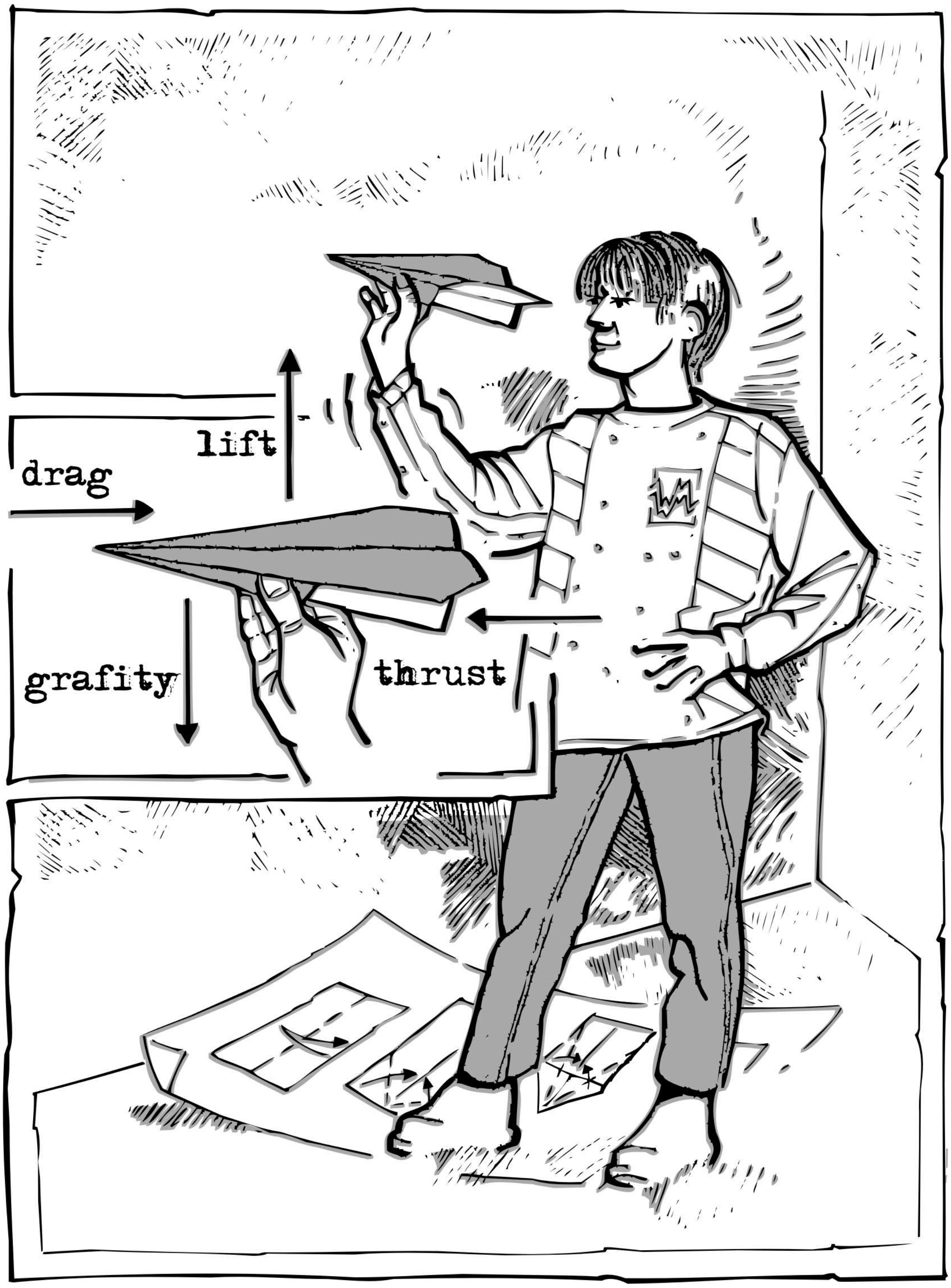



# Vwo wiskunde D
# Inproduct

## Inhoudsopgave

## Inproduct




verbeterde uitgave, februari 2010

**Colofon**





Auteurs Leon van den Broek, Maris van Haandel, Dolf van den Hombergh, Aafke Piekaar, Daan van Smaalen

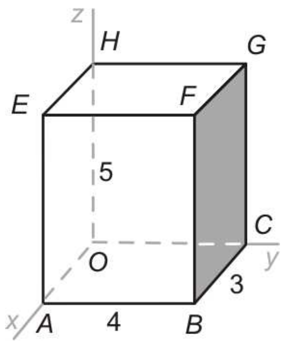
Illustraties Wilson Design, Uden

Distributie Iddink voortgezet onderwijs bv, Postbus 14, 6710 BA Ede

ISBN

Homepage www.wageningse-methode.nl

# 1 Lijnen in de ruimte




**Notaties en afspraken**

Hiernaast is een rechthoekig blok in een assenstelsel getekend. Dat assenstelsel is zó gekozen dat $A = (3,0,0)$, $C = (0,4,0)$ en $H = (0,0,5)$.

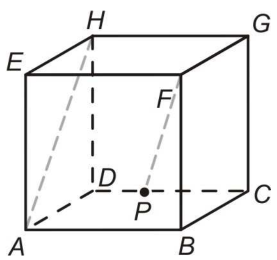
Met $\overrightarrow{AB}$ bedoelen we de vector die $A$ naar $B$ schuift. Je hebt de notatie al in hoofdstuk 5 van het vwo4-boek gezien. De vector $\overrightarrow{AG}$ is de verschuiving: 3 eenheden in de negatieve *x*-richting, 4 eenheden in de positieve *y*-richting en 5 eenheden in de positieve *z*-richting. We noteren dat zó: $\overrightarrow{AG} = (-3,4,5)$. We noemen -3, 4 en 5 de kentallen van $\overrightarrow{AG}$. In veel boeken wordt een vector als kolom genoteerd, ook om verwarring met coördinaten van punten te voorkomen. Wij gaan er vanuit dat uit de contekst duidelijk is of er een vector of een punt bedoeld wordt.

Verder schrijven we voor de vector die $O$ naar $A$ verplaatst ook wel $\vec{a}$.

Met deze afspraken krijg je: $F = (3,4,5)$ en $\vec{f} = (3,4,5)$.

Met vlak *EOC* bedoelen we het vlak door de punten $E$, $O$ en $C$. Dat vlak loopt in alle richtingen oneindig ver door.

In dat vlak ligt bijvoorbeeld het punt $F$, maar ook het punt (30,100,50), ga dat na.

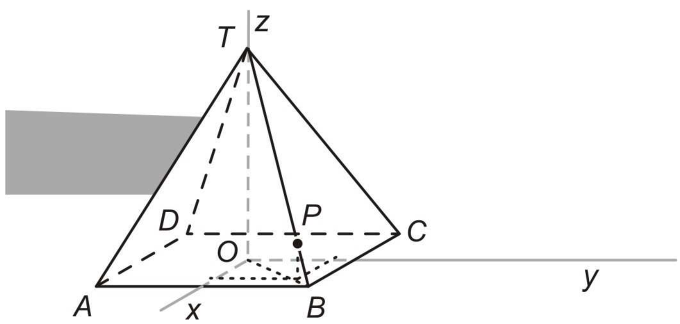



**1** *ABCD.EFGH* is een kubus. Oppervlakkig gezien lijken de lijnen *FP* en *AH* evenwijdig te lopen. Dit kan natuurlijk niet. Met vectoren kun je dat laten zien. We kiezen een assenstelsel met $D$ als oorsprong en $A(6,0,0)$, $C(0,6,0)$ en $H(0,0,6)$. $P$ is het punt $(0,2,0)$.

**a.** Geef de vectoren $\overrightarrow{PF}$ en $\overrightarrow{AH}$.

**b.** Hoe kun je uit **a** concluderen dat de lijnen *FP* en *AH* niet evenwijdig lopen?

**2** *TABCD* is een regelmatige vierzijdige piramide met $A(4,-4,0)$, $B(4,4,0)$ en $T(0,0,8)$.



**a.** Geef de coördinaten van *C* en *D*.

*P* ligt op ribbe *TB* zó, dat $BP = \frac{1}{4}BT$.
**b.** Bepaal met gelijkvormigheid de coördinaten van *P*.

Een andere manier om de coördinaten van *P* te vinden gaat als volgt.
**c.** Vul in: $\overrightarrow{BT} = (\ ,\ ,\ )$, $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BT}$, dus: $\overrightarrow{BP} = (\ ,\ ,\ )$.

Je komt dus vanuit *B* in *P* door -1 eenheid in de *x*-richting, -1 eenheid in de *y*-richting en 2 eenheden in de *z*-richting te gaan. Dus $P = (4,4,0) + (-1,-1,2) = (3,3,2)$.

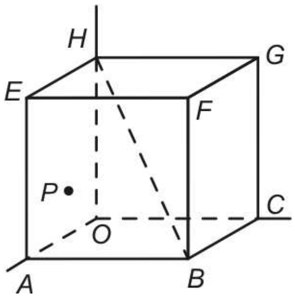
Punt *R* verdeelt ribbe *BT* zó, dat $BR : RT = 3 : 7$.
**d.** Bereken zoals in **c.** de coördinaten van *R*.

**Opmerking**
Elk punt op lijn *BT* kan vanuit *B* bereikt worden door in de richting van *BT* te lopen of in tegengestelde richting.
Elk punt van lijn *BT* heeft dus coördinaten van de vorm:
$(4,4,0) + t(-4,-4,8) = (4-4t, 4-4t, 8t)$, waarbij *t* een willekeurig getal voorstelt.

> We noemen
> $(x,y,z) = (4,4,0) + t(-4,-4,8)$ oftewel
> $(x,y,z) = (4-4t, 4-4t, 8t)$, een **parametervoorstelling** (pv) van lijn *BT*.
> Dit betekent: elke waarde van *t* die je invult, geeft een punt van lijn *BT* en omgekeerd krijg je elk punt van lijn *BT* door een waarde van *t* in te vullen.
> De vector (-4,-4,8) geeft de richting van lijn *BT* aan en heet daarom **richtingsvector** van lijn *BT*.
> De variabele *t* noemen we de **parameter**.

**e.** Welk punt op ribbe *BT* heeft gelijke *y*- en *z*-coördinaat?
**f.** Ga na dat $(x,y,z) = (0,0,8) + t(1,1,-2)$ oftewel $(x,y,z) = (t,t,8-2t)$ een pv van lijn *BT* is.
**g.** Geef een pv van lijn *AT*.

**Opmerking**
Zoals je in de vorige opgave gezien hebt, zijn er veel verschillende mogelijkheden om een pv van een lijn te geven.



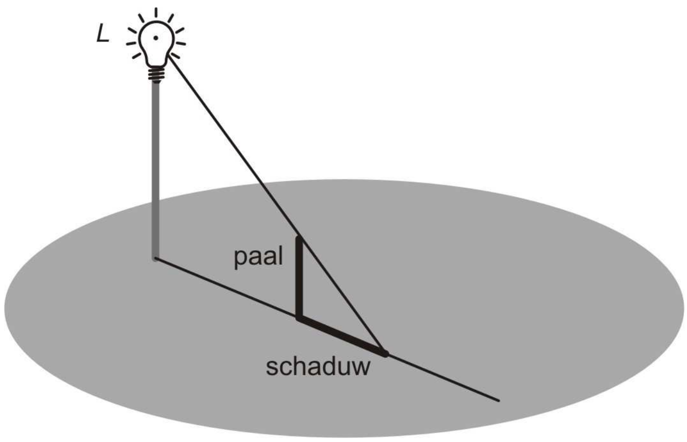

*3 *ABCO·EFGH* is de kubus met *A*(4,0,0), *C*(0,4,0) en *H*(0,0,4). *P* is een punt in het voorvlak van de kubus.
*V* is het vlak *BHP*.
**a.** Teken op het werkblad de snijlijn van *V* met het de voorkant van de kubus en de snijlijn van *V* met de linker zijkant van de kubus.

Lijn *k* gaat door *P* en is evenwijdig aan diagonaal *BH*.
**b.** Teken het snijpunt van *k* met de linker zijkant van de kubus.

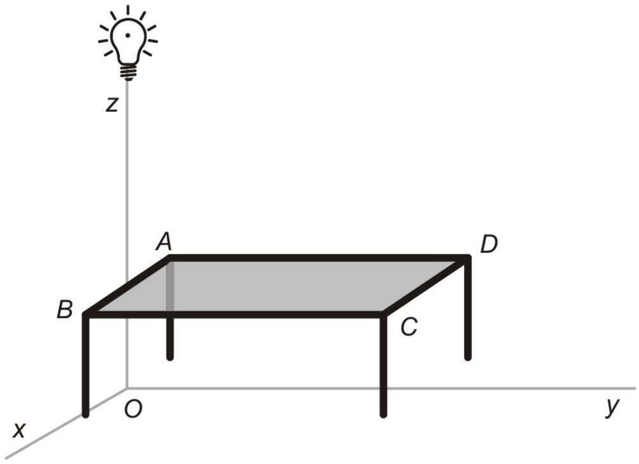
Veronderstel dat *P* het punt (4,1,2) is.
**c.** Bereken de coördinaten van het snijpunt uit **b** met behulp van een pv van *k*.

*m* is de lijn door *P* evenwijdig aan lijn *AC.*
**d.** Teken op het werkblad het snijpunt van *m* met de rechter zijkant van de kubus.
**e.** Bereken de coördinaten van het snijpunt uit **d**.

**Intermezzo**
Een lamp in *L* werpt een schaduw van een paal op de grond.
Hieronder zie je hoe je die schaduw kunt vinden.

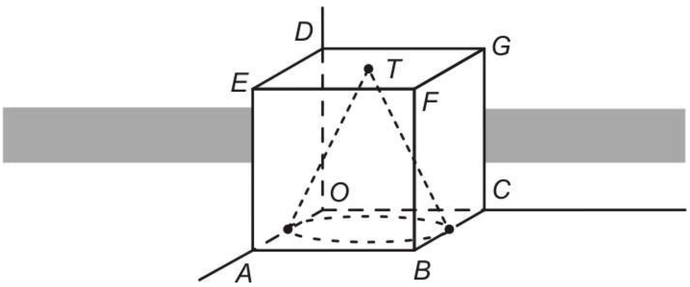



*** 4** Op het werkblad is een tafel getekend met ijzeren frame en glazen blad. Het blad is 80 bij 120 cm en heeft hoogte 40 cm boven de vloer. *A, B*, *C* en *D* zijn de hoekpunten van het blad. Midden boven lijnstuk *AB* hangt een lichtpunt op hoogte 120 cm boven de vloer.




**a.** Teken op het werkblad de schaduw van het tafelframe op de vloer.
**b.** Bereken de afmetingen van de schaduw van het blad.
We voeren coördinaten in: het lichtpunt hangt in $L = (0,0,12)$, $A = (-4,0,4)$ en $C = (4,12,4)$.
**c.** Bereken met behulp van een pv van lijn *LC* de coördinaten van de schaduw van *C*.
**d.** Op tafel ligt een muntstuk met een straal van 1 cm en middelpunt (2,3,4). Beschrijf de schaduw van het muntstuk zo volledig mogelijk.

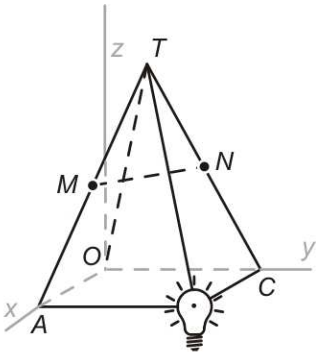
*** 5** $OABC \cdot DEFG$ is een recht blok met $A(40,0,0)$, $C(0,30,0)$ en $D(0,0,40)$. In het blok zit een kegel met top $T(20,15,40)$. De grondcirkel van de kegel ligt in het *Oxy*-vlak en heeft straal 15. Lijn *OF* snijdt de kegel in twee punten *S* en *U*. Het punt dat het dichtst bij *O* ligt is *S*.




**a.** Teken *S* en *U* op het werkblad.
Tip. De snijpunten liggen in vlak *OBFD*.
**b.** Teken rechthoek *OBFD* op schaal met daarin de doorsnede van de kegel en geef de punten *S* en *U* erin aan. Bereken de hoogte van *S* en van *U* met gelijkvormigheid.

We kunnen de coördinaten van *S* (en *U*) ook met behulp van parametervoorstellingen van lijnen berekenen.
Lijn *OB* snijdt de grondcirkel van de kegel in *P* en *Q* (*P* ligt het dichtst bij *O*).
**c.** Bereken de coördinaten van *P*.
**d.** Geef een parametervoorstelling van lijn *TP*.

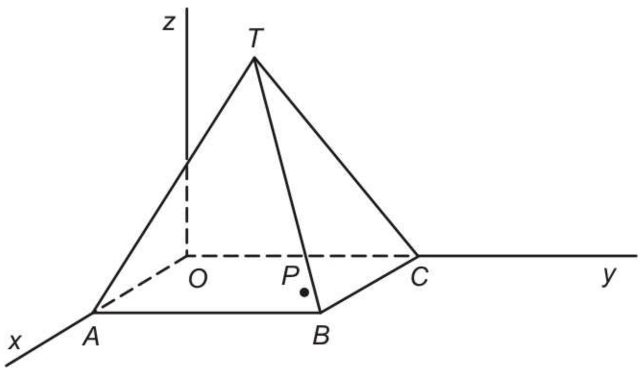
Alle punten van lijn *OF* hebben twee coördinaten gelijk.
**e.** Welke en waarom? Hoe kun je de coördinaten van *S* nu met behulp van de pv in **d** berekenen? Klopt de hoogten die je in **b** berekend hebt?




