De Wageningse Methode
5&6 VWO wiskunde B
Uitgebreide antwoorden Hoofdstuk 6
De integraal

Paragraaf 1 Oppervlakte onder een grafiek

1 **a.** 15 km
b. als $0 \le t < 1$: $w(t) = 5t$
als $1 \le t < 3$: in 1 uur 5 km gelopen en $t-1$ uur 4 km/u, dus $5 + 4(t-1)$ gelopen, dus $w(t) = 4t + 1$
als $3 \le t \le 4$: $w(t) = 13 + 2(t-3) = 2t + 7$
c. 5 , 4 en 2

2 **a.** $\frac{1}{2} \cdot t \cdot 10t = 5t^2$
b. $h(t)$ = oppervlakte grijze deel

3 **a.** Als de snelheid steeds door de rechthoeken wordt gegeven, zou de auto altijd langzamer rijden dan wanneer de snelheid door de gladde grafiek wordt gegeven. De afgelegde weg in het eerste geval (dat is de totale oppervlakte van de rechthoeken) is dus kleiner dan de afgelegde weg in het tweede geval (dat is L).
b. De oppervlakte van de rechthoeken in plaatje 1 samen is 266 en in plaatje 2: 302. Ik schat: (266 + 302) : 2 = 284
c. Door smallere rechthoeken te nemen, benader je de snelheidsgrafiek nauwkeuriger.

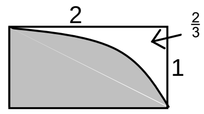
4 Auto 1. De oppervlakte onder de grafiek van auto 1 is groter dan die onder de grafiek van auto 2, dat zie je eenvoudig door het linker en rechter stuk tussen de grafieken te vergelijken.

5 Op woensdag, want de oppervlakte "onder wo, boven di" is groter dan de oppervlakte "onder di, boven wo".

6 **a.** 0,33 (hokjes tellen, de oppervlakte van één hokje is 0,01)
b. De hoogte van de staaf is $0{,}6^2 = 0{,}36$, de oppervlakte is $0{,}1 \cdot 0{,}36 = 0{,}036$
c. $0{,}1 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}049$
d. $x_k = \frac{1}{10} \cdot k$
e. 0,285
f. Het rijtje k met $k = 0, 1, \ldots, 9$ is hetzelfde als het rijtje $k-1$, met $k = 1, \ldots, 10$. Verder is de eerste term van de rijtjes 0, die kun je bij de optelling wel weglaten.
g. $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}k\right)^2$
h. 0,385

7 **a.** Verschil tussen boven- en onderschatting bestaat uit tien rechthoekjes die je op elkaar stapelt tot één kolom van 0,1 breed en 1 hoog. Dus is het totale verschil 0,1.
b. 0,01
c. $x_k = \frac{1}{100} \cdot k$, de oppervlakte van de k-de rechthoek van de onderschatting is $\frac{1}{100} \cdot f(x_k) = 0{,}000001k^2$, de onderschatting is dus:
$$\sum_{k=1}^{99} 0{,}000001 \cdot k^2 = 0{,}32835$$
Bovenschatting $\sum_{k=1}^{100} 0{,}000001 \cdot k^2 = 0{,}33835$
d. Ongeveer 0,33 (zeker tussen 0,32835 en 0,33835)

8 **a.** $1 + 2 : 0{,}05 = 41$
b. $x_k = 0{,}05k$
c. $0{,}05 \cdot (1 - \frac{1}{4} \cdot 0{,}85^2) = 0{,}04096875$
d. $k = 1$; $k = 40$
e. De term voor $k = 40$ is toch nul.
f. 1,308125
g. $\sum_{k=0}^{39} 0{,}05 \cdot (1 - \frac{1}{4} \cdot (0{,}05 \cdot k)^2) = 1{,}358125$
h. Ongeveer 1,33
i. Vermenigvuldig de grafiek van $y = x^2$ op $[0,1]$ horizontaal met factor 2; dan krijg je de grafiek van $y = (\frac{1}{2}x)^2$ op $[0,2]$.
Daaronder is de oppervlakte dus $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Trek dit af van de oppervlakte van de rechthoek van 1 bij 2 en je vindt het antwoord $1\frac{1}{3}$.



