. We zien dat $\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{r}(t)=0$.

b. $v(t)=\sqrt{\omega^2R^2\sin^2(\omega t)+\omega^2R^2\cos^2(\omega t)}=\sqrt{\omega^2R^2}=\omega R$

c. $\mathbf{a}(t)=(-\omega^2R\cos(\omega t),-\omega^2R\sin(\omega t))=$
$-\omega^2(R\cos(\omega t),R\sin(\omega t))=-\omega^2\mathbf{r}(t)$

d. $a(t)=|\mathbf{a}(t)|=|-\omega^2\mathbf{r}(t)|=\omega^2|\mathbf{r}(t)|=\omega^2R$

e. Uit b volgt dat $\omega=\dfrac{v}{R}$, dus $a(t)=\omega^2R=\left(\dfrac{v}{R}\right)^2\cdot R=\dfrac{v^2}{R}$.

4.19 a. De vectoren $\mathbf{v}(t)$ en $\mathbf{r}(t+\frac{1}{4}T)$ wijzen in dezelfde richting.
En $\left|\dfrac{v}{R}\mathbf{r}(t+\frac{1}{4}T)\right|=\dfrac{v}{R}\cdot R=v=|\mathbf{v}(t)|$, dus $\mathbf{v}(t)=\dfrac{v}{R}\mathbf{r}(t+\frac{1}{4}T)$.

b. $\mathbf{a}(t)=\dot{\mathbf{v}}(t)=\dfrac{v}{R}\dot{\mathbf{r}}(t+\frac{1}{4}T)=\dfrac{v}{R}\mathbf{v}(t+\frac{1}{4}T)=\dfrac{v}{R}\mathbf{r}(t+\frac{1}{2}T)=-\dfrac{v^2}{R^2}\mathbf{r}(t)$.

c. Uit b volgt dat de versnelling gericht is naar het middelpunt en de grootte van de versnelling is gelijk aan $\left|-\dfrac{v^2}{R^2}\mathbf{r}(t)\right|=\dfrac{v^2}{R^2}\cdot R=\dfrac{v^2}{R}$.

4.20 a. $\mathbf{a}(t)=(-\omega^2a\cos(\omega t),-\omega^2b\sin(\omega t))=$
$-\omega^2(a\cos(\omega t),b\sin(\omega t))=-\omega^2\mathbf{r}(t)$

b. $v(t)^2=\omega^2\left(a^2\sin^2(\omega t)+b^2\cos^2(\omega t)\right)$
$(r(t))^2+(v(t)/\omega)^2=a^2\cos^2(\omega t)+b^2\sin^2(\omega t)+$
$\left(\omega^2a^2\sin^2(\omega t)+\omega^2b^2\cos^2(\omega t)\right)/\omega^2=a^2+b^2$

4.21. Uit $O'(t)=\frac{1}{2}|\mathbf{n}|$ volgt dat $O(t)-O(t_0)=\frac{1}{2}|\mathbf{n}|\cdot(t-t_0)$.
Omdat $O(t_0)=0$ (per definitie) is $O(t)=\frac{1}{2}|\mathbf{n}|\cdot(t-t_0)$.

5 De reuzen van Newton

5.1 a. $(-3,0),\ (3,0),\ (0,-2),\ (0,2)$

b. $\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{4}=1-\frac{x^2}{9} \Leftrightarrow$

$y^2=4-\frac{4}{9}x^2 \Leftrightarrow y=\sqrt{4-\frac{4}{9}x^2}$ of $y=-\sqrt{4-\frac{4}{9}x^2}$.

d. Laat F de figuur zijn die ontstaat uit de cirkel C met vergelijking $x^2+y^2=9$ door vermenigvuldiging t.o.v. de x-as met factor $\frac{2}{3}$.

Dan geldt: (x,y) ligt op figuur $F \Leftrightarrow \left(x,\frac{3}{2}y\right)$ ligt op cirkel $C \Leftrightarrow$

$x^2+\left(\frac{3}{2}y\right)^2=9 \Leftrightarrow x^2+\frac{9}{4}y^2=9 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \Leftrightarrow$

$\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1 \Leftrightarrow (x,y)$ ligt op figuur E .