**6** *T·OABC* is een regelmatige vierzijdige piramide met *A*(4,0,0), *C*(0,4,0) en *T*(2,2,6). *M* is het midden van ribbe *AT* en *N* van ribbe *CT*. In *B* schijnt een lampje.
**a.** Teken de schaduw van lijnstuk *MN* op de zijvlakken *AOT* en *COT* van de piramide.

Het zal je niet meevallen de hoogte van de knik van de schaduw met gelijkvormigheid te berekenen. Gemakkelijker gaat dat met een parametervoorstelling.
**b.** Geef een pv van lijn *OT*, gebruik als parameter de letter *t*.
Geef ook een pv van de lijn door *B* en het midden van *MN*, gebruik als parameter de letter *s*.
**c.** Wat moet je voor *s* en *t* nemen om in beide pv's hetzelfde punt te krijgen?
**d.** Hoe hoog bevindt de knik van de schaduw zich?

* **7**

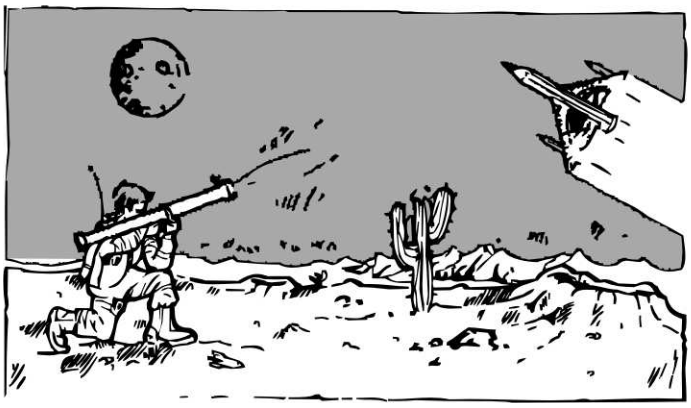



*T.ABCD* is een regelmatige vierzijdige piramide met A(6,0,0), *C*(0,6,0) en *T*(3,3,6). In het grondvlak van de piramide ligt het punt *P*(4,5,0).
**a.** Teken de snijlijn van vlak *TAP* met de rechter zijkant van de piramide.
**b.** Teken het snijpunt van de lijn door *P* evenwijdig aan lijn *TA* met de rechter zijkant van de piramide.

**c.** Teken op het werkblad het snijpunt van vlak *TBC* met de *z*-as.
**d.** Bereken de coördinaten van het snijpunt uit **c**.

**8** In een woestijnachtig oorlogsgebied stijgen jagers op om de vijandelijke stellingen te bestoken. Luchtafweergeschut probeert de jagers neer te halen. In een assenstelsel kunnen we de situatie als volgt beschrijven. In punt (4,12,0) starten de jagers in de richting (0,-7,1). In punt (8,2,0) worden raketten afgeschoten in de richting (-4,1,1).
**a.** Maak een tekening van de situatie in een assenstelsel.
**b.** Ga na dat de baan van de jagers en de baan van de raketten elkaar niet snijden.

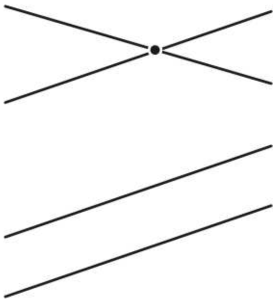
Het afweergeschut kan niet horizontaal gedraaid worden, maar wel verticaal.
**c.** Wat moet de afvuurrichting worden opdat de banen elkaar wel snijden?



**Opmerking**
Als je het snijpunt van twee lijnen waarvan je pv's hebt, wil berekenen, moet je verschillende variabelen voor de parameters nemen. Zie bijvoorbeeld opgave **6b**.
Als je dezelfde variabelen voor de parameters neemt, ga je er vanuit dat je op hetzelfde moment in het snijpunt bent.

## 2 Loodrechte stand en inproduct

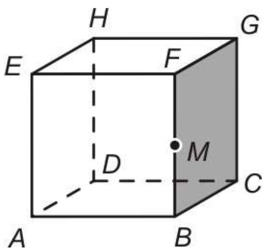
In het volgende ontwikkelen we een instrument om de hoek tussen twee lijnen in de ruimte te bepalen, in het bijzonder om te bepalen of twee lijnen loodrecht op elkaar staan. Dat instrument heeft, zo zal in de volgende paragrafen blijken, nog meer bruikbare eigenschappen.



In het tweedimensionale vlak (het platte vlak) heb je twee mogelijkheden voor de onderlinge ligging van twee verschillende lijnen:
- ze snijden elkaar,
- ze zijn evenwijdig.

Als twee lijnen elkaar snijden, heb je vier hoeken. Als de lijnen loodrecht op elkaar staan, zijn de vier hoeken even groot, namelijk 90°. Als ze niet loodrecht op elkaar staan, heb je twee even grote stompe hoeken en twee even grote scherpe hoeken. Met de hoek tussen de twee lijnen bedoelen we de grootte van een van de scherpe hoeken.

In de driedimensionale ruimte heb je ook nog een derde mogelijkheid voor de onderlinge ligging van twee lijnen:
- ze kruisen elkaar.



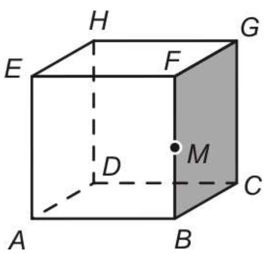

**1** Bekijk kubus *ABCD*·*EFGH* hiernaast. *M* is het midden van ribbe *BF*.
Zeg van elk van de volgende lijnenparen of ze elkaar snijden, evenwijdig zijn of elkaar kruisen.
*BG* en *AH*,
*BG* en *ED*,
*HM* en *BD*,
*AM* en *GH*.

Als twee lijnen elkaar kruisen, is er geen vlak te vinden waar beide lijnen in liggen.

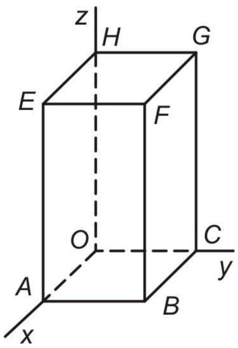
We zeggen dat de lijnen *BG* en *ED* loodrecht op elkaar staan, hoewel ze elkaar niet snijden.

**Definitie**
Met de hoek van twee (kruisende) lijnen bedoelen we de hoek die ze met elkaar maken als je (een van) beide evenwijdig verschuift, totdat ze elkaar snijden.

Je kunt lijn *BG* evenwijdig verschuiven tot lijn *AH*. Lijn *AH* snijdt lijn *ED* loodrecht. Dus de lijnen *BG* en *ED* staan loodrecht op elkaar.




* **2** **a.** Geef twee lijnen in het plaatje van opgave **1** die lijn *DF* loodrecht kruisen.
**b.** Teken in het plaatje de hoek tussen lijn *AC* en lijn *GM* en bepaal de grootte.
**c.** Teken in het plaatje de hoek tussen lijn *AB* en lijn *HM* en bereken de grootte in graden nauwkeurig.
**d.** Teken in het plaatje de hoek tussen lijn *AF* en lijn *DE* en bepaal de grootte.




Bekijk het blok $ABCO \cdot EFGH$ hiernaast. We kiezen een assenstelsel in de ruimte. Dat doen we zoals gebruikelijk. *A* ligt op de *x*-as ligt, *C* op de *y*-as en *H* op de *z*-as.

**3** **a.** Wat is de lengte van *OF* als de ribben van het blok lengte 3, 4 en 5 in de *x*-, *y*- en *z*-richting hebben?
**b.** Wat is de lengte van *OF* als de ribben van het blok lengte *p*, *q* en *r* hebben?

Als $P(p,q,r)$, dan is de de lengte van *OP*:
$\sqrt{p^2+q^2+r^2}$

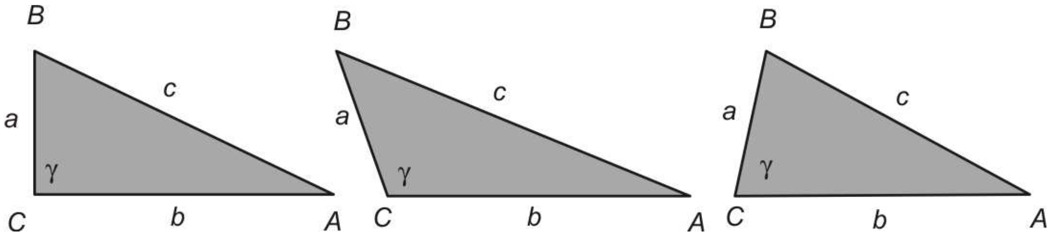
Met $|\overrightarrow{OF}|$ en bedoelen we de lengte van vector $\overrightarrow{OF}$, dus
$|\overrightarrow{OF}| = \sqrt{3^2+4^2+5^2} = 5\sqrt{2}$ .

**4** **a.** Geef de kentallen van $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{HB}$ en $\vec{b}$ .
**b.** Bereken $|\overrightarrow{FO}|, |\overrightarrow{FC}|, |\overrightarrow{HB}|$ en $|\vec{b}|$

Als $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$, dan $|\vec{a}| = \sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$

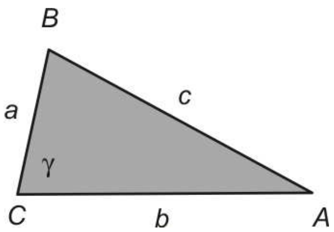
**5** **a.** Gegeven zijn de punten $P(1,2,3)$ en $Q(-1,3,-6)$.
Geef de kentallen van $\overrightarrow{PQ}$ .
**b.** Gegeven zijn de punten: $A(a,b,c)$ en $P(p,q,r)$.
Druk $\overrightarrow{AP}$ uit in de coördinaten van *A* en *P*.

Als $A(a,b,c)$ en $P(p,q,r)$, dan $\overrightarrow{AP} = (p-a, q-b, r-c)$ .




**6** Zie het plaatje hierboven. Stel je voor: $BC$ en $AC$ zijn stokjes die in $C$ aan elkaar vastzitten. De hoek tussen de stokjes kun je variëren. $AB$ is elastisch en blijft steeds strak gespannen.
In het eerste geval is $\gamma$ recht, in het tweede geval stomp en in het derde geval scherp.

In het eerste geval geldt de stelling van Pythagoras, dus $a^2 + b^2 = c^2$ als $\gamma = 90°$.
Wat kun je zeggen over het verband tussen $a^2 + b^2$ en $c^2$ in elk van de andere twee gevallen?

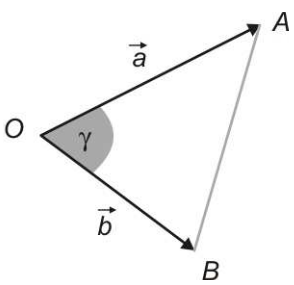



Zie het plaatje hiernaast.

$a^2 + b^2 = c^2 \quad \Leftrightarrow \gamma = 90°$

$a^2 + b^2 > c^2 \quad \Leftrightarrow \gamma < 90°$

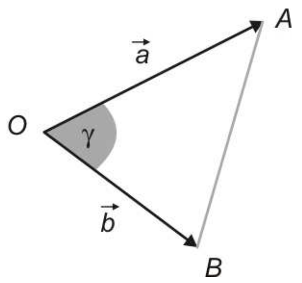
$a^2 + b^2 < c^2 \quad \Leftrightarrow \gamma > 90°$




**7** Wat we in de vorige opgave gezien hebben, passen we toe op de situatie hiernaast, met $A(a_1,a_2,a_3)$ en $B(b_1,b_2,b_3)$, dan:
$OA^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ ($OA$ is de lengte van lijnstuk $OA$.)
$OB^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$
**a.** Geef zelf een uitdrukking voor $AB^2$.
**b.** Leid nu af:
$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$ als $\gamma = 90°$
$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 > 0$ als $\gamma < 90°$
$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 < 0$ als $\gamma > 90°$

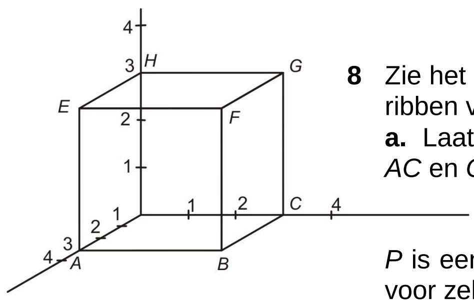
Uit opgave **7** is duidelijk dat $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ iets over de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zegt. In het volgende gaan we daar nader op in.

Maar eerst voeren we een notatie in.
Voor $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ schrijven in het vervolg kort: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ en noemen dit het *inproduct* van $\vec{a}$ en $\vec{b}$.




$\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$ en $\vec{b} = (b_1,b_2,b_3)$ zijn vectoren, beide $\neq \vec{0}$. De hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ noemen we $\gamma$.
We definiëren het **inproduct** van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ als:
$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$.
We noteren het inproduct van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ als $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
Er geldt:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \gamma = 90°$
$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \iff \gamma < 90°$
$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \iff \gamma > 90°$

Het inproduct wordt ook wel het *inwendig product* of *scalair product* genoemd. De Engelse term is *inner product*.




**8** Zie het plaatje hiernaast, $ABCO \cdot EFGH$ is een kubus met ribben van lengte 3.
**a.** Laat met behulp van het inproduct zien dat de lijnen *AC* en *OF* loodrecht op elkaar staan.

*P* is een punt op lijn *FB*, dus *P* heeft coördinaten (3,3,*z*), voor zekere waarde van *z*. *M* is het midden van *OH*.
**b.** Bereken *z* als gegeven is dat *OP* en *HB* elkaar loodrecht snijden.
**c.** Bereken *z* als gegeven is dat *CM* en *HP* loodrecht op elkaar staan.
**d.** Geef vier verschillende vectoren (met verschillende richting) die loodrecht op lijn *OF* staan.

**9** **a.** Bereken:
$(1,2,3) \cdot (1,-2,3)$
$(1,2,3) \cdot (1,-2,1)$
$(1,-2,1) \cdot (1,2,3)$

**b.** Er geldt: $(1,-2,3)+(1,-2,1)=(2,-4,4)$.
Kun je nu met behulp van de uitkomsten uit **a** ook zeggen wat $(1,2,3)\cdot(2,-4,4)$ is?
**c.** Er geldt: $2\cdot(1,2,3)=(2,4,6)$.
Kun je nu behulp van de uitkomsten uit **a** ook zeggen wat $(2,4,6)\cdot(1,-2,3)$ is?
**d.** Wat heeft $(1,-2,3)\cdot(1,-2,3)$ met de lengte van $(1,-2,3)$ te maken?

**Eigenschappen van het inproduct**
Voor alle getallen $k$ en vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ geldt:
**1** $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
**2** $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ en $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$
**3** $(k\,\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\,\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$
**4** $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

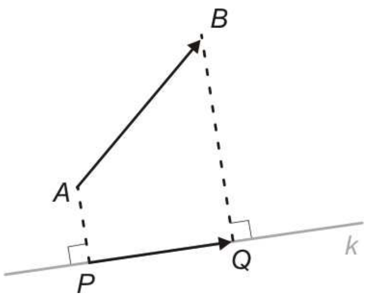
**1** noemen we de **commutatieve** eigenschap van het inproduct en **2** de **distributieve** eigenschap.

**10** Laat zien dat het inproduct de hierboven vermelde eigenschappen heeft.

**11** Gegeven zijn de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zodat
$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$ en $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$.
**a.** Bereken met behulp van de eigenschappen voor het inproduct: $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}$.
**b.** Bereken $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$.
Wat is dus de lengte van $\vec{a}+\vec{b}$?
**c.** Bereken ook de lengte van $\vec{a}-\vec{b}$.
**d.** De vector $\vec{c}$ heeft dezelfde richting als $\vec{a}$ en is 2 keer zo lang. Wat is: $\vec{c}\cdot\vec{a}$?
**e.** De vector $\vec{d}$ heeft een richting die tegengesteld is aan die van $\vec{b}$ en is 3 keer zo lang als de vector $\vec{b}$.
Wat is $\vec{d}\cdot\vec{b}$?

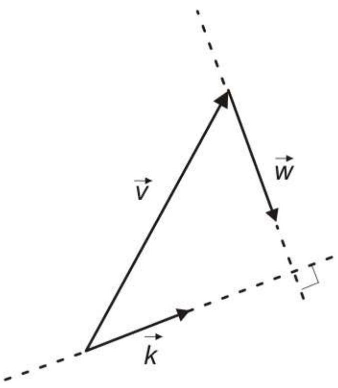
Als twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ dezelfde richting hebben, dan $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
Als twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ tegengestelde richting hebben, dan $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
In ieder geval: $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ als $\vec{a}$ en $\vec{b}$ veelvouden van elkaar zijn.

**Opmerking**
De verticale strepen in de uitdrukking $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ links en rechts van het gelijkteken hebben verschillende betekenis: links ervan geven ze de absolute waarde van een getal aan en rechts de lengte van vectoren.

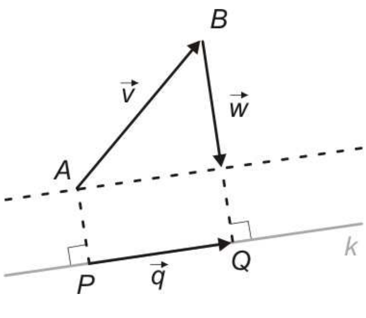



In het plaatje hiernaast is $\overrightarrow{PQ}$ de **loodrechte projectie** van $\overrightarrow{AB}$ op lijn $k$.

Het inproduct is ook nuttig om de lengte van de projectie van een vector op een lijn te berekenen. Hoe dat gaat zie je in het volgende.