9 **a.** De totale bevolkingstoename in de 20ste eeuw.
b. 1.100.000 = 1,1 miljoen
c. 1.100.000 = 1,1 miljoen
d. 800.000

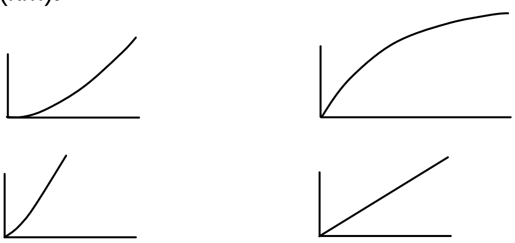
10 Ik verdeel het segment [0,1] in 100 gelijke stukken. Het k-de verdeelpunt is $0{,}01k$. De onderschatting bij deze verdeling is:
$\sum_{k=0}^{99} 0{,}01 \cdot (0{,}01k)^2 = 0{,}245025$ en de bovenschatting is $\sum_{k=1}^{100} 0{,}01 \cdot (0{,}01k)^2 = 0{,}255025$; de oppervlakte is dus ongeveer 0,25.

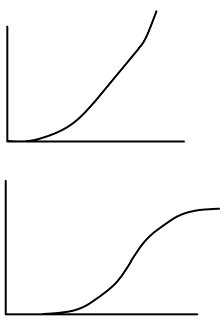
11 **a.** Onderschatting $\sum_{k=0}^{49} 0{,}1 \cdot 10(0{,}1 \cdot k)$
Bovenschatting $\sum_{k=1}^{50} 0{,}1 \cdot 10(0{,}1 \cdot k)$
b. Onderschatting = 122,5
Bovenschatting = 127,5
c. $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 50 = 125$ meter.

12 $\frac{1}{2} \cdot t \cdot 10t = 5t^2$

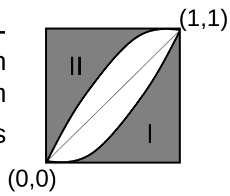
13 a. $5t^2 = 320 \rightarrow 8$ seconden
b. Na 6 seconden 180 m gevallen, dus
(320 – 180) : 2 = 70 m/s
c. $v = 10t$**,** dus na 8 seconden: 80 m/s
e. $t = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \rightarrow 40\sqrt{2}$ m/s
f. $5t^2 - 5(t-1)^2 = 10t - 5$

14 a. In het begin trekt de trein op tot een snelheid van 2 km/min, die snelheid houdt de trein lange tijd, aan het eind remt de trein af tot 0 km/min.
b. De versnelling tijdens het optrekken en afremmen is constant (en dat is discutabel).
De versnellingen op de tijdstippen 0, 2, 33 en 35 zijn abrupt (de snelheidsgrafiek heeft daar een knik).
c. Ja: de oppervlakte onder de grafiek is ook 66 (km).

15

De grafiek linksboven heeft in de oorsprong een horizontale raaklijn, de grafiek rechtsboven in het rechter eindpunt.

16

Alle grafieken zijn glad.
Linksboven: in de oorsprong horizontale raaklijn, het tussenstuk is recht;
rechtsboven: in de oorsprong en in het eindpunt horizontale raaklijn;
linksonder: in het beginpunt en eindpunt horizontale raaklijn;
rechtsonder: in het beginpunt horizontale raaklijn, op het eind is de grafiek steeds rechter.

17 a. Op $t = 0$ moet gelden: $s = 0$.
b. De afgelegde weg op $t = 1$ is $s(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 = \frac{1}{3}$.
c. $\frac{1}{4}$

18 De grijze oppervlakte I is de oppervlakte onder de grafiek van $y = x^2$, dus $\frac{1}{3}$. De grafiek van $y = x^2$ en $y = \sqrt{x}$ zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.


Dus de grijze oppervlakte II is ook $\frac{1}{3}$. Er blijft dan voor de witte oppervlakte over: $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

19 a. $s(t) = \frac{2}{3} \cdot t^3$; de afgelegde weg op $t = 1$ is $s(1) = \frac{2}{3} \cdot 1^3 = \frac{2}{3}$.
b. De oppervlakte onder de grafiek van $y = 2x^2$ is 2 keer zo groot als die onder de grafiek van $y = x^2$, want die ontstaat uit die onder de grafiek van $y = x^2$ door verticale vermenigvuldiging met 2.

21 De afgelegde weg na t seconden is: $s = 1\frac{1}{3} t\sqrt{t}$, want $s(0) = 0$ en $s' = v$. De afgelegde weg na 4 seconden is: $s(4) = 10\frac{2}{3}$.

22 b. De oppervlakte onder de grafiek van f op $[0,a]$ is: $\frac{1}{3}a^3$, want $\frac{d}{da}\frac{1}{3}a^3 = a^2$. De oppervlakte van driehoek OA_xA is $\frac{1}{2}a \cdot a^2 = \frac{1}{2}a^3$, dus de grafiek verdeelt de driehoek in delen met oppervlakte $\frac{1}{3}a^3$ en $\frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{6}a^3$, de verhouding is dus $\frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 2 : 1$.