Dus de figuren E en F zijn hetzelfde.

5.2 a. $|\mathbf{r}-\mathbf{f}_1|=2a-|\mathbf{r}-\mathbf{f}_2| \Leftrightarrow |(x,y)-(-c,0)|=2a-|(x,y)-(c,0)| \Leftrightarrow$

$|(x+c,y)|=2a-|(x-c,y)| \Leftrightarrow |(x+c,y)|^2=(2a-|(x-c,y)|)^2$

b. $|(x+c,y)|^2=(2a-|(x-c,y)|)^2 \Leftrightarrow$

$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 \Leftrightarrow$

$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2 \Leftrightarrow$

$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4xc \Leftrightarrow$

$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc \Leftrightarrow$

$a^2\left((x-c)^2+y^2\right)=\left(a^2-xc\right)^2$

c. $a^2\left((x-c)^2+y^2\right)=\left(a^2-xc\right)^2 \Leftrightarrow$

$a^2\left(x^2-2xc+c^2+y^2\right)=a^4-2a^2xc+x^2c^2 \Leftrightarrow$

$a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2xc+x^2c^2 \Leftrightarrow$

$a^2x^2-x^2c^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2 \Leftrightarrow$

$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right) \Leftrightarrow$

$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$

5.3 a. a is de horizontale component van de beginsnelheid en c is de verticale component van de beginsnelheid. Dit betekent dat $\cos\theta = \frac{a}{v}$ ofwel $a = v\cos\theta$ en $\sin\theta = \frac{c}{v}$ ofwel $c = v\sin\theta$.

b. Bepaal voor welke t geldt $y = 0$:

$-\frac{1}{2}gt^2 + ct = 0 \Leftrightarrow t\left(-\frac{1}{2}gt + c\right) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ of $t = \frac{2c}{g}$.

c. $t = 0 \Rightarrow x = 0$ (beginpunt) en $t = \frac{2c}{g} \Rightarrow x = at = \frac{2ac}{g}$ (eindpunt).

Substitutie van $a = v\cos\theta$ en $c = v\sin\theta$ geeft nu:

$$x = \frac{2ac}{g} = \frac{2v\cos\theta v\sin\theta}{g} = \frac{2v^2\cos\theta\sin\theta}{g} = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta$$

d. $x = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta$ is maximaal als $\sin 2\theta$ maximaal is. Dan is $\sin 2\theta = 1$ ofwel als $2\theta = 90°$ ofwel $\theta = 45°$.

e. Bij een afvuurhoek θ hoort een overbrugde afstand van $\frac{v^2}{g}\sin 2\theta$ en bij een afvuurhoek $90° - \theta$ hoort een overbrugde afstand van $\frac{v^2}{g}\sin 2(90° - \theta) = \frac{v^2}{g}\sin(180° - 2\theta) = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta$.

NB Hier wordt de gonioregel $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ toegepast.

6 De wetten van Newton

6.1. $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{g} \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}(t) = t\mathbf{g} + \mathbf{v}$ voor zekere $\mathbf{v}$ *in* $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{g} + t\mathbf{v} + \mathbf{u}$ voor zekere $\mathbf{u}$ *in* $\mathbb{R}^3$.

6.2. $F = \frac{GMm}{r^2}$, dus $G = \frac{Fr^2}{Mm}$. Dus $[G] = \frac{Nm^2}{kg^2} = Nm^2kg^{-2}$.

6.3 a. $\frac{GM}{R^2} = 6{,}673\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}976\cdot 10^{24}/(6{,}371\cdot 10^6)^2 \approx 9{,}8 = g$.

b. Het volume V van de Aarde is $\frac{4}{3}\pi R^3$ (inhoud van bol met straal R).
De soortelijke massa van de Aarde is $M/V = M/\frac{4}{3}\pi R^3 = 3M/4\pi R^3$.

c. $3M/4\pi R^3 = 3\cdot 5{,}976\cdot 10^{24} / 4\pi\cdot\left(6{,}371\cdot 10^6\right)^3 \approx 5{,}52\cdot 10^3\ kg\cdot m^{-3}$.

d. $5{,}52\cdot 10^3\ \frac{kg}{m^3} = 5{,}52\ \frac{kg}{dm^3}$. Dit is meer dan de soortelijke massa van water ($1{,}0\ kg\cdot dm^{-3}$) en van zand ($1{,}6\ kg\cdot m^{-3}$). Dus de Aarde moet van binnen zwaarder zijn dan aan het oppervlak. Dit is waarschijnlijk het gevolg van een ijzeren kern.