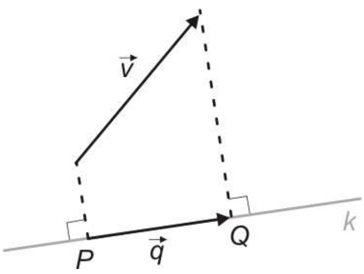

**12** Bekijk het plaatje met de vectoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ en $\vec{k}$ hiernaast.
De vectoren $\vec{w}$ en $\vec{k}$ staan loodrecht op elkaar.
Toon aan dat geldt: $\vec{v} \cdot \vec{k} = (\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{k}$




We passen deze wetenschap toe op het plaatje hiernaast. De loodrecht projectie van $\vec{v}$ op lijn $k$ is $\vec{q}$. Er is een lijn door $A$ getekend evenwijdig met $k$.
Veronderstel dat $\vec{k}$ een richtingsvector van $k$ is. Er geldt: $\vec{v} + \vec{w} = \vec{q}$, dus volgens opgave **12** geldt: $\vec{v} \cdot \vec{k} = \vec{q} \cdot \vec{k}$.
Omdat $\vec{k}$ en $\vec{q}$ veelvouden van elkaar zijn geldt (zie na opgave **11**): als $\vec{q}$ en $\vec{k}$ dezelfde richting hebben, dan

$\vec{q} \cdot \vec{k} = |\vec{q}| \cdot |\vec{k}|$ en als ze tegengestelde richting hebben, dan $\vec{q} \cdot \vec{k} = -|\vec{q}| \cdot |\vec{k}|$, dus

$|\vec{v} \cdot \vec{k}| = |\vec{q} \cdot \vec{k}| = |\vec{q}| \cdot |\vec{k}|$, dus $|\vec{q}| = \dfrac{|\vec{v} \cdot \vec{k}|}{|\vec{k}|}$.




De lengte van de loodrechte projectie van $\vec{v}$ op *k* is *PQ.*

*k* is een lijn met richtingsvector $\vec{k}$. De loodrechte projectie van $\vec{v}$ op *k* noemen we $\vec{q}$.

Hebben $\vec{k}$ en $\vec{q}$ dezelfde richting, dan:

$\vec{v} \cdot \vec{k} = \vec{q} \cdot \vec{k} = |\vec{q}| \cdot |\vec{k}|$.

Hebben $\vec{k}$ en $\vec{q}$ tegengestelde richting, dan:

$\vec{v} \cdot \vec{k} = \vec{q} \cdot \vec{k} = -|\vec{q}| \cdot |\vec{k}|$.

De lengte van de loodrechte projectie van $\vec{v}$ op lijn *k* is:

$$\frac{|\vec{v} \cdot \vec{k}|}{|\vec{k}|}$$

In woorden:

de lengte van de projectie van een vector $\vec{v}$ op een lijn *k* krijg je door het inproduct van $\vec{v}$ met een richtingsvector van *k* te berekenen en de absolute waarde daarvan te delen door de lengte van de gekozen richtingsvector.

**13** Bereken de groottte van de projectie van $\vec{v}$ op een lijn met richtingsvector $\vec{r}$ in de volgende gevallen.

$\vec{v} = (5,-3,-3)$ en $\vec{r} = (1,2,2)$;

$\vec{v} = (5,-3,1)$ en $\vec{r} = (4,4,-7)$;

$\vec{v} = (5,-3,-1)$ en $\vec{r} = (3,1,12)$.

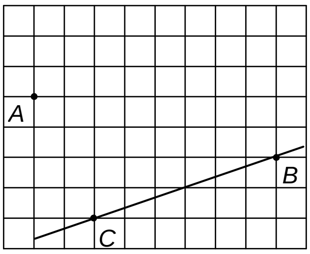
We hebben het inproduct in de driedimensionale ruimte bekeken. Je kunt dat ook tweedimensionaal doen.
Dan ziet het er als volgt uit:
als $\vec{a} = (a_1, a_2)$ en $\vec{b} = (b_1, b_2)$, dan is het inproduct van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ gedefieerd als: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$.
Er gelden 'dezelfde' stellingen.

**14** Gegeven is de vector (2,3),

**a.** Voor welke *a* geldt: de vector (3,*a*) staat loodrecht op de vector (2,3)?

**b.** Bepaal een vector die loodrecht op de vector (7,-2) staat.

**c.** Ga met het inproduct na dat de vectoren $(a,b)$ en $(b,\text{-}a)$ loodrecht op elkaar staan.

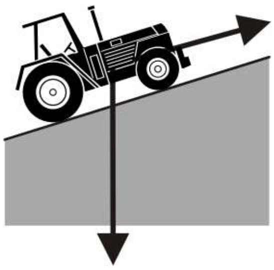



**15** In het rooster hiernaast zijn getekend de punten *A*(1,5), *B*(9,3) en *C*(3,1).

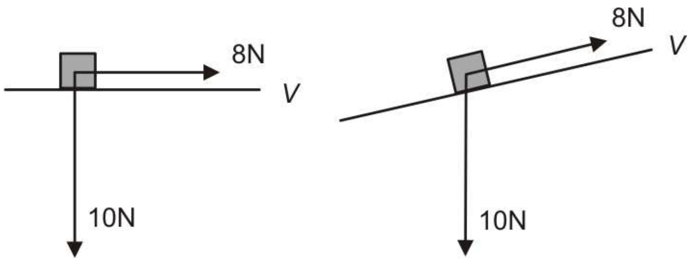
**a.** Geef een vergelijking van lijn *BC*.

**b.** Geef een pv van de lijn door *A* loodrecht op lijn *BC*.

**c.** Bereken de coördinaten van de loodrechte projectie van *A* op lijn *BC*.



**16** Een voorwerp met een gewicht van 10N kan wrijvingsloos bewegen over een vlak *V.* Er wordt met een kracht van 8N aan getrokken. Als *V* scheef gehouden wordt, krijgt de trekkracht ‘tegenwerking’ van de zwaartekracht. Op een gegeven moment zal het voorwerp langs *V* omlaag glijden.




We brengen het gebruikelijke assenstelsel aan: de positieve *x*-as naar rechts en de positieve *y*-as naar boven.

**a.** Neem aan dat *V* helling 2 heeft.

Bereken de grootte van de projectie van de kracht van 10N in de richting van vlak *V*. Glijdt het voorwerp naar beneden?

Tip. De richting van *V* is: (1,2) en de kracht van 10N wordt gegeven door (0,10).

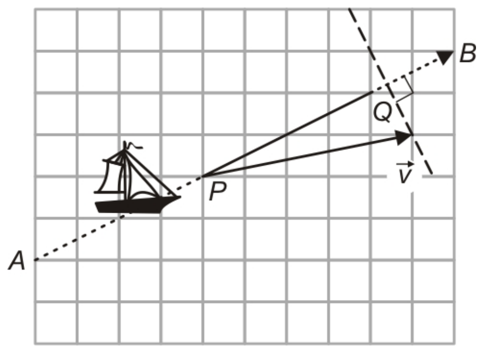
**b.** Neem nu aan dat *V* helling 1 heeft.

Maak een berekening zoals in **a** om te bepalen of het voorwerp naar beneden glijdt.

We gaan de *kritische waarde* van de helling bepalen, het hellingsgetal van *V* waarbij het voorwerp op het punt staat naar beneden te glijden. Noem die helling *a*.

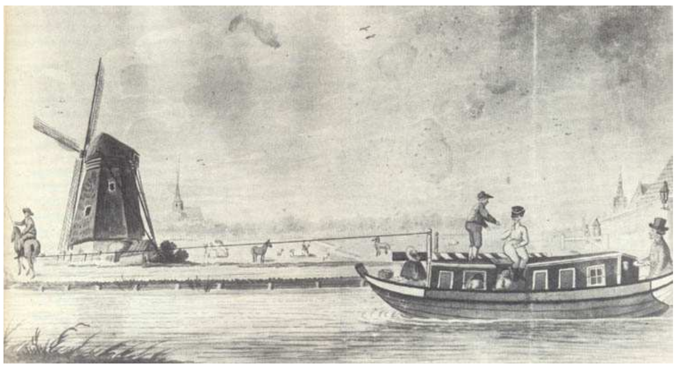
**c.** Stel een vergelijking voor *a* op en bereken hieruit *a*.

**17**

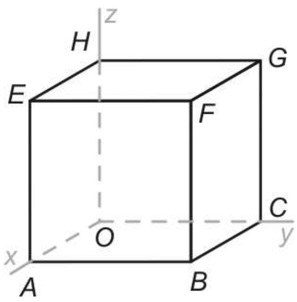



Een schuit beweegt in de richting $\vec{r} = (2,1)$ van $A$ naar $B$.
Ze wordt voortgetrokken door een paard.
De trekkracht van het paard wordt gegeven door de vector $\vec{v} = (5,1)$, zie het plaatje hierboven. Voor de voortbeweging van de schuit is alleen de grootte van de projectie van $\vec{v}$ op de richting waarin het schip beweegt van belang.
Bereken de grootte van die projectie.

Trekschuit Den Haag - Delft
Aquarel zonder naam
Atlas van Stolk, 19e eeuw.



# 3 Vergelijkingen van vlakken



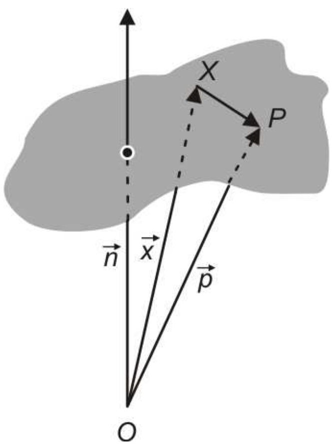

**1** We bekijken de kubus $OABC \cdot DEFG$ met ribben van lengte 4 hiernaast.
**a.** Geef alle punten op/binnen de kubus aan met $x = 4$.

Als we ons beperken tot het $Oxy$-vlak, dan liggen de punten die aan de vergelijking $x + y = 4$ voldoen op de lijn door $A$ en $C$. Daarbuiten voldoet ook bijvoorbeeld het punt $E$ aan de vergelijking.
**b.** Geef alle punten in de kubus aan die aan de vergelijking $x + y = 4$ voldoen.
**c.** Geef alle punten in de kubus aan die aan de vergelijking $x + z = 4$ voldoen.

De punten de ruimte die aan een van de lineaire vergelijkingen in opgave **1** voldoen, vormen een vlak. Dat dit algemeen zo is, kun je mooi met het inproduct laten zien. Dat doen we in de volgende opgave.

**2** Bekijk bijvoorbeeld de vergelijking $x + y + 2z = 12$.
Je kunt dit schrijven als $\vec{n} \cdot \vec{x} = 12$, waarbij $\vec{n} = (1,1,2)$, en $\vec{x} = (x,y,z)$.
**a.** Ga dit na.

Een punt dat aan de vergelijking voldoet is bijvoorbeeld $P(12,0,0)$.
**b.** Waarom geldt:
$\vec{n} \cdot \vec{x} = 12 \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{p} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$ ?




Dus $X(x,y,z)$ voldoet aan de vergelijking $x + y + 2z = 12$ precies dan als $\vec{x} - \vec{p}$ loodrecht op $\vec{n}$ staat .
Dus de punten die aan de vergelijking $x + y + 2z = 12$ voldoen liggen in het vlak door $P$ loodrecht op $\vec{n}$ .

Bekijk nog eens de vergelijking $x + z = 4$ uit opgave **1**. $A$ voldoet aan de vergelijking.
Met $\vec{n} = (1,0,1)$, kun je $x + z = 4$ schrijven als:
$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ .
**c.** Ga dat na.

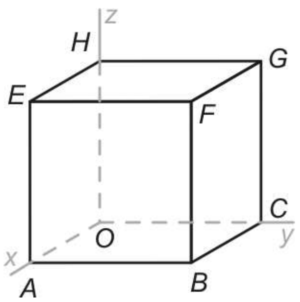
Met andere woorden: De punten die aan de vergelijking $x + z = 4$ voldoen liggen in het vlak door $A$ loodrecht op de vector (1,0,1).

**d.** Geef een vector die loodrecht staat op het vlak $x + y = 4$ uit opgave **1**.

**Definitie** Een vector die loodrecht op een vlak staat, noemen we **normaalvector** van dat vlak.

**Stelling** Als $ax + by + cz = d$ een vergelijking van een vlak is, dan is $(a,b,c)$ normaalvector van dat vlak.

**Opmerking**
In opgave **1** heb je punten binnen de kubus moeten aangeven die aan een bepaalde vergelijking voldoen. Buiten de kubus liggen natuurlijk ook nog punten die aan die vergelijking voldoen.
De ligging van een vlak in een assenstelsel kan vaak goed geïllustreed worden door de snijpunten met coördinaat-assen te bepalen en deze te verbinden.

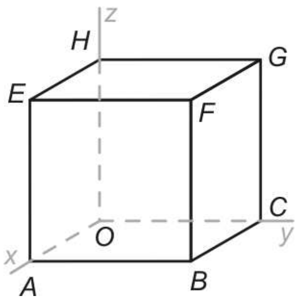



*** 3** We bekijken weer de kubus $OABC \cdot DEFG$ met ribben van lengte 4 hiernaast.
$V$ is het vlak met vergelijking $x + y + z = 6$.
**a.** Bepaal de coördinaten van de snijpunten van $V$ met de coördinaat-assen en teken die punten op het werkblad. Verbind de drie snijpunten met elkaar.
**b.** Bepaal de snijpunten van $V$ met de ribben van de kubus.

Volgens de stelling hierboven is (1,1,1) normaalvector van $V$, dus ook $\overrightarrow{OF}$. We willen dat ook op een andere manier inzien.
**c.** Ga meetkundig na dat $\overrightarrow{OF}$ loodrecht op $\overrightarrow{EG}$ staat.

Omdat $\overrightarrow{BG}$ loodrecht op vlak *OCFE* staat, staat $\overrightarrow{OF}$ ook loodrecht op $\overrightarrow{BG}$.
**d.** Hoe zie je dat $\overrightarrow{OF}$ loodrecht op $\overrightarrow{BE}$ staat?

Het midden van diagonaal *EG* noemen we *N*. Omdat *OF* loodrecht op *V* staat, moet *OF* ook loodrecht op *BN* staan.
**e.** Kun jij dat meetkundig inzien in rechthoek *OBFH*?
**f.** Laat met behulp van het inproduct zien dat *OF* loodrecht op *BN* staat.




*** 4** We gaan verder met de kubus $OABC \cdot DEFG$.
$U$ is het vlak met vergelijking $x + y + 2z = 6$.
**a.** Bepaal de coördinaten van de snijpunten van $U$ met de coördinaat-assen en teken die punten op het werkblad. Verbind de drie snijpunten met elkaar.
**b.** Bepaal de snijpunten van $U$ met de ribben van de kubus.
**c.** Geef een normaalvector van *U.*

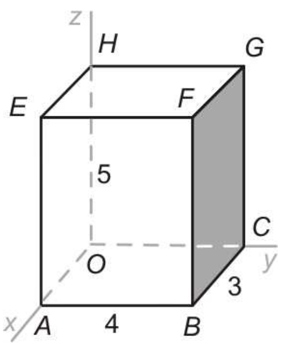
*M* is het midden van ribbe *BF* en *N* het midden van *EG* zoals in de vorige opgave. Dan is $\overrightarrow{ON}$ ook een normaalvector van *U*, het is namelijk een veelvoud van de vector die je in **c** gegeven hebt.

We willen weer op een andere manier zien dat *ON* loodrecht op *U* staat.
**d.** Het is meetkundig eenvoudig in te zien dat *ON* loodrecht op *EG* staat.
Hoe?
**e.** Hoe zie je in rechthoek *OBFH* dat *ON* loodrecht op *MN* staat?

**Herhaalde mededeling**
Een vlak ligt vast door drie punten die niet op één lijn liggen. Het vlak door de punten *B*, *E* en *G* bijvoorbeeld noemen wel: vlak *BEG*.

**5** We gaan verder met opgave **4**.
**a.** Bepaal de afstand van *O* tot vlak *EGM*.
**b.** Geef een normaalvector van vlak *ACH*.
**c.** Bepaal de afstand van *O* tot vlak *ACH.* Dat kun je doen door de lengte van het juiste lijnstuk in rechthoek *OBFH* uit te rekenen.

Als je de coördinaten van de snijpunten van een vlak met de coördinaat-asen kent, is het eenvoudig een vergelijking van dat vlak te geven.




**6** Zie het plaatje hiernaast.
We bekijken de vergelijking $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$.
**a.** Ga na dat de punten *A*, *H* en *C* aan de vergelijking voldoen.
Omdat $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$ een lineaire vergelijking is, moet dit wel een vergelijking van vlak *ACH* zijn.

**b.** Door de vergelijking $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ te schrijven in de vorm $ax+by+cz=d$, kun je een normaalvector van vlak *ACH* vinden. Doe dat.

We bekijken de vergelijking $\frac{x}{3}+\frac{z}{5}=1$. De punten die aan deze vergelijking voldoen, vormen een vlak.

**c.** Bepaal de snijpunten van dit vlak met de coördinaat-assen. (Dat zijn er maar twee.)

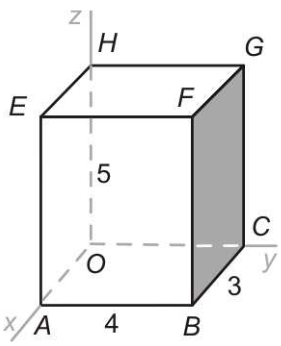
**d.** Als een punt aan de vergelijking voldoet, dan blijft het punt aan de vergelijking voldoen als je alleen zijn *y*-coördinaat verandert. Leg uit hoe dat komt.

Het vlak met vergelijking $\frac{x}{3}+\frac{z}{5}=1$ is dus evenwijdig met de *y*-as en snijdt de andere coördinaat-assen in (3,0,0) en (0,0,5), het is dus vlak *ABH*.

**e.** Bepaal een normaalvector van vlak *ABH*.

In het volgende zijn *a*, *b* en $c \neq 0$.

- Het vlak dat de coördinaatassen snijdt in (*a*,0,0), (0,*b*,0) en (0,0,*c*), heeft vergelijking $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.
- Het vlak evenwijdig met de z-as, dat de x-as snijdt in (*a*,0,0) en de y-as in (0,*b*,0), heeft vergelijking $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.
- Het vlak evenwijdig met het *Oxy*-vlak dat de *z*-as in (0,0,*c*), snijdt heeft vergelijking: $\frac{z}{c}=1$.




**7** We gaan verder met het blok uit de vorige opgave.

**a.** Bepaal de snijpunten van vlak *BEG* met coördinaat-assen.

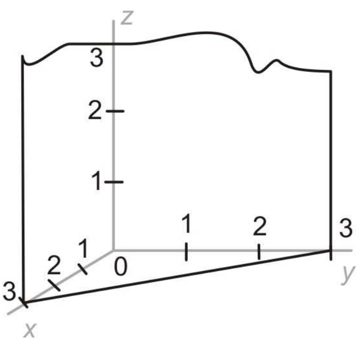
**b.** Geef een vergelijking van vlak *BEG* en bepaal een normaalvector van vlak *BEG*.

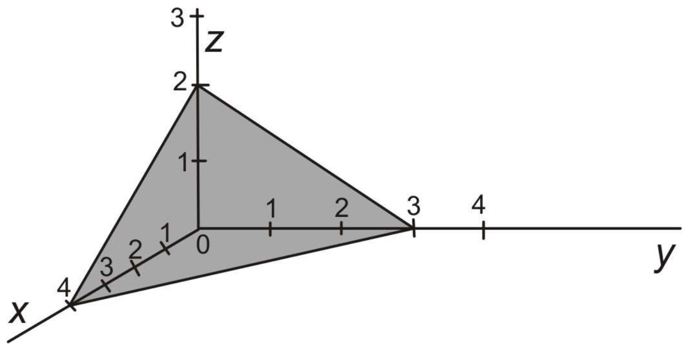
**c.** Geef een vergelijking van vlak *BEH* en een normaal-vector van vlak *BEH*.

Een vergelijking van het vlak door *O* evenwijdig met vlak *BEH* is van de vorm: $\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=d$

**d.** Leg dat uit en bepaal het getal *d*.

Als je een vergelijking van een vlak hebt, kun je daar vaak een mooi ruimtelijk plaatje bij maken, door in ieder geval de snijpunten van dat vlak met de coördinaat-assen te tekenen. Hieronder links is het vlak met vergelijking $x+y=3$ getekend (dat is evenwijdig met de $z$-as) en rechts het vlak met vergelijking $3x+4y+6z=12$.

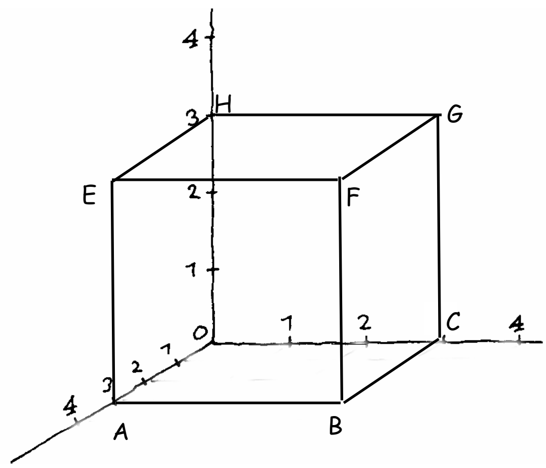



* **8** Bepaal de snijpunten van de volgende vlakken met de coördinaatassen en maak van elk vlak een plaatje zoals hierboven.

| | |
|---|---|
| $2x+3y+12z=6$ | $2x+3y=6$ |
| $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1$ | $x+3z=3$ |
| $x-y=0$ | $2x=6$ |

* **9** Kubus *ABCO.EFGH* heeft ribbe 3. *A*, *C* en *H* liggen op de coördinaatassen.
*V* is het vlak met vergelijking $2x+y+z=4$.
**a.** Bereken de coördinaten van de snijpunten van *V* met de coördinaatassen en teken *V* op het werkblad.



*V* snijdt ribbe *HG.*

**b.** Bereken de coördinaten van het snijpunt.

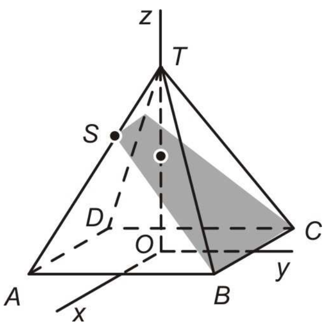
Tip. Het snijpunt heeft coördinaten (0,*t*,3) voor zekere waarde van *t*.

*V* snijdt de ribben van de kubus nog in andere punten.

**c.** Bereken de coördinaten van deze punten.

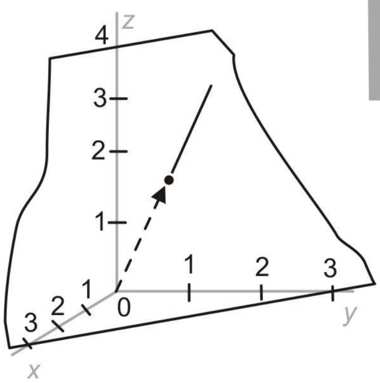
*V* \`zaagt´ de kubus als het ware in twee stukken.

**d.** Kleur het zaagvlak.




**10** *T.ABCD* is een regelmatige vierzijdige piramide met:
*A*(3,-3,0), *B*(3,3,0), *C*(-3,3,0), *D*(-3,-3,0) en *T*(0,0,6).
*V* is het vlak met vergelijking $y+z=3$.
*V* snijdt ribbe *AT* van de piramide. Het snijpunt noemen we S.
Bereken de coördinaten van *S*.

**11 Kogel door de tent**




Een dakdeel van een tent ligt in het vlak dat de coördinaatassen snijdt in (3,0,0), (0,3,0) en (0,0,4).

**a.** Geef een vergelijking van dat vlak.

Vanuit de oorsprong *O*(0,0,0) wordt een kogel afgevuurd in de richting(1,2,2).

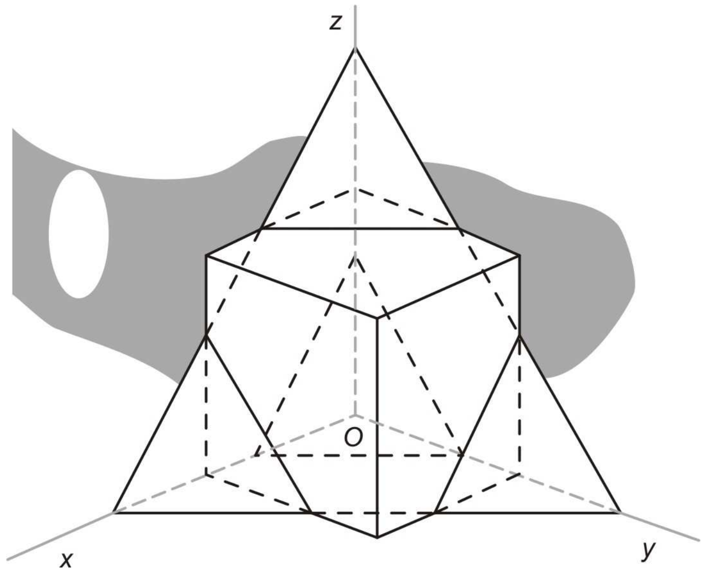
**b.** Bereken de coördinaten van het punt waar de kogel de tent verlaat.

**12** Vlak *U* heeft vergelijking $2x+3y+4z=6$, vlak *V* heeft vergelijking $4x+6y+8z=20$.
**a.** Herschrijf de vergelijking van V tot $2x+3y+4z=$ __.
Welk getal moet er op de streep ingevuld worden?
**b.** Hoe zie je aan de vergelijkingen van *U* en *V* dat ze geen gemeenschappelijke punten hebben?

Dus zijn *U* en V evenwijdig.

*W* is het vlak met vergelijking $x+ay+bz=20$ voor zekere getallen *a* en *b*.
Vlak *U* is evenwijdig met vlak *W*.
**c.** Welke zijn de getallen *a* en *b*?

**13** Hieronder zijn twee vlakken getekend.




Beide vlakken snijden de kubus in middens van ribben.
De getekende kubus heeft ribben van lengte 6.

Geef van elk van de twee vlakken een vergelijking.

*Het is niet altijd eenvoudig om de snijpunten van een vlak met de coördinaatassen te bepalen. Daarom bekijken we in de volgende opgaven een andere manier om een vergelijking van een vlak te vinden.*

**14** Gegeven zijn de punten $A(6,0,0)$, $B(0,4,0)$ en $C(0,0,-4)$
**a.** Ga na dat $A$, $B$ en $C$ in het vlak met vergelijking $2x+3y-3z=12$ liggen.

Dus (2,3,-3) is een normaalvector van vlak $ABC$.
**b.** Ga na dat $(2,3,-3)\cdot\overrightarrow{AB}=0$ en ook $(2,3,-3)\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

**Voorbeeld**
$V$ is het vlak door $A(2,3,1)$, $B(4,3,2)$ en $C(0,0,3)$. We zoeken een normaalvector $\vec{n}$ van $V$.
Onafhankelijke richtingen in $V$ zijn: $\overrightarrow{AB}=(2,0,1)$ en $\overrightarrow{AC}=(-2,-3,2)$. Voor elk getal $b$ staat de vector $(1,b,-2)$ loodrecht op $\overrightarrow{AB}=(2,0,1)$. We zoeken een getal $b$ zo dat $(1,b,-2)$ ook loodrecht staat op $\overrightarrow{AC}=(-2,-3,2)$.
Dan moet $(1,b,-2)\cdot(-2,-3,2)=0$ zijn. Hieruit volgt: $-2-3b-4=0$, dus $b=-2$. Dus is $\vec{n}=(1,-2,-2)$ normaalvector van $V$.
Een vergelijking van $V$ is dus van de vorm: $x-2y-2z=d$ voor een of ander getal $d$ dat je kunt vinden door de coördinaten van een punt van $V$, bijvoorbeeld $A$ in de vergelijking in te vullen. Dit geeft $d=-6$. Een vergelijking van $V$ is dan $x-2y-2z=-6$.

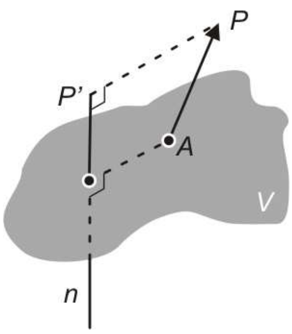
**15** Stel van de volgende vlakken een vergelijking op:
- het vlak door de punten (1,2,3), (1,4,5) en (2,6,0),
- het vlak door de punten (1,2,3), (2,4,5) en (2,4,0),
- het vlak door de punten (1,2,3), (2,4,5) en (-4,1,3),
- het vlak door de punten (1,2,3), (4,2,3) en (2,6,0).

Om een normaalvector te vinden gebruiken we een richting van het vlak die een component 0 heeft. Soms kost het moeite zo'n richting te vinden, maar dat kan altijd.

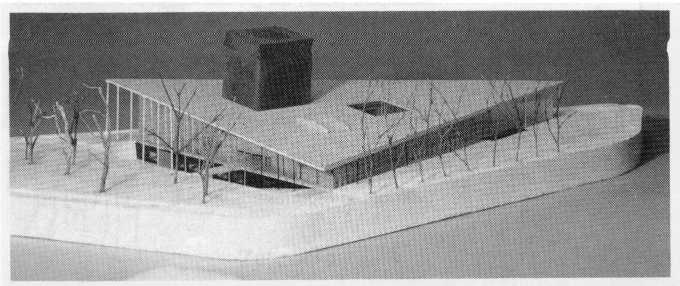
**Voorbeeld**
Laat $V$ het vlak door $A(1,2,3)$, $B(3,1,4)$ en $C(0,4,5)$ zijn. Richtingen in $V$ zijn: $\overrightarrow{AB}=(2,-1,1)$ en $\overrightarrow{AC}=(-1,2,2)$. Bij deze twee maken we een nieuwe richting van vlak $V$:
$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=(0,3,5)$. Voor elk getal $a$ staat $(a,5,-3)$ loodrecht op (0,3,5). We zoeken een getal $a$ zo dat $(a,5,-3)$ ook loodrecht staat op $(2,-1,1)$. Dan moet het inproduct $(a,5,-3)\cdot(2,-1,1)=0$ zijn, dus $2a-5-3=0$, dus $a=4$. Een vergelijking van $V$ is: $4x+5y-3z=d$. Het punt (1,2,3) ligt in $V$, dit geeft $d=5$. Een vergelijking van $V$ is dus: $4x+5y-3z=5$

**16** Stel van de volgende vlakken een vergelijking op:
- het vlak door de punten (1,2,3), (2,1,-3) en (7,0,5),
- het vlak door (3,0,0), (0,-2,1) en (5,2,2).
- het vlak door (1,2,3), (1,0,0) en (4,1,1).

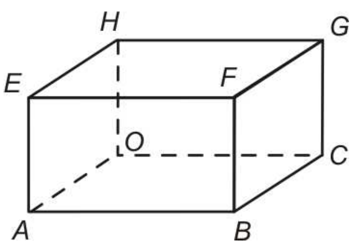
In het hoofdstuk Analytische meetkunde heb je een formule afgeleid om de afstand te berekenen van een punt met bekende coördinaten tot een lijn met bekende vergelijking. Dit ging in de tweedimensionale ruimte.
In het volgende leiden we een formule af om de afstand van een punt tot een vlak te berekenen in de driedimensionale ruimte. Dit gaat eenvoudig met het inproduct.




Bekijk het plaatje hiernaast. *A* is een willekeurig punt in vlak *V* en *n* is een lijn loodrecht op *V*, een zogenaamde **normaal** van *V*. De afstand van *P* tot *V* is de lengte van de loodrechte projectie van $\overrightarrow{AP}$ op *n*.



In het niet gekozen ontwerp voor het architectuurinstituut van Rem Koolhaas is de schoorsteen een normaal van het dakvlak.




**Voorbeeld**
We bepalen de afstand van *F* tot vlak *ACH* in het plaatje hiernaast. Hierin is *A*(7,0,0), *C*(0,7,0) en *H*(0,0,4).
Een vergelijking van vlak *ACH* is $\frac{x}{7}+\frac{y}{7}+\frac{z}{4}=1$, ofwel:
$4x+4y+7z=28$.
Dus een normaalvector van vlak *ACH* is: $\vec{n}=(4,4,7)$.
*A*(7,0,0) is een punt van vlak *ACH*.
De afstand van *F* tot vlak *ACH* is de lengte van de loodrechte projectie van $\overrightarrow{AF}=(0,7,4)$ op een normaal van het vlak.
In paragraaf 2 heb je gezien dat die lengte gelijk is aan:
$$\frac{|\overrightarrow{AF}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|(0,7,4)\cdot(4,4,7)|}{|(4,4,7)|}=\frac{56}{\sqrt{16+16+49}}=\frac{56}{9}=6\tfrac{2}{9}.$$

**17** Bereken de afstand van:
**a.** $O(0,0,0)$ tot het vlak met vergelijking $x+2y+3z=10$,
**b.** $A(1,2,3)$ tot het vlak met vergelijking $x+2y-2z=12$,
**c.** $A(1,2,3)$ tot het vlak door de punten (2,2,-3), (0,6,0) en (6,3,0).

We kunnen de werkwijze om de afstand van een punt tot een vlak te bepalen ook in een formule uitschrijven. Dat gaat zo.
Neem aan: $P=(p_1,p_2,p_3)$ en vlak $V$ heeft vergelijking: $ax+by+cz=d$. Dan is: $\vec{n}=(a,b,c)$ normaalvector van $V$. Veronderstel verder dat $A=(a_1,a_2,a_3)$ een punt van V is, dus: $a\cdot a_1+b\cdot a_2+c\cdot a_3=d$. De afstand van $P$ tot $V$ is:

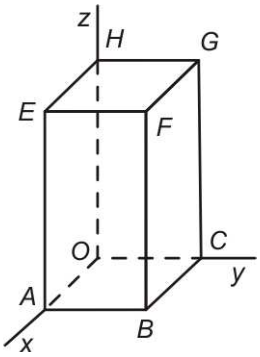
$$\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|(p_1-a_1,p_2-a_2,p_3-a_3)\cdot(a,b,c)|}{|(a,b,c)|}=$$
$$\frac{|ap_1-aa_1+bp_2-ba_2+cp_3-ca_3|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=$$
$$\frac{|ap_1+bp_2+cp_3-(aa_1+ba_2+ca_3)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|ap_1+bp_2+cp_3-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

De afstand van een punt $P(p_1,p_2,p_3)$ tot een vlak $V$, met vergelijking $ax+by+cz=d$ is:
$$\frac{|ap_1+bp_2+cp_3-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

**Voorbeeld**
De afstand van (1,2,3) tot het vlak met vergelijking $4x+4y-7z=18$ is:
$$\frac{|4\cdot1+4\cdot2-7\cdot3-18|}{\sqrt{4^2+4^2+(-7)^2}}=3$$

**Opmerking**
Het is duidelijk dat de formule voor de afstand van een punt tot een lijn die je in het hoofdstuk Analytische meetkunde gehad hebt, hier opnieuw bewezen is.