7 De wetten van Kepler

7.1. $\left|\mathbf{F}(\mathbf{r})\right| = \left|-\frac{k}{r^3}\mathbf{r}\right| = \frac{k}{r^3}\left|\mathbf{r}\right| = \frac{k}{r^2}$.

7.2. $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ en $\mathbf{r}$ zijn proportioneel, want $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \lambda\mathbf{r}$, waarbij $\lambda = -\frac{k}{r^3}$.

7.3 a. $\dot{\mathbf{p}}(t) = (m\mathbf{v}(t))^{\cdot} = m\dot{\mathbf{v}}(t) = m\mathbf{a}(t) = \mathbf{F}(t)$.

b. $\dot{\mathbf{L}}(t) = (\mathbf{r}(t)\times\mathbf{p}(t))^{\cdot} = \dot{\mathbf{r}}(t)\times\mathbf{p}(t) + \mathbf{r}(t)\times\dot{\mathbf{p}}(t) =$
$\mathbf{v}(t)\times m\mathbf{v}(t) + \mathbf{r}(t)\times\mathbf{F}(t) = m(\mathbf{v}(t)\times\mathbf{v}(t)) + \mathbf{r}(t)\times\mathbf{F}(t) =$
$m\mathbf{o} + \mathbf{r}(t)\times\mathbf{F}(t) = \mathbf{r}(t)\times\mathbf{F}(t)$.

c. Als $\mathbf{F}$ een centraal krachtveld is, dan is $\mathbf{F}(t) = \lambda(t)\mathbf{r}(t)$ voor zekere $\lambda(t)$ in $\mathbb{R}$. Uit b. volgt nu: $\dot{\mathbf{L}}(t) = \mathbf{r}(t)\times\mathbf{F}(t) = \mathbf{r}(t)\times(\lambda(t)\mathbf{r}(t)) =$
$\lambda(t)(\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}(t)) = \lambda(t)\mathbf{o} = \mathbf{o}$.

7.4 a. $(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})^{\cdot} = \dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = v^2 + \mathbf{r}\cdot\mathbf{a}$.

b. $(\mathbf{r}\times\mathbf{v})^{\cdot} = \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{v} + \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}\times\mathbf{v} + \mathbf{r}\times\mathbf{a} = \mathbf{o} + \mathbf{r}\times\mathbf{a} = \mathbf{r}\times\mathbf{a}$.

c. $\left(r^2\right)^{\cdot} = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{\cdot} = \dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}} = 2(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}) = 2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})$.

d. $(r)^{\cdot} = \left((\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{\frac{1}{2}}\right)^{\cdot} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{\cdot} = \frac{1}{2}\left(r^2\right)^{-\frac{1}{2}}2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}) = \frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})}{r}$.

e. $\left(\frac{1}{r}\right)^{\cdot} = \left((\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{-\frac{1}{2}}\right)^{\cdot} = -\frac{1}{2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{-1\frac{1}{2}}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})^{\cdot} = -\frac{1}{2}\left(r^2\right)^{-1\frac{1}{2}}2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}) = -\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})}{r^3}$.

f. $\left(v^4\right)^{\cdot} = \left((\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})^2\right)^{\cdot} = 2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})^{\cdot} = 2v^2\,2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}) = 4v^2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})$.

g. Reken eerst na dat $\dot{v} = \dfrac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})}{v}$. Dit gaat geheel analoog aan 7.4 d.

Dan is $(rv)^{\cdot} = \dot{r}v + r\dot{v} = \dfrac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})}{r}v + r\dfrac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})}{v} = \dfrac{v}{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}) + \dfrac{r}{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})$.