**18** Het blok hiernaast is 4 hoog, 2 breed en 3 diep. Er is een *x*-, *y*- en *z*-as gekozen, zie plaatje.

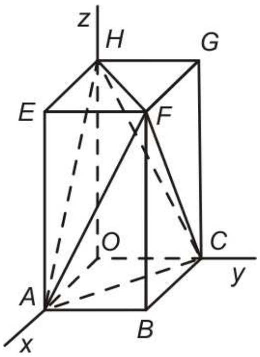



**a.** Geef een vergelijking van vlak *ACD*.
**b.** Bereken de afstand van *O* tot vlak *ACD*.

De inhoud van piramide *OACD* is: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4$.
**c.** Leg dat uit.

De oppervlakte van driehoek *ACD* kun je berekenen met behulp van het antwoord op **b** en de inhoud van de piramide.
**d.** Hoe? Wat vind je voor de oppervlakte van driehoek *ACD*?

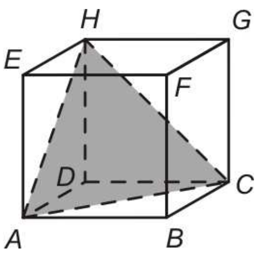
**19** We werken met hetzelfde blok als in de vorige opgave. We berekenen de inhoud van piramide *ACDF*. Dat kan bijvoorbeeld door de *ACD* als grondvlak te nemen. De hoogte van de piramide is dan de afstand van *F* tot vlak *ACD*. De oppervlakte van driehoek *ACD* heb je al berekend.




**a.** Bereken de afstand van *F* tot vlak *ACD*.
**b.** Bereken de inhoud van de piramide *ACDF*.

Je kunt de de inhoud van piramide *ACDF* ook berekenen door van de inhoud van het blok de inhoud van vier piramides af te trekken. De vier piramides hebben alle dezelfde inhoud.
**c.** Voer die berekening uit.

* **20** Hiernaast staat kubus $ABCD \cdot EFGH$ . *V* is vlak *ACH* en *W* is het vlak door het midden van de kubus evw met *V*.




**a.** Teken op het werkblad de snijpunten van *W* met de ribben van de kubus.

De kubus wordt doorgesneden volgens de vlakken *V* en *W*.
Neem aan dat de ribben van de kubus 12 zijn. We willen weten hoe 'dik' het stuk van de kubus tussen de vlakken *V* en *W* is. We brengen een assenstelsel aan zó, dat *V* vergelijking $x + y + z = 12$ heeft.
**b.** Geef een vergelijking van *W*.
**c.** Bereken de dikte van het stuk van de kubus tussen de vlakken *V* en *W* .
**d.** Bereken inhoud van het stuk van de kubus tussen de vlakken *V* en *W* .

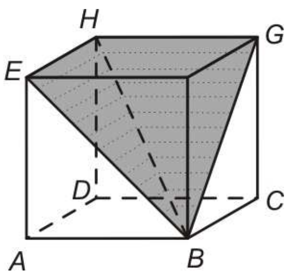
**21** *k* is de lijn door de punten (1,-1,2) en (3,3,3). *V* is het vlak met vergelijking $x + 2y - 2z = 12$.
**a.** Geef een pv van *k*.
**b.** Bereken de punten van *k* die afstand 3 tot *V* hebben.

# 4 Het inproduct om hoeken te berekenen

## 1 De kilgoot

Hierboven zie je een foto van een huis met aangebouwde vleugel. De dakvlakken van het huis en van de vleugel hebben een hellingshoek van 45°. De nok van het garagedak staat loodrecht op die van het huis. Waar het dak van de vleugel overgaat in het dak van het huis is een goot gemaakt, een zogenaamde kilgoot.

**a.** Wat denk je, is de hellingshoek van de kilgoot ook 45°, is hij kleiner of is hij groter?



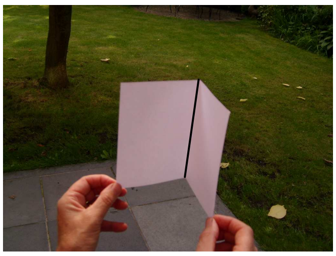

De kilgoot is een gevouwen rechthoekige plaat. De vouwhoek is de hoek van de twee dakvlakken.

**b.** Wat denk je, is de vouw 90°, is hij kleiner of is hij groter?

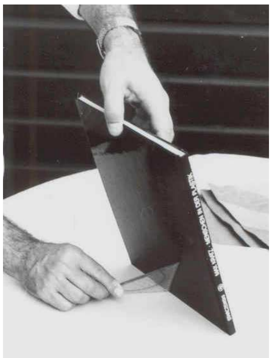
We kunnen de vragen in **a.** en **b.** vertalen naar een situatie in een kubus *ABCD.EFGH*. De dakvlakken zijn de vlakken *BEH* en *BHG*. De kilgoot is de snijlijn van die vlakken.

**c.** Bereken de hellingshoek van de kilgoot in graden nauwkeurig.Het berekenen van de vouwhoek komt later wel.

**2 a.** Vouw een rechthoekig vel papier dubbel (de vouw evenwijdig aan een bladrand) en open de vouw weer gedeeltelijk: je hebt twee vlakken met de vouw als snijlijn. Kun je de hoek van beide vlakdelen aanwijzen? In welke richting moet je kijken om de hoek goed te zien?



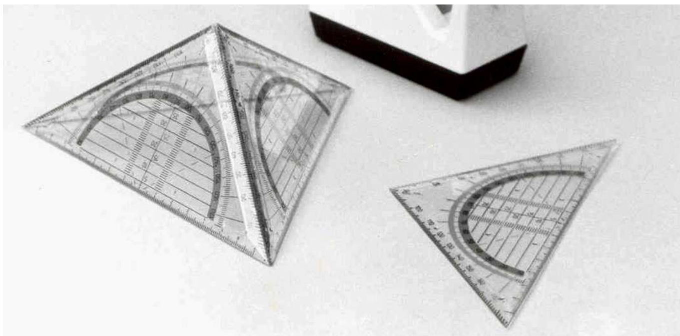
**b.** Vouw een vel papier, maar nu zo’, dat de vouw niet evenwijdig met de bladrand is. Open de vouw gedeeltelijk. Kun je nu de hoek van beide vlakdelen aanwijzen? In welke richting moet je kijken om de hoek goed te zien?

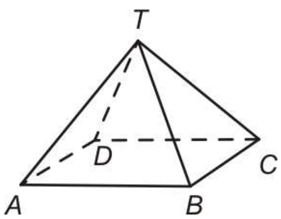


**3** **a.** Houd een boek schuin op tafel. Je geodriehoek past met de rechte hoek in de hoek tussen het boek en de tafel, dus met de ene zijde op tafel en de andere zijde tegen het boek. Hoe je het boek ook laat hellen, het past altijd.
**b.** We gaan de geodriehoek nu met een van de hoeken van 45° proberen te passen in de hoek die het boek metde tafel maakt. Kan dat ook altijd? Je kunt dus altijd wel een lijn in het ene vlak en een lijn inhet andere vlak vinden die een hoek van 45° met elkaar maken. En die een hoek van 90° met elkaar maken. De hoek van twee vlakken vind je dus niet door in beide vlakken een willekeurige lijn te nemen en de hoek tussen die lijnen te bekijken.

**4** Plak met plakband drie geodriehoeken met de korte zijden aan elkaar, zodat ze een driezijdige piramide vormen (het grondvlak is de tafel).

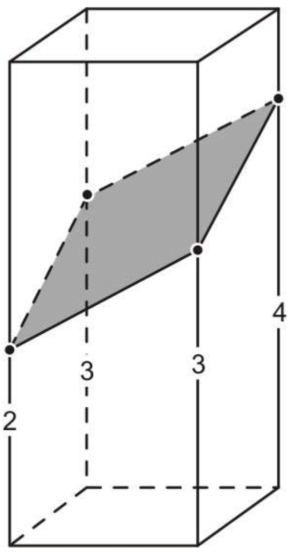
Hoe groot is, denk je, de hoek tussen twee geodriehoeken? Als je het antwoord niet zeker weet, leg de constructie dan maar eens met één van de geodriehoeken op de tafel.

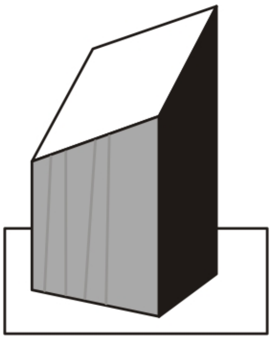





* **5** *ABCD.T* is een piramide waarvan alle ribben lengte 6 hebben.

In welke richting moet je kijken om de hoek van vlak *ADT* met het grondvlak goed te kunnen zien?
Teken die hoek op het werkblad.
Bereken die hoek in graden nauwkeurig.



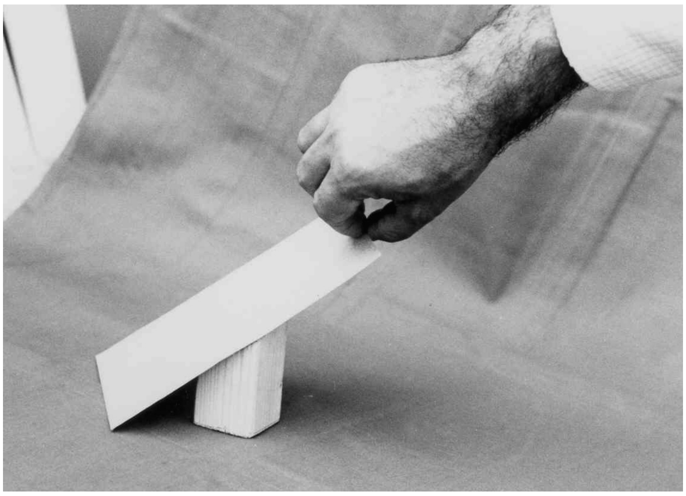



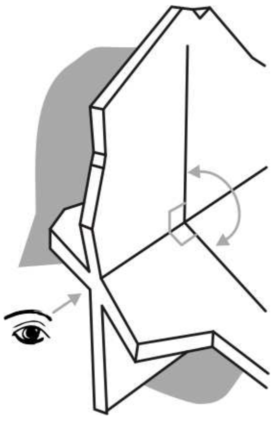
* **6** Een recht blok met een grondvlak van 2 bij 2 is schuin afgezaagd. Het zaagvlak snijdt de verticale ribben op hoogte 2, 3, 4 en 3. We bekijken de hellingshoek van het zaagvlak ten opzicht van het grondvlak van het blok.

**a.** Teken die hoek op het werkblad.

**b.** Bereken die hoek in graden nauwkeurig.

De hoek kun je ook goed als volgt zichtbaar maken. Zet het afgezaagde blok (met het grondvlak) op de tafel en houd een rechthoekig stuk karton op het schuine zaagvlak zó, dat een rand van het karton op de tafel rust. De hoek die het karton met de tafel maakt is de hellingshoek.





De hoek die twee snijdende vlakken *V* en *W* met elkaar maken is de hoek die je ziet als je in de richting van de snijlijnkijkt. Deze hoek noemen we ook wel de **standhoek** van *V* en *W*. De standhoek staat loodrecht op de snijlijn. Je kunt die hoek berekenen in een aanzicht in de richting van de snijlijn.

**7** *V* en *W* zijn twee vlakken die elkaar snijden onder een hoek van 45°.

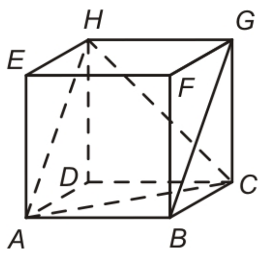
**a.** Waar of niet waar? Geef commentaar op elk van de volgende beweringen.

• Er is een lijn in *V* en een lijn in *W* die elkaar snijden onder een hoek van 77°.

• Er is een lijn in *V* en een lijn in *W* die elkaar snijden onder een hoek van 45°.

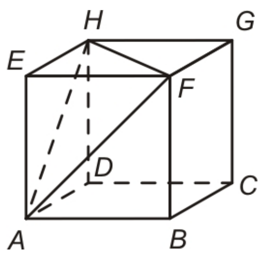
• Er is een lijn in *V* en een lijn in *W* die elkaar snijden onder een hoek van 27°.

**b.** *l* is een lijn in *V* en *m* een lijn in *W*. Hoe groot kan de hoek tussen *l* en *m* zijn?

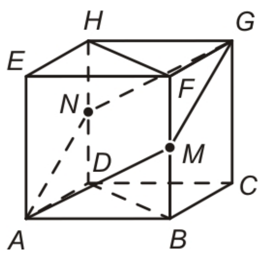



* **8** *ABCD.EFGH* is een kubus. De snijlijn van de vlakken *ACH* en *ABGH* is lijn *AH*.

**a.** Kleur op het werkblad de standhoek van de vlakken *ACH* en *ABGH*.
**b.** Bereken die hoek in graden nauwkeurig.

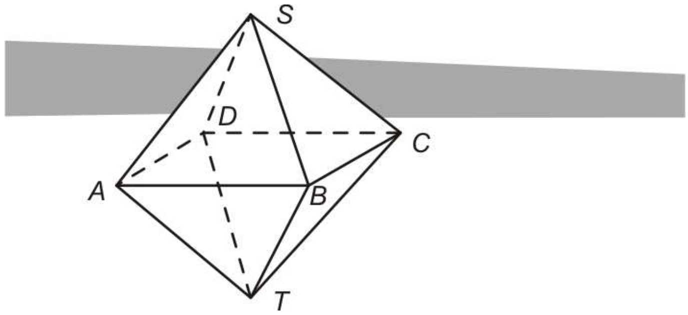



*** 9** *ABCD.EFGH* is een kubus.
**a.** Kleur op het werkblad de standhoek van vlak *AFH* en het grondvlak.
Bereken die hoek in graden nauwkeurig.




*N* is het midden van *HD*, *M* van *FB*.
**b.** Kleur de standhoek van de vlakken *AMGN* en *BDHF*.
Bereken die hoek in graden nauwkeurig.

* **10** *ABCD.ST* is een regelmatig achtvlak.

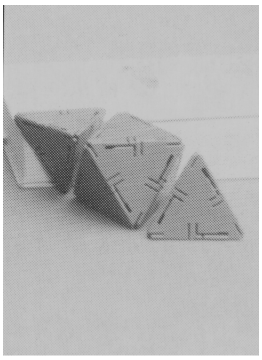



**a.** Kleur op het werkblad de standhoek tussen de grensvlakken *TAD* en *TBC*. Bereken die hoek in graden nauwkeurig.

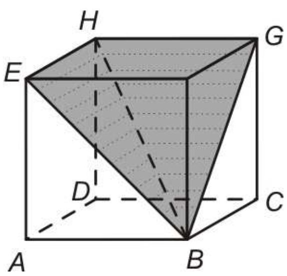
**b.** Kleur op het werkblad de standhoek van de grensvlakken *TAD* en *TDC*.
Bereken die hoek in graden nauwkeurig.

**11 a.** Bereken de hoek tussen twee grensvlakken van een regelmatig viervlak.
Met twee regelmatige viervlakken en een achtvlak met dezelfde ribbe kun je een scheef blok bouwen.

**b.** Wat zegt dit over je antwoorden op **10b.** en **11a.**?



**Opmerking**
Voor de hoek tussen twee vlakken maken we een soortgelijke afspraak als bij de hoek van twee snijdende lijnen.Met die hoek bedoelen we de scherpe (eventueel rechte) hoek. In opgave **10b.** heb je als antwoord 109° gegeven. Het gaat hier ook niet om de hoek van twee (onbegrensde)vlakken, maar om de hoek tussen twee begrensde vlakdelen en die kan (net zoals de hoek tussen twee lijnstukken in bijvoorbeeld een driehoek) stomp zijn.

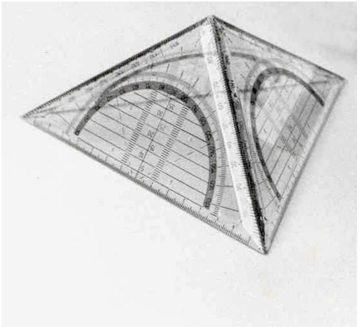



* **12 De vouw in de kilgoot**
We komen terug op opgave **1** en berekenen de hoek van de vlakdelen *BEH* en *BHG* in kubus *ABCD.EFGH*. Het punt *P* ligt op diagonaal *BH* zó, dat *EP* loodrecht op *BH* staat. Zeg dat de ribben van de kubus lengte 6 hebben.

**a.** Bereken dan *BP*.
Wat is dus de verhouding *BP* : *HP* ?
Teken *P* op het werkblad; je mag meten.

**b.** Bereken hoek *EPG*.

**13 De drie geodriehoeken**



We bekijken het bouwsel van opgave **4** nog eens. Het gaat dus over een driezijdige piramide waarvan de opstaande grensvlakken drie geodriehoeken zijn. De lange zijde van een geodriehoek is 16 cm. We hebben in opgave **4** gezien dat de hoek van twee opstaande grensvlakken 90° is.

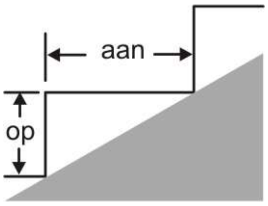
**a.** Bereken de inhoud van de piramide; neem een geodriehoek als “grondvlak”.

**b.** Bereken met behulp van **a.** hoever de top van de piramide boven de tafel komt.

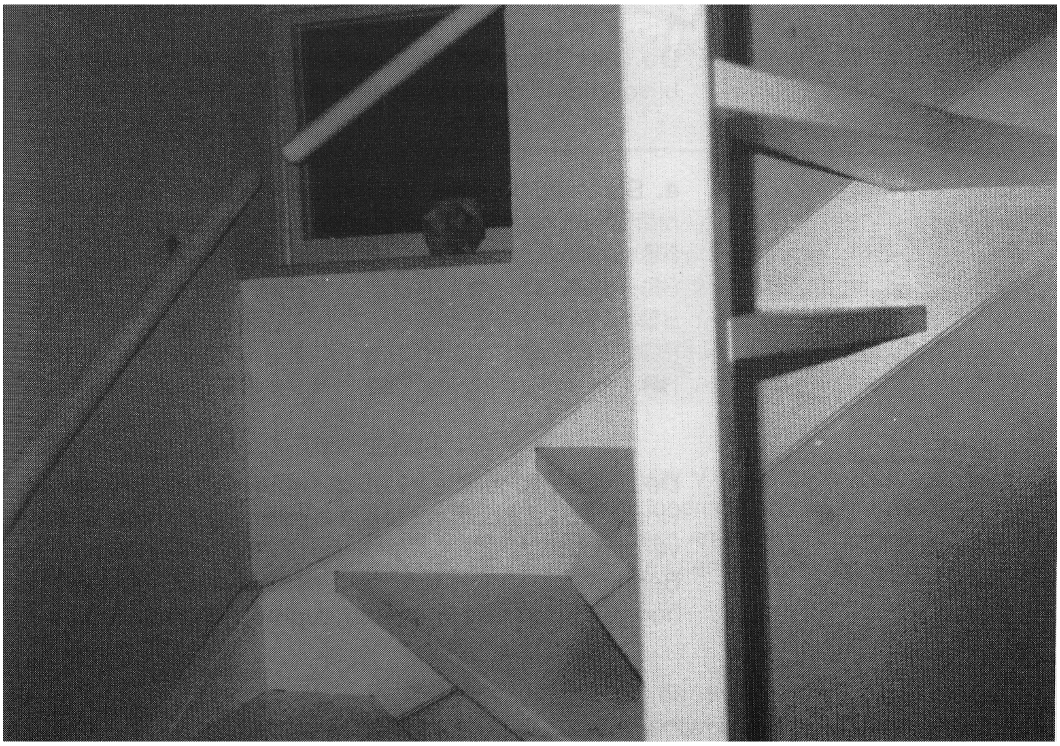
**c.** Bereken de hoek die een geodriehoek met het vlak van de tafel maakt.

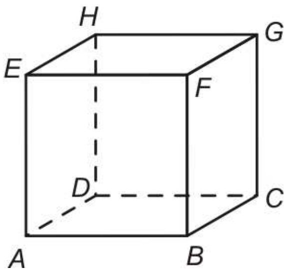
**d.** Bereken de hoek die een opstaande ribbe met het vlak van de tafel maakt.

**14 Knik in de trapleuning**




Een trap waarvan de aantrede twee keer zo groot is alsde optrede, maakt een hoek van 90°. De leuning loopt even steil als de trap.Bereken de knik in de leuning in graden nauwkeurig. Je kunt de situatie vertalen naar kubus *ABCD*.*EFGH*: *M* is het midden van *DH*, het eerste stuk van de leuning is *AM*....






**15** *ABCD.EFGH* is een kubus.

**a.** Bereken de volgende hoeken:
- de hoek tussen lijn *BG* en lijn *BC*,
- de hoek tussen lijn *BG* en lijn *BE*,
- de hoek tussen lijn *AG* en lijn *AF*,
- de hoek tussen lijn *AG* en lijn *DF*.

**b.** Zeg bij elk van deze vier hoeken in welke richting je moet kijken om de hoek goed te zien.

Bij elk van deze hoeken hebben we te maken met de hoek tussen twee snijdende lijnen. In het vervolg willen we kunnen spreken over de hoek tussen *elk* tweetal lijnen, dus ook over de hoek tussen de lijnen *BE* en *CH* of tussen *BE* en *DH*.

**c.** Hoe groot is de hoek tussen de twee parallelle lijnen *BE* en *CH*, vind jij?

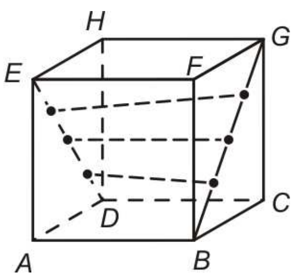
De lijnen *BE* en *DH* kruisen elkaar.

**d.** Onder welke hoek, vind jij?

Onder de hoek tussen twee lijnen zullen we ver-staan de hoek die je krijgt door een van de lijnen te verschuiven totdat hij de andere snijdt.

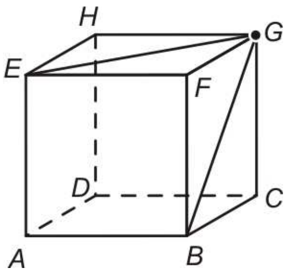
De hoek tussen de lijnen *BE* en *DH* is de hoek tussen bijvoorbeeld de lijnen *BE* en *AE*.

**e.** Bereken de hoek tussen de volgende lijnen in graden nauwkeurig:
- *BE* en *DH*,
- *BE* en *DG*,
- *BE* en *AH*,
- *BC* en *EF*,
- *HB* en *AC.*

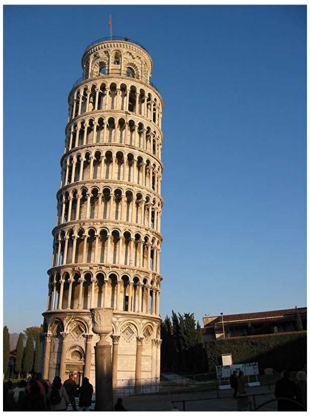



**16** De zijvlaksdiagonalen van de kubus met ribbe 4 hiernaast worden door horizontale lijnstukken op hoogte 1, 2 en 3 verbonden.

Bereken de hoek die de lijnstukken op hoogte 1 en hoogte 3 met elkaar maken in graden nauwkeurig.

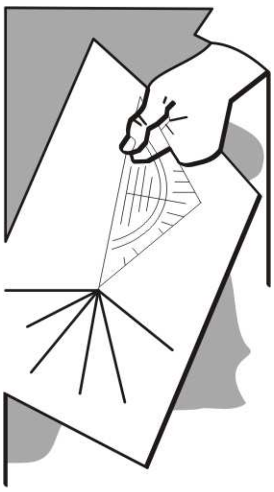



**17** *ABCD*.EFGH is een kubus.
We bekijken alle lijnen door *G*, die een hoek van 45° met ribbe *FG* maken.
**a.** Teken de snijpunten van deze lijnen met vlak *ABFE*. (Twee van die punten zijn *E* en *B*.)
**b.** Bepaal de ligging van de lijnen door *G* die een hoek van 90° met lijn *FG* maken.



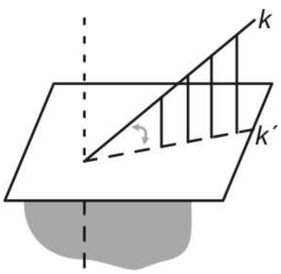
* **18 De toren van Pisa**
Op het werkblad staat een bovenaanzicht van een plein met een scheve toren. Anneke loopt in een kring om de toren.
**a.** Kleur de plaatsen op haar rondwandeling van waaruit ze niet ziet dat de toren scheef staat.
**b.** Kleur ook de plaatsen van waaruit ze goed ziet hoe scheef de toren staat.

De toren van Pisa staat 4 meter uit het lood. Hij is 54 m hoog (verticaal gemeten).
**c.** Hoeveel graden staat hij uit het lood? Hoe groot is de hoek die de toren met de begane grond maakt?

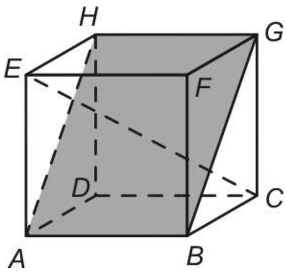


**19** Leg een stuk papier op tafel. Zet de geodriehoek met de lange zijde op het papier, loodrecht op de tafel. Zo maken de korte zijden van de geodriehoek een hoek van 45° met het stuk papier. We bekijken alle mogelijke lijnen op het papier die door een van de hoekpunten van de geodriehoek gaan.

Waar of niet waar? Geef commentaar op de volgende beweringen.
- Er is een lijn op papier die een hoek van 77° met een korte zijde van de geodriehoek maakt.
- Er is een lijn op papier die een hoek van 45° met een korte zijde van de geodriehoek maakt.
- Er is een lijn op papier die een hoek van 27° met een korte zijde van de geodriehoek maakt.




De lijn *k* snijdt het vlak *V*. De loodrechte projectie van *k* op *V* noemen we *k*'. Onder de hoek die *k* maakt met *V* zullen we verstaan de hoek tussen *k* en *k*'. Dat is de kleinste hoek die *k* maakt met lijnen die in *V*



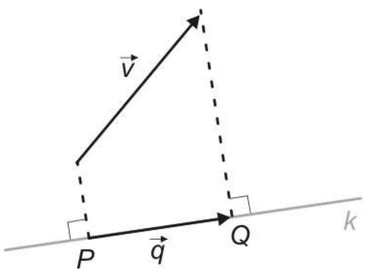

* **20** *ABCD.EFGH* is een kubus.

**a.** Teken op het werkblad de hoek die zijvlaksdiagonaal EG maakt met diagonaalvlak *ABGH*. Bereken die hoek in graden nauwkeurig. In welke richting moet je kijken om die hoek goed te zien?

**b.** Teken op het werkblad de hoek die lichaamsdiagonaal *EC* met *ABGH* maakt. Bereken die hoek in graden nauwkeurig. In welke richting moet je kijken om die hoek goed te zien?

*Een nuttig instrument om hoeken te berekenen is het inproduct. Hoe je dat kunt gebruiken, zie je hieronder.*

In paragraaf 2 heb je het volgende gezien.



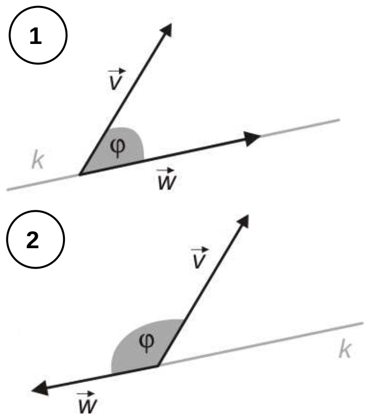

$k$ is een lijn met richtingsvector $\vec{k}$. De loodrechte projectie van $\vec{v}$ op $k$ noemen we $\vec{q}$.

Hebben $\vec{k}$ en $\vec{q}$ dezelfde richting, dan:

$\vec{v} \cdot \vec{k} = \vec{q} \cdot \vec{k} = |\vec{q}| \cdot |\vec{k}|$.

Hebben $\vec{k}$ en $\vec{q}$ tegengestelde richting, dan:

$\vec{v} \cdot \vec{k} = \vec{q} \cdot \vec{k} = -|\vec{q}| \cdot |\vec{k}|$.




We passen dit toe op de situatie hiernaast en nemen voor $\vec{k} = \vec{w}$.

$\varphi$ is de hoek tussen de vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$.

In plaatje **1** hebben $\vec{q}$ en $\vec{w}$ dezelfde richting, dus:

$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{q} \cdot \vec{w} = |\vec{q}| \cdot |\vec{w}| = |\vec{v}| \cos\varphi \cdot |\vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos\varphi$

In plaatje **2** hebben $\vec{q}$ en $\vec{w}$ tegengestelde richting, dus:

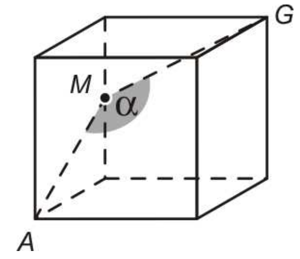
$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{q} \cdot \vec{w} = -|\vec{q}| \cdot |\vec{w}| = |\vec{v}| \cos\varphi \cdot |\vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos\varphi$

Dus in beide gevallen geldt: $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos\varphi$

Als $\varphi$ is de hoek tussen de vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$, dan:

$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos\varphi$

**Voorbeeld**

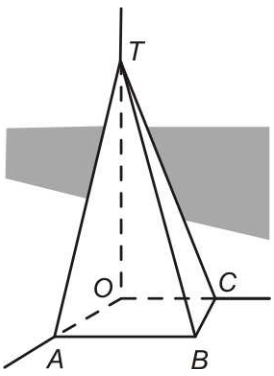



We berekenen de grootte van de knik in de trapleuning (zie opgave **14**) met het inproduct. We kiezen een assenstelsel zo dat $A = (2,0,0)$, $M = (0,0,1)$ en $G = (0,2,2)$. Dan $\overrightarrow{MA}$ =(2,0,-1) en $\overrightarrow{MG}$ =(0,2,1). De knik in de leuning is de hoek $\alpha$ tussen deze vectoren.

Dus invullen in $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MG} = \left|\overrightarrow{MA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{MG}\right| \cdot \cos\alpha$ geeft:

$(2,0,-1) \cdot (0,2,1) = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \cos\alpha$,

dus $\cos\alpha = -\frac{1}{5}$, dus $\alpha \approx 102°$.




**21** *T.OAB*C is een piramide met *A*(6,0,0), *B*(6,6,0), *C*(0,4,0)en *T*(0,0,10).

**a.** Bereken de volgende hoeken met het inproduct in graden nauwkeurig: $\angle ABC$ , $\angle BTC$ , de hoek tussen de lijnen *BT* en *OC*.

**b.** Bereken hoeveel graden (in één decimaal nauwkeurig) lijn *TB* uit het lood staat ten opzichte van vlak *ABC*.

*We kunnen hoeken uitrekenen zonder tekening te maken.*

**22** Gegeven zijn de punten *A*(1,2,3), *B*(7,-2,1) en *C*(8,1,5).

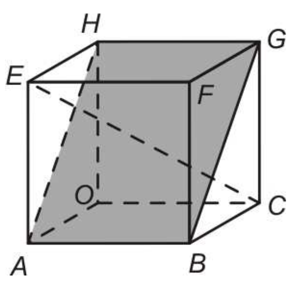
**a.** Bereken $\angle ACB$ in graden nauwkeurig.

Tip. Dat is de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CB}$ .

**b.** Bereken $\angle CAB$ in graden nauwkeurig.

Als het inproduct van twee vectoren 0 is, staan ze loodrecht op elkaar.

**c.** Wat kun je zeggen over de hoek tussen twee vectoren als het inproduct negatief is? En wat als het inproduct positief is?

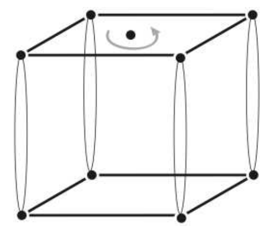



* **23** Gegeven kubus *OABC.EFGH* met *A*(4,0,0), *C*(0,4,0) en *H*(0,0,4).

**a.** Bepaal een vector die loodrecht op vlak *ABGH* staat.

**b.** Teken op het werkblad de projectie van *E* en *C* op vlak *ABGH.*

**c.** Bereken de hoek tussen het diagonaalvlak *ABGH* en de lichaamsdiagonaal *EC* in graden nauwkeurig. Gebruik het inproduct.

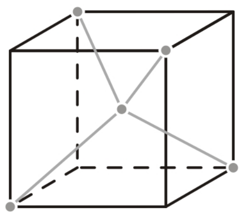


**24** *ABCO* is een vierkant met *A*(4,0,0), *B*(4,4,0), *C*(0,4,0) en *O*(0,0,0). Recht boven *ABCO* ligt op hoogte 4 het vierkant *EFGH* (dus *ABCO.EFGH* is een kubus). De punten die recht boven elkaar liggen zijn verbonden door strak gespannen elastiekjes. Het vierkant *EFGH* wordt om zijn middelpunt (2,2,4) één-achtste slag gedraaid.

**a.** Bereken de coördinaten van de nieuwe plaatsen van *E*, *F*, *G* en *H*.

De elastiekjes die eerst in het lood stonden (ten opzichte van het *Oxy*-vlak) staan nu uit het lood.

**b.** Bereken met het inproduct hoeveel graden.



**25 De valentiehoek in het $CH_4$-molecuul**

Het molecuulmodel van methaan $CH_4$ ziet er als volgt uit. In vier hoekpunten van een kubus zit een H-atoom en in het centrum van de kubus een C-atoom.

De H-C-H-hoek heet in de scheikunde de valentiehoek. We gaan die hoek berekenen.

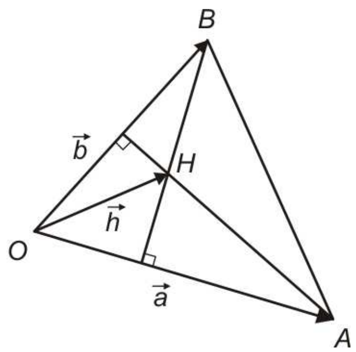
Kies het midden van de kubus als oorsprong *O*. De vectoren die *O* naar de vier hoekpunten verschuiven, noemen we $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ en $\vec{d}$. Als we de valentiehoek gaan berekenen, mogen we aannemen dat die vier vectoren lengte 1 hebben.

**a.** Wat kun je zeggen van $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$ ?

**b.** Wat kun je zeggen van de drie getallen $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$ en $\vec{a}\cdot\vec{d}$ ?

**c.** Ga na dat uit **a** volgt dat $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})=0$ en vervolgens uit **b** dat $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{d}=-\frac{1}{3}$.

Dus de cosinus van de valentiehoek is $-\frac{1}{3}$.




**26 De hoogtelijnen in een driehoek gaan door één punt**

Een bewijs van de bewering in de aanhef staat in paragraaf 5 van hoofdstuk 1 in het boek 5vwo5, wiskunde B. Een elegant bewijs zie je in deze opgave met het inproduct.