7.5. Volgens de kettingregel is $\dot{r}(t) =$

$$\frac{1}{2\sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2}} \cdot \left(2x(t)\dot{x}(t) + 2y(t)\dot{y}(t) + 2z(t)\dot{z}(t)\right) =$$

$$\frac{1}{2r(t)} \cdot 2\left((x(t), y(t), z(t)\right) \cdot \left(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\right)) = \frac{(\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{v}(t))}{r(t)}.$$

7.6. $H = \frac{1}{2}mv^2 - \dfrac{k}{r} = \dfrac{m^2v^2}{2m} - \dfrac{k}{r} = \dfrac{p^2}{2m} - \dfrac{k}{r}$.

7.7 a. Het deeltje valt in een rechte lijn naar de oorsprong en gaat daarbij steeds sneller.

b. Op $t = 0$ is $r = r_0$ en $v = 0$. Dus $H = -\dfrac{k}{r_0}$.

Op afstand $r < r_0$ van de oorsprong is vanwege de wet van energiebehoud $H = \frac{1}{2}mv^2 - \dfrac{k}{r} = -\dfrac{k}{r_0}$. Dus $\frac{1}{2}mv^2 = \dfrac{k}{r} - \dfrac{k}{r_0}$.

$v^2 = \dfrac{2k}{m}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_0}\right)$ en $v = \sqrt{\dfrac{2k}{m}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_0}\right)}$.

7.8. $\mathbf{s}$ is een veelvoud van $\mathbf{r}$, dus $\mathbf{s} = \lambda\mathbf{r}$. En $\mathbf{s}$ ligt op de cirkel met straal $-k/H$, dus $|\mathbf{s}| = -k/H$. Dus $|\lambda|r = |\lambda\mathbf{r}| = -k/H$. Omdat $\lambda > 0$ is, is $\lambda = -k/rH$.

7.9 Er geldt: $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = m(\mathbf{r}\times\mathbf{v})$. Dus de richting van $\mathbf{L}$ is dezelfde als die van $\mathbf{r}\times\mathbf{v}$. Met behulp van de kurkentrekkerregel zien we dat $\mathbf{L}$ als het ware "het papier in" gericht is.
Er geldt: $\mathbf{n} = \mathbf{p}\times\mathbf{L} = m(\mathbf{v}\times\mathbf{L})$. Dus de richting van $\mathbf{n}$ is dezelfde als die van $\mathbf{v}\times\mathbf{L}$. Met behulp van weer de kurkentrekkerregel zien we dat de richting van $\mathbf{n}$ in het plaatje klopt met die van $\mathbf{r}$ en $\mathbf{v}$.

7.10. $H = \dfrac{p^2}{2m} - \dfrac{k}{r}$ volgens opgave 7.6. Dus $p^2 = 2m\left(H + \dfrac{k}{r}\right)$.

7.11. $\mathbf{K}\cdot\mathbf{L} = \left(\mathbf{p}\times\mathbf{L} - \dfrac{km}{r}\mathbf{r}\right)\cdot\mathbf{L} = (\mathbf{p}\times\mathbf{L})\cdot\mathbf{L} - \dfrac{km}{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{L}) =$ (stelling 3.1)

$$\mathbf{p}\cdot(\mathbf{L}\times\mathbf{L})-\frac{km}{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{L})=\mathbf{o}-\frac{km}{r}(\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{p}))=\text{ (stelling 3.1)}$$

$$-\frac{km}{r}((\mathbf{r}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{p})=\mathbf{o}.$$

7.12. De ellips, die ontstaat uit een cirkel met straal b door deze in één richting op te rekken met factor $\frac{a}{b}$, heeft oppervlakte $\frac{a}{b}\pi b^2=\pi ab$.

7.13. $4c^2=(2c)^2=t^2=\left(\frac{K}{mH}\right)^2=\frac{K^2}{m^2H^2}=\frac{2mHL^2+k^2m^2}{m^2H^2}=\frac{2L^2}{mH}+\frac{k^2}{H^2}$.