In de figuur is het volgende gegeven.

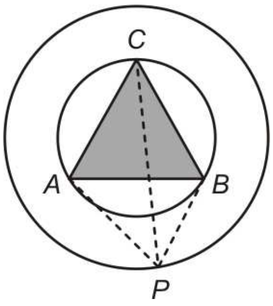
De lijn door *B* loodrecht op *OA* snijdt de lijn door *A* loodrecht op *OB* in *H*. Je moet bewijzen dat $\overrightarrow{OH}=\vec{h}$ loodrecht op $\overrightarrow{AB}$ staat.

**a.** Schrijf met behulp van het inproduct op dat de lijn *OB* loodrecht op lijn *AH* staat.

**b.** Schrijf met behulp van het inproduct op dat de lijn *OA* loodrecht op lijn *BH* staat.

**c.** Laat zien dat uit **a** en **b** volgt dat $\vec{h} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$.

Dit laatste betekent dat lijn *OH* loodrecht op lijn *AB* staat.

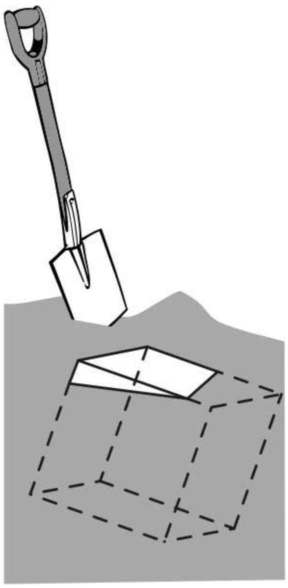



**27** *ABC* is een gelijkzijdige driehoek. Er zijn twee concentrische cirkels getekend. Een van die cirkels is de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC*. Die heeft straal *r*. De tweede cirkel heeft straal *R*.
Voor elk punt *P* van de tweede cirkel geldt:
$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3R^2 + 3r^2$ .
*Pythagoras* nummer 3 tweede jaargang (1962)
We gaan dit bewijzen met behulp van het inproduct.
We nemen het middelpunt van de cirkels als oorsprong.
Dan:
$PA^2 + PB^2 + PC^2 =$
$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) + (\vec{p} - \vec{b}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) + (\vec{p} - \vec{c}) \cdot (\vec{p} - \vec{c})$.

**a.** Werk de haakjes weg in:
$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) + (\vec{p} - \vec{b}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) + (\vec{p} - \vec{c}) \cdot (\vec{p} - \vec{c})$.

**b.** Waarom geldt: $\vec{p} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$?

**c.** Maak het bewijs af.



**28** Een kubus is ingegraven. Er steekt nog een hoek uit de grond. De lengte van de uitstekende stukken zijn 2, 6 en 8 meter.
De vraag is hoe ver de top boven de grond ligt.
Neem de top als oorsprong en neem de coördinaat-assen in de richting van de drie ribben die nog boven de grond uitsteken.

**a.** Geef een vergelijking van het ‘grondvlak’.

**b.** Beantwoord de vraag.

Omgevingskunst van Peter Struycken, 1983
Rotonde Bijsterhuizen

# Antwoorden

**Paragraaf 1  Lijnen in de ruimte**

**1** **a.** $\overrightarrow{PF} = (6,4,6)$ en $\overrightarrow{AH} = (-6,0,6)$

**b.** $\overrightarrow{PF}$ en $\overrightarrow{AH}$ zijn geen veelvoud van elkaar.

**2** **a.** $C = (-4,4,0)$ en $D = (-4,-4,0)$

**b.** (3,3,2)

**c.** $\overrightarrow{BT} = (-4,-4,8)$ en $\overrightarrow{BP} = (-1,-1,2)$

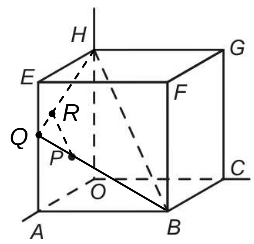
**d.** $\overrightarrow{BR} = (-1\frac{1}{5},-1\frac{1}{5},2\frac{2}{5})$; $R = (2\frac{4}{5},2\frac{4}{5},2\frac{2}{5})$

**e.** $(2\frac{2}{3},2\frac{2}{3},2\frac{2}{3})$

**f.** 'Startpunt' is $T$ en je 'loopt' in de richting $\frac{1}{4}\overrightarrow{BT}$ .

**g.** $(x,y,z) = (0,0,8) + t(-1,1,2)$ ofwel: $(x,y,z) = (-t,t,8+2t)$ .
Er zijn veel andere mogelijkheden, bijv:
$(x,y,z) = (-2t,2t,8+4t)$

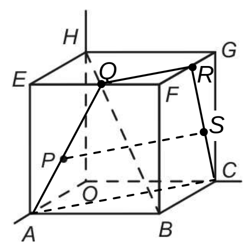
**3** **a.**
De doorsnede met de kubus is driehoek $HQB$.




**b.** Het snijpunt is $R$.

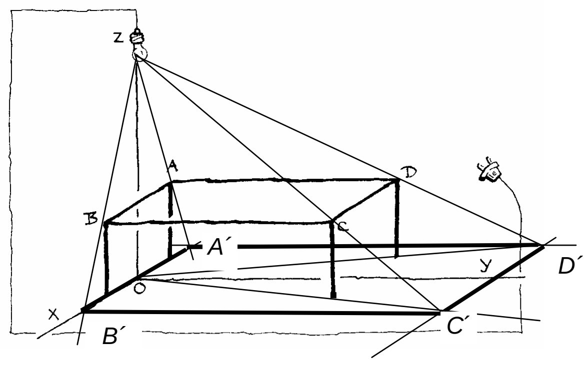
**c.** pv $k$ is: $(x,y,z) = (4+t,1+t,2-t)$ . Snijpunt voor $t = -1$.
Geeft: (3,0,3).

**d.** Het vlak $ACP$ snijdt de kubus volgens vierhoek $AQRC$. Hierbij is $QR$ evenwijdig met $AC$.
Het snijpunt van $m$ met de rechter zijkant is $S$. Hierbij is $SP$ evenwijdig met $AC$.



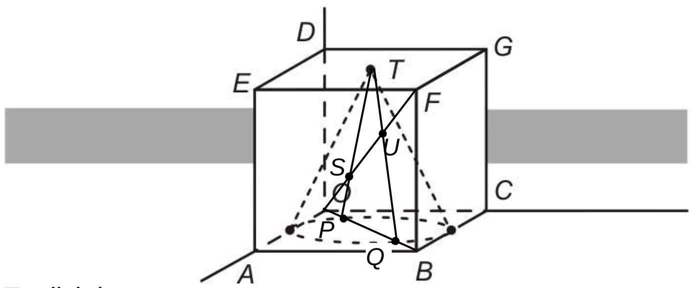

**e.** pv $m$ is: $(x,y,z) = (4-t,1+t,2)$.
$S$ krijg je voor $t = 3$, geeft: (1,4,2).

**4** **a.**



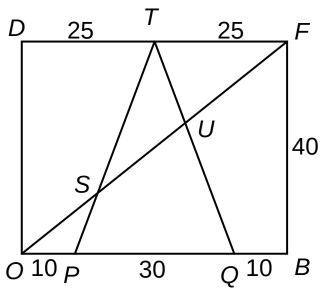
De schaduwen zijn $A'$, $B'$, $C'$ en $D'$.
Toelichting. De schaduw $C'$ van $C$ bijvoorbeeld vind je als volgt. Teken de lijn door $O$ en de voet van de tafelpoot bij $C$. Teken de lijn door het lichtpunt en $C$. Het snijpunt van deze twee lijnen is $C'$.
**b.** De vergrotingsfactor van tafelblad naar schaduw is $\frac{12}{8} = 1\frac{1}{2}$, de schaduw is dus 120 bij 180 (cm).
**c.** Als je in $(x,y,z) = (t, 3t, 12-2t)$ voor $t=0$ neemt, krijg je $L$ en als je voor $t=4$ neemt, krijg je $C$. Voor de schaduw van $C$ geldt: $z=0$, dus $12-2t=0$, dus $t=6$. De coördinaten van de schaduw van $C$ zijn: (6,18,0)
**d.** Een cirkel op de vloer met middelpunt $(3,4\frac{1}{2},0)$ en straal 3 cm.

**5 a.**




Toelichting.
Lijn $OB$ snijdt de grondcirkel van de kegel in $P$ en $Q$. Vlak $OBFD$ snijdt de kegel volgens driehoek $PQT$. $S$ is het snijpunt van $PT$ en $OF$; $U$ is het snijpunt van $TQ$ en $OF$.

**b.**




Driehoek $TSF$ is een uitvergroting van driehoek $SOP$, de vergrotingsfactor is $\frac{TF}{OP} = 2\frac{1}{2}$, dus $S$ ligt op hoogte $\frac{2}{7} \cdot 40 = 11\frac{3}{7}$. De hoogte van $U$ is: $\frac{8}{13} \cdot 40 = 24\frac{8}{13}$.

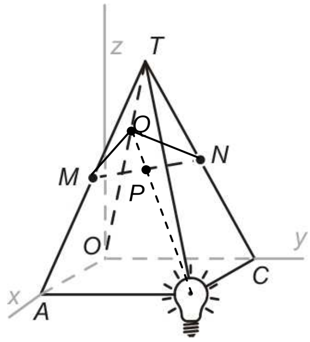
**c.** $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OB} = (8,6,0)$, dus $P = (8,6,0)$.

**d.** Lijn $TP$ heeft pv $(x,y,z) = (8+12t, 6+9t, 40t)$.
**e.** $x$-coördinaat $=$ $z$-coördinaat, want in de $x$-richting heeft het blok dezelfde afmeting als in de $z$-richting. Je

krijgt $S$ dus als $8 + 12t = 40t$, dus als $t = \frac{2}{7}$, dus

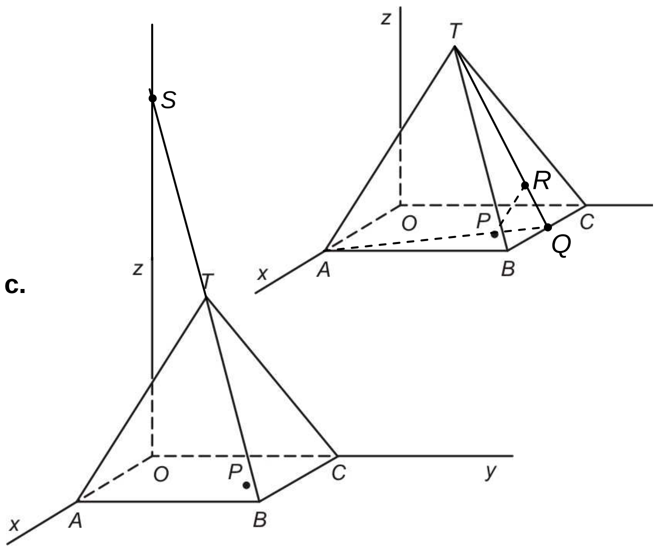
$P = (11\frac{3}{7}, 8\frac{4}{7}, 11\frac{3}{7})$.

**6** **a.** Toelichting.
$P$ is het midden van $MN$. Het snijpunt van $BP$ met $OT$ is $Q$. De schaduwstukken zijn de lijnstukken $MQ$ en $QN$.
**b.** $(x,y,z) = (t,t,3t)$
$(x,y,z) = (2+2s, 2+2s, 3-3s)$
**c.** Snijpunt voor $s$ en $t$ met:
$2+2s = t$ en $3-3s = 3t.$
Dit geeft: $s = -\frac{1}{3}$ en $t = 1\frac{1}{3}$.
Dus $Q = (1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}, 4)$.
**d.** 4




**7** **a.** De doorsnede is driehoek $TAQ$
**b.** De lijn door $P$ evenwijdig aan $TA$ snijdt lijn $TQ$ in $R$.

**c.**




**d.** (0,0,12)

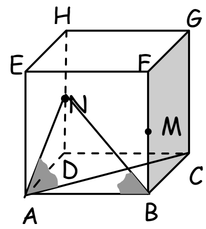
**8** **b.** Jagers: $(x,y,z) = (4, 12-7t, t)$
Raketten: $(x,y,z) = (8-4s, 2+s, s)$
Snijden als er een $s$ en een $t$ is, zó, dat:
$8-4s = 4$, $2+s = 12-7t$ en $s = t$. Als je alleen naar de eerste en de derde vergelijking kijkt, vind je: $s = t = 1$, maar dan is niet aan de tweede vergelijking voldaan.
**c.** Raketten wordt: $(x,y,z) = (8-4s, 2+s, as)$ .
Snijden als er een $s$ en een $t$ en een $a$ is zó, dat:

$8-4s=4$, $2+s=12-7t$ en $as=t$.
Uit de eerste twee vergelijkingen volgt:
$s=1$ en $t=1\frac{2}{7}$, dus moet $a=1\frac{2}{7}$.

**Paragraaf 2 Loodrechte stand en inproduct**

**1** *BG* en *AH* evenwijdig, *BG* en *ED* kruisen, *HM* en *BD* snijden, *AM* en *GH* kruisen

**2** **a.** *AC* en *AH*
**b.** *N* het midden van *HD.*
De hoek is $\angle NAC = 50{,}8°$
**c.** De hoek is $\angle ABN = 48{,}2°$
**d.** De hoek is $\angle EDG = 60°$




**3** **a.** $5\sqrt{2}$
**b.** $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$

**4** **a.** (-3,-4,-5), (-3,0,-5), (3,4,-5), (3,4,0)
**b.** $5\sqrt{2}$, $\sqrt{34}$, $5\sqrt{2}$, 5

**5** **a.** (-2,1,-9)
**b.** $(p-a, q-b, r-c)$

**6** In het middelste plaatje $a^2+b^2 < c^2$ en in het rechtse plaatje: $a^2+b^2 > c^2$

**7** **a.** $(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2$
**b.** $AB^2 = (b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2 =$
$a_1^2+a_2^2+a_3^2 + b_1^2+b_2^2+b_3^2 -$
$2\cdot(a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3)$
en $OA^2+OB^2 = a_1^2+a_2^2+a_3^2 + b_1^2+b_2^2+b_3^2$

**8** **a.** $\overrightarrow{AC} = (-3,3,0), \overrightarrow{OF} = (3,3,3)$,
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OF} = -3\cdot 3+3\cdot 3+0\cdot 3 = 0$, klopt
**b.** $\overrightarrow{OP} = (3,3,z)$ en $\overrightarrow{HB} = (3,3,-3)$, dus $3\cdot 3+3\cdot 3-3z=0$, dus $z=6$
**c.** $(0,-3,1\tfrac{1}{2})\cdot(3,3,z-3)=0 \Leftrightarrow z=9$
**d.** (1,-1,0), (1,0,-1), (0,1,-1), (1,1,-2)

**9** **a.** 6, 0, 0
**b.** $6+0=6$
**c.** $2\cdot 6=12$
**d.** Dat is het kwadraat van de lengte.

**10** Neem aan: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ en $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

**1** $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ en

$\vec{b} \cdot \vec{a} = b_1 \cdot a_1 + b_2 \cdot a_2 + b_3 \cdot a_3$, dus **1** klopt, volgt uit de commutativiteit van de vermenigvuldiging.

**2** $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = a_1 \cdot (b_1 + c_1) + a_2 \cdot (b_2 + c_2) + a_3 \cdot (b_3 + c_3)$ en

$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 + a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 + a_3 \cdot c_3$

Dus de eertse gelijkheid van **2** klopt volgens de distributieve wet.

Het andere gaat net zo.

**3** $(k\vec{a}) \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot (k\vec{b})$ en $k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ zijn alledrie gelijk aan:

$k \cdot a_1 \cdot b_1 + k \cdot a_2 \cdot b_2 + k \cdot a_3 \cdot b_3$ volgens de associatieviteit van de vermenigvuldiging.

**4** $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_3$

$|\vec{a}|^2 = (\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2})^2 = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_3$, dus **4** klopt ook.

**11 a.** $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = 2 + 4^2 = 18$

**b.** $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) =$

$\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = 3^2 + 2 + 2 + 4^2 = 29$

$\sqrt{29}$

**c.** $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 3^2 - 2 - 2 + 4^2 = 21$, dus de lengte van $\vec{a} - \vec{b}$ is $\sqrt{21}$.

**d.** $\vec{c} \cdot \vec{a} = 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{a} = 18$

**e.** $\vec{d} \cdot \vec{b} = -3 \cdot \vec{b} \cdot \vec{b} = -48$

**12** $\vec{w}$ en $\vec{k}$ staan loodrecht op elkaar, dus: $\vec{w} \cdot \vec{k} = 0$, dus

$(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{k} = \vec{v} \cdot \vec{k} + \vec{w} \cdot \vec{k} = \vec{v} \cdot \vec{k} + 0 = \vec{v} \cdot \vec{k}$

**13** $\dfrac{|\vec{v} \cdot \vec{r}|}{|\vec{r}|} = \dfrac{|5 \cdot 1 + -3 \cdot 2 + -3 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 1\tfrac{2}{3}$,

$\tfrac{1}{9}$, 0

**14 a.** -2

**b.** Bijvoorbeeld (2,7)

**c.** $ab + -ab = 0$

**15 a.** $y = \tfrac{1}{3}x$

**b.** $(x, y) = (1, 5) + t(-1, 3) = (1 - t, 5 + 3t)$

c. Het snijpunt van de lijnen uit **a** en **b** vind je door $(1-t, 5+3t)$ in de vergelijking $y=\frac{1}{3}x$ in te vullen, dit geeft: $(2\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$

**16 a.** $\frac{|(0,10)\cdot(1,2)|}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5} > 8$, dus glijdt naar beneden

**b.** $5\sqrt{2} < 8$, dus glijdt niet naar beneden

**c.** $\frac{|(0,10)\cdot(1,a)|}{\sqrt{1+a^2}} = 8 \Leftrightarrow 10a = 8\sqrt{a^2+1}$

Kwadrateren geeft: $100a^2 = 64a^2 + 64$, dus $a = 1\frac{1}{3}$

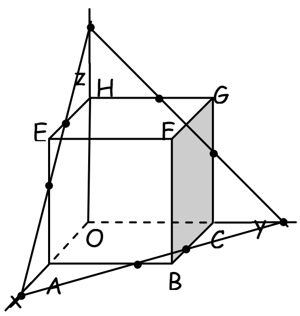
**17** $\frac{(5,1)\cdot(2,1)}{|(2,1)|} = \frac{11}{\sqrt{5}} = 2\frac{1}{5}\sqrt{5}$

**Paragraaf 3 Vergelijkingen van vlakken**

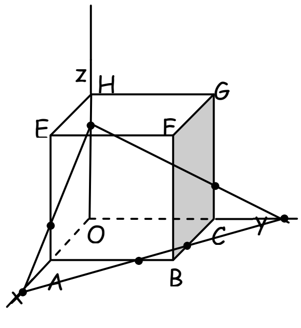
**1 a.** Voorkant kubus
**b.** Diagonaalvlak *ACGE*
**c.** Diagonaalvlak *ABGH*

**2 d.** (1,1,0)

**3 a.** (6,0,0), (0,6,0) en (0,0,6)
**b.** (2,0,4), (4,0,2), (2,4,0), (4,2,0), (0,2,4) en (0,4,2)
**c.** *OF* staat loodrecht op *AC* en dus op *EG* want het is de hoogtelijn in driehoek *ACF*.
**d.** Lijn *BE* staat loodrecht op vlak *OAFG*, dus ook loodrecht op *OF*.
**e.** Het snijpunt van *NB* en *OF* noemen we *S*. Je kunt de zijden van driehoek *NSF* berekenen en daaruit zien dat de driehoeken *NSF* en *BNF* gelijkvormig zijn.



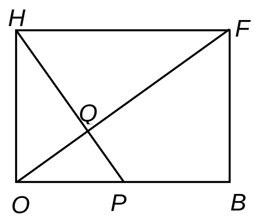

**4 a.** (6,0,0), (0,6,0) en (0,0,3)
**b.** (0,0,3), (4,0,1), 0,4,1), (2,4,0) en (4,2,0)
**c.** (1,1,2)
**d.** Driehoek *OEG* is gelijkbenig en *ON* is dan hoogtelijn.
**d.** Zie **3e**



**5** **a.** Dat is de lengte van lijnstuk *ON*, dus $2\sqrt{6}$ .

**b.** (1,1,1)

**c.** *P* is het midden van *OB*, en *Q* het snijpunt van *HP* en *OF.* Dan is *OQ* de gevraagde afstand. Driehoek *OQP* is gelijkvormig met driehoek *HQF*, dus $OQ = \frac{1}{3}OF = 1\frac{1}{3}\sqrt{3}$




**6** **b.** (20,15,12)

**c.** (3,0,0) en (0,0,5).

**d.** Omdat *y* niet in de vergelijking voorkomt.

**e.** (5,0,3)

**7** **a.** (6,0,0), (0,8,0) en (0,0,10)

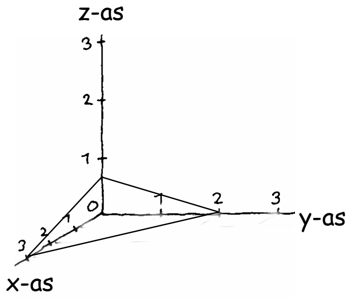
**b.** $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{z}{10}=1$, dus (20,15,12) is normaalvector

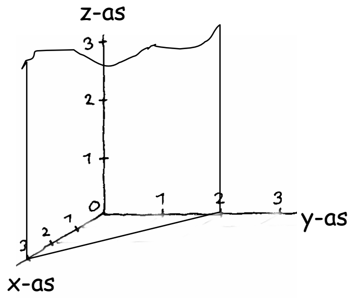
**c.** Vlak *BEH* is evenwijdig met de *x*-as en snijdt de de andere assen in (0,0,5) en (0,4,0), een vergelijking is dus: $\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ een normaalvector is: (0,5,4).

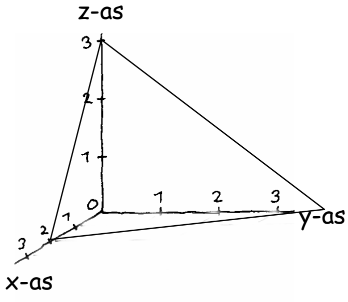
**d.** Een normaalvector van een vlak is ook normaalvector van een vlak dat daarmee evenwijdig is. $d = 0$

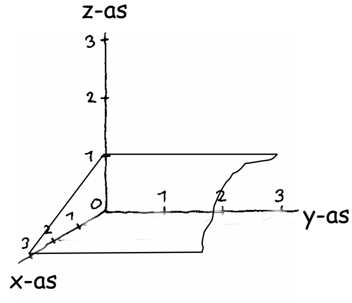
**8**

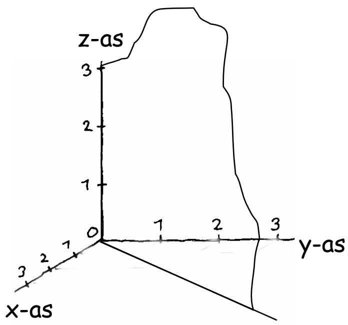
| | |
|---|---|
| (3,0,0), (0,2,0), (0,0,$\frac{1}{2}$) | (3,0,0), (0,2,0) |
| (2,0,0), (0,4,0), (0,0,3) | (3,0,0), (0,0,1) |
| (0,0,0) | (3,0,0) |



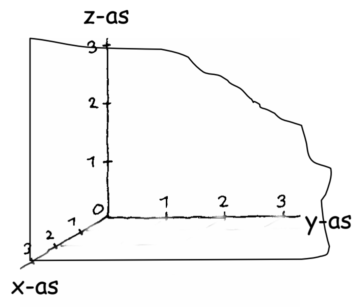





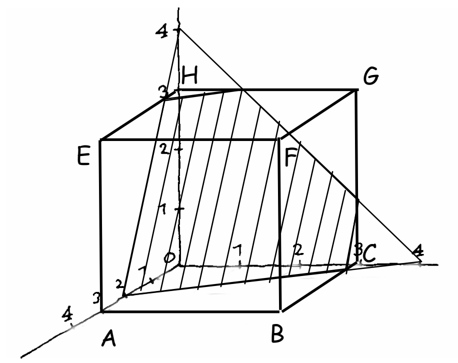





de lijn $y = x$ in het grondvlak




**9** **a.** De coördinaten van de snijpunten zijn: (2,0,0), (0,4,0) en (0,0,4).




**b.** $(0,t,3)$ voldoet aan de vergelijking van $V$ als $2 \cdot 0 + t + 3 = 4 \Leftrightarrow t = 1$, dus het snijpunt is: (0,1,3).
**c.** Het snijpunt met ribbe *OA*: (2,0,0), met ribbe *GC*: (0,3,1), met ribbe *EH*: $(\frac{1}{2},0,3)$ en met ribbe *BC*: $(\frac{1}{2},3,0)$.

**10** Een pv van lijn *AT* is: $(x,y,z) = (3,-3,0) + t \cdot (-1,1,2)$.
Dus elk punt van lijn AT is van de vorm:
$(x,y,z) = (3 - t, -3 + t, 2t)$.
Het punt $S(3 - t, -3 + t, 2t)$ ligt in $V$ als het aan de vergelijking $y + z = 3$ voldoet, dus als $(-3 + t) + 2t = 3 \Leftrightarrow t = 2$.
Dus $S = (1,-1,4)$.

**11 a.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$

**b.** Een pv van de lijn die de kogel volgt is:
$(x,y,z)=(t,2t,2t)$. Het punt $(t,2t,2t)$ voldoet aan de vergelijking van ´het dak´ als $\frac{t}{3}+\frac{2t}{3}+\frac{2t}{4}=1 \Leftrightarrow 4t+8t+6t=12$
$\Leftrightarrow t=\frac{2}{3}$. Het gevraagde punt is dus:$(\frac{2}{3},1\frac{1}{3},1\frac{1}{3})$.

**12 a.** 10

**b.** $2x+3y+4z$ kan niet tegelijkertijd 6 en 10 zijn.

**c.** $a=1\frac{1}{2}$ en $b=2$

**13** $x+y+z=3$ en $x+y+z=9$

**15** $7x-y+z=8$ ; $2x-y=0$ ; $2x-10y+9z=9$ ; $3y+4z=18$

**16** $7x+19y-2z=39$ ; $3x-4y+z=9$ ; $x-9y+6z=1$

**17 a.** $\frac{10}{\sqrt{14}}=\frac{5}{7}\sqrt{14}$

**b.** $4\frac{1}{3}$

**c.** het vlak heeft vergelijking $x+2y-2z=12$, dus zie **b**.

**18 a.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1 \Leftrightarrow 4x+6y+3z-12=0$

**b.** $\frac{12}{\sqrt{61}}=\frac{12}{61}\sqrt{61}$

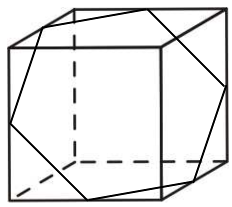
**c.** Neem $OAC$ als grondvlak, dan is de oppervlakte van het grondvlak $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3$ en de hoogte 4.

**d.** $\frac{1}{3}\cdot$ oppervlakte $ACD\cdot$ afstand van $O$ tot vlak $ACD=$ inhoud piramide, dus oppervlakte $ACD=\dfrac{12}{\frac{12}{\sqrt{61}}}=\sqrt{61}$

**19 a.** $\frac{24}{\sqrt{61}}=\frac{24}{61}\sqrt{61}$

**b.** 8

**c.** 8



**20 a.** De doorsnede is een regelmatige zeshoek, de hoekpunten zijn middens van ribben.

**b.** $x+y+z=18$

**c.** Dat is de afstand van $A$ tot $W$, dus $2\sqrt{3}$ .

**d.** Inhoud piramide $ADCH$ is: $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 12\cdot 12=288$
Inhoud halve kubus is $6\cdot 12\cdot 12=864$. De inhoud van de plak is $864-288=576$

**21 a.** $(x,y,z)=(1+2t, -1+4t, 2+t)$

**b.** $\dfrac{|1+2t+2\cdot(-1+4t)-2\cdot(2+t)|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{1}{3}|-5+8t|=3 \Leftrightarrow$

$-5+8t=9$ of $-5+8t=-9$, dit geeft de punten: $(4\frac{1}{2}, 6, 3\frac{3}{4})$ en $(0,-3,1\frac{1}{2})$.

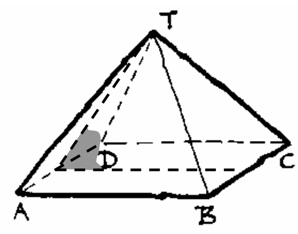
## Paragraaf 4 Het inproduct om hoeken te berekenen

**1** **a.** kleiner
**b.** groter
**c.** 35°

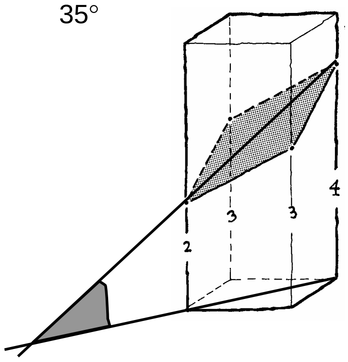
**2** **a.** in de richting van de snijlijn
**b.** in de richting van de vouwlijn

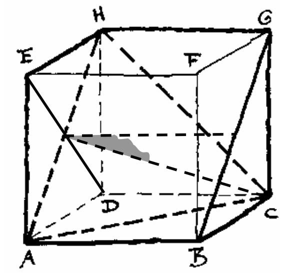
**3** **b.** ja

**4** 90°
**5** in de richting van *AD*




55°
**6** 35°

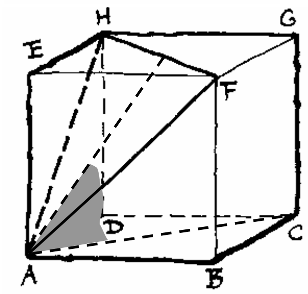


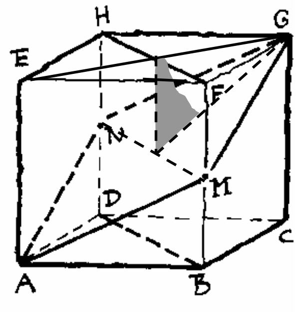

**7** **a.** waar ; waar ; waar
**b.** tussen 0° en 90°

**8** **a.**
**b.** 35°

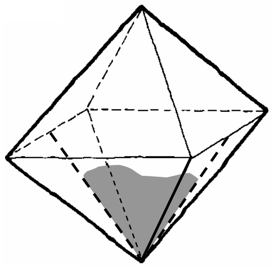
**9** **a.** 55°



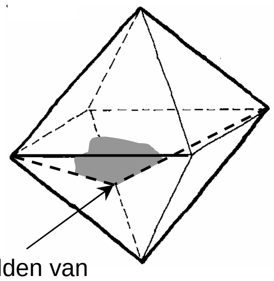
**b.** 55°




**10 a.** 71°



**b.** 109°

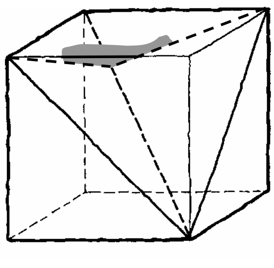


midden van
de ribbe

**11 a.** 71°

**b.** De hoek uit **11a** + de hoek uit **10b** = 180°.

**12 a.** $BP = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ , $BP : HP = 2 : 1$



**b.** 120°

**13 a.** $170\frac{2}{3}\sqrt{2}$

**b.** $2\frac{2}{3}\sqrt{6}$

**c.** 55°

**d.** 35°

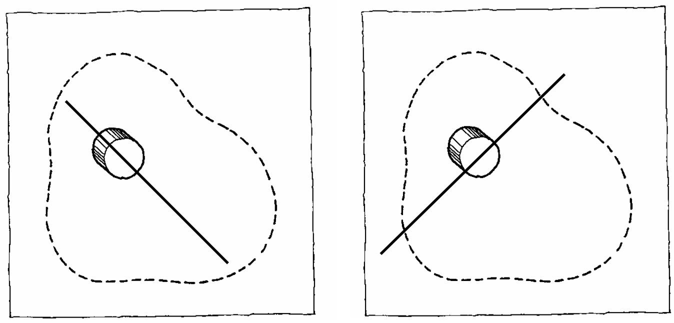
**14** 102°

**15** 45° ; 60° ; 35° ; 71°

**16** 53°

**17 a.** cirkel in vlak *ABFE* met middelpunt *F* die gaat door *E*.
**b.** lijnen in vlak *DGCH* door *G*

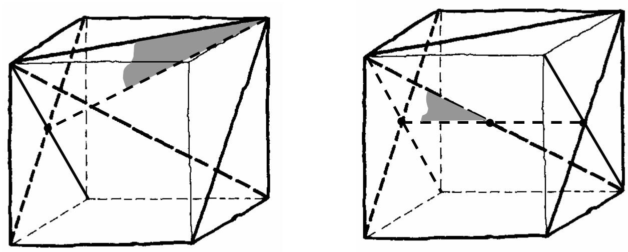
**18 a,b.**



**c.** 4° ; 86°

**19** waar ; waar ; niet waar

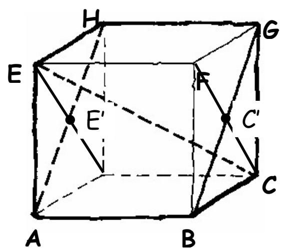
**20 a.** 30°,
**b.** 55°,



**21 a.** 72°, 29°, 63°
**b.** 40,3°

**22 a.** 71°
**b.** 40°
**c.** die is stomp; die is scherp

**23 a.** bijvoorbeeld $\overrightarrow{OE}$
**b.**



**c.** $\overrightarrow{CE} = (4,-4,4) \sim (1,-1,1)$ en $\overrightarrow{C'E'} = (0,-4,0) \sim (0,-1,0)$

$\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, dus $\varphi \approx 55°$

**24 a.** $(2+2\sqrt{2}, 2, 4)$, $(2-\sqrt{2}, 2, 4)$, $(2, +2\sqrt{2}, 4)$, $(2, 2-\sqrt{2}, 4)$

**b.** 28°

**25 a.** $\vec{0}$

**b.** Die zijn vanwege symmetrie hetzelfde.

**26 a.** $\vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{h}) = 0$

**b.** $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{h}) = 0$

**c.** Uit **a** en **b** volgt: $\vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{h}) - \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{h}) = 0$, haakjes wegwerken geeft: $\vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{h} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{h} = 0 \Leftrightarrow$ $\vec{h} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$.

**27 a.** $3 \cdot |\vec{p}|^2 + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{p} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

**b.** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

**c.** $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = r^2$, en $3 \cdot |\vec{p}|^2 = 3R^2$, dus uit **a** en **c** volgt dan het gevraagde.

**28 a.** $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{6} + \dfrac{z}{8} = 1 \Leftrightarrow 12x+4y+3z=24$

**b.** De afstand van $O$ tot dit vlak: $\dfrac{24}{\sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2}} = \dfrac{24}{13}$.