7.14. $4b^2=4\left(a^2-c^2\right)=4a^2-4c^2=\frac{k^2}{H^2}-\left(\frac{2L^2}{mH}+\frac{k^2}{H^2}\right)=-\frac{2L^2}{mH}$.

7.15. $\frac{LT}{2m}=\pi ab\Rightarrow\frac{T}{a}=\frac{2\pi bm}{L}\Rightarrow\frac{T^2}{a^2}=\frac{4\pi^2b^2m^2}{L^2}$.

7.16. $\frac{T^2}{a^2}=\frac{4\pi^2b^2m^2}{L^2}=\frac{\pi^2m^2}{L^2}\cdot4b^2=\frac{\pi^2m^2}{L^2}\cdot-\frac{2L^2}{mH}=-\frac{2\pi^2m}{H}$.

7.17. $\frac{T^2}{a^3}=\frac{T^2}{a^2}\cdot\frac{1}{a}=-\frac{2\pi^2m}{H}\cdot-\frac{2H}{k}=\frac{4\pi^2m}{k}$.

7.18. Neem (voor het gemak) de afstand a in AE en de omlooptijd T in jaren. Dan is voor de Aarde $\frac{T^2}{a^3}=\frac{1^2}{1^3}=1$. Voor de andere planeten is de afgeronde waarde van $\frac{T^2}{a^3}$ als volgt: Mercurius 0,978, Venus 1,017, Mars 1,007, Jupiter 1,000, Saturnus 0,987, Uranus 0,980 en Neptunus 0,986.

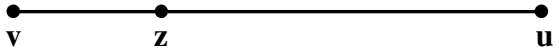
7.19. Als we weer a in AE en T in jaren nemen, dan is $\frac{T^2}{a^3}=1$ ofwel $a^3=T^2=76^2$. Dus $a\approx17{,}94$ AE. De afstand van de komeet tot de zon is hoogstens gelijk aan de lange as van de ellips, dus hoogstens $2a\approx35{,}9$ AE.

8 Het Keplerprobleem

8.1. Wat de richting betreft: $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ is van $\mathbf{v}$ naar $\mathbf{u}$ gericht. Omdat $k>0$, is $-\dfrac{k}{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^3}$ negatief. Dus de vector $-\dfrac{k}{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^3}(\mathbf{u}-\mathbf{v})$ is van $\mathbf{u}$ naar $\mathbf{v}$ gericht en dat klopt. Wat de grootte betreft:

$$|\mathbf{F}| = |-\mathbf{F}| = \left|\frac{k}{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^3}(\mathbf{u}-\mathbf{v})\right| = \frac{k}{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^3}\cdot|\mathbf{u}-\mathbf{v}| = \frac{k}{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2} = \frac{k}{r^2}$$ en dat klopt ook.

8.2. Neem aan dat de positie van de kleine puntmassa $\mathbf{u}$ is en de positie van de grote puntmassa $\mathbf{v}$. Dan is $|\mathbf{u}-\mathbf{z}| : |\mathbf{v}-\mathbf{z}| = 5:2$.



8.3. $\dot{\mathbf{z}}$ is een behouden grootheid, want $(\dot{\mathbf{z}})^{\cdot} = \ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{o}$.

8.4. $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{G(M+m)}$ waarbij $G = 6{,}673\cdot10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$ en

$M+m = (2{,}02+0{,}99)\cdot1{,}99\cdot10^{30} = 5{,}99\cdot10^{30}$ kg.

$T^2 = (50{,}1\cdot365{,}26\cdot24\cdot60\cdot60)^2 = (1{,}581\cdot10^9)^2 = 2{,}50\cdot10^{18}$ sec.

$a^3 = T^2\cdot\dfrac{G(M+m)}{4\pi^2} = 2{,}50\cdot10^{18}\cdot\dfrac{5{,}99\cdot10^{30}}{4\pi^2} = 2{,}53\cdot10^{37}\ \mathrm{m^3}$.

Dus $a = \sqrt[3]{2{,}53\cdot10^{37}} = 2{,}94\cdot10^{12}\ \mathrm{m} = 2{,}94\cdot10^{9}\ \mathrm{km} \approx 19{,}57\ \mathrm{AE}$.