Paragraaf 2 De integraal

1 a. De oppervlakte onder de grafiek op het interval [0,3] bepalen.
b. $O(t) = \frac{1}{2} \cdot t \cdot 10t = 5t^2$ en $O'(t) = 10t$

2 a. $4/20 = \frac{1}{5}$
b. $1 + 7 \cdot \frac{1}{5} = 2\frac{2}{5}$, $t_k = 1 + \frac{1}{5}k$
c. $(1 + \frac{1}{5} \cdot 7)^2$, $(1 + \frac{1}{5} \cdot 6)^2$
d. $\sum_{k=1}^{20} (1 + \frac{k}{5})^2 \cdot \Delta t$
e. 38,96 , 43,76
f. 4,8
g. De donker gekleurde rechthoeken hebben hoogte $v(5) - v(1)$ en breedte $\frac{1}{5}$
Ja: $24 \cdot \frac{1}{5} = 4{,}8$
h. De breedte van de rechthoeken is $4/100 = \frac{1}{25}$.
De oppervlakte van het verschil is:
$(v(5) - v(1)) \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{25} \cdot 24 = 0{,}96$
i. Als je het interval in x stukken verdeelt, is de breedte van een rechthoek . Het verschil tussen de onder- en bovensom is dan: $(v(5) - v(1)) \cdot \frac{4}{x}$.
Dus $24 \cdot \frac{4}{x} < 0{,}001$, dus $x > 24 \cdot 4 : 0{,}001 = 96\,000$.
Dus in meer dan 96 duizend stukjes.

3 a. $s(t) = \frac{1}{3}t^3 + c$, voor eeen of andere constante c. Omdat $s(0) = 0$, is $c = 0$, dus $s(t) = \frac{1}{3}t^3$.
b. $s(5) - s(1) = 41\frac{1}{3}$

4 a. $2/100 = \frac{1}{50}$
b. $\frac{1}{50} \cdot k$
c. $\sum_{k=0}^{99} \frac{1}{50} \cdot \left(2 - \sqrt{4 - \left(\frac{1}{50}k\right)^2}\right)$ of

sum(seq(0.02·(2–(4–(0.02K)^2)^0.5),K,0,99,1)) $= 0{,}8396$

d. $(f(2)-f(0))\cdot\frac{1}{50} = \frac{1}{25}$

e. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{50}\cdot\left(2-\sqrt{4-\left(\tfrac{1}{50}k\right)^2}\right)$;

sum(seq(0.02·(2–(4–(0.02K)^2)^0.5),K,1,100,1)) = 0,8796

f. Zo te zien is het middelpunt (0,2) en de straal2, dus ik moet laten zien dat de grafiek een deel is van de figuur met vergelijking $x^2+(y-2)^2=4$.

$y=2-\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow y-2=-\sqrt{4-x^2} \Rightarrow (y-2)^2=4-x^2 \Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=4$.

g. $2\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot 4\pi = 4-\pi \approx 0{,}86$

5 **a.** De verdeelstukken hebben lengte $2/200=\frac{1}{100}$, het k-de verdeelpunt is $\frac{1}{100}\cdot k$.

b. Omdat de functie daalt op [0,2].

c. sum(seq(0,01·8/(4+(0,01K)^2),K,1,200,1)) ≈ 3,1366

d. $(y(0)-y(2))\cdot\frac{1}{100} = \frac{1}{100}$

6 **a.** De grafiek van $y=\dfrac{16}{4+x^2}$, krijg je uit die van $y=\dfrac{8}{4+x^2}$ door verticaal met 2 te vermenigvuldigen, dus de oppervlakte is twee keer zo groot, dus 2π

b. De grafiek van $y=\dfrac{8}{4+x^2}+3$ ontstaat uit die van $y=\dfrac{8}{4+x^2}$ door deze 3 eenheden omhoog te schuiven. De oppervlakte onder de grafiek wordt vergroot met de oppervlakte van een rechthoek met hoogte 3 (en breedte 2), dus $\pi+3\cdot 2=\pi+6$

c. Omdat de grafiek van de functie $y=\dfrac{8}{4+x^2}$ symmetrisch in de y-as is, is de oppervlakte 2π

d. Als je de grafiek van op [-2,2] horizontaal met 2 vermenigvuldigt, krijg je de grafiek van $y=\dfrac{8}{4+\left(\frac{1}{2}x\right)^2}$ op [-4,4], dus de oppervlakte is $2\cdot 2\pi=4\pi$

7 **a.** Omdat $O(0)=0$

b. $O(7)=\frac{1}{4}\cdot 7^4=600\frac{1}{4}$; $O(7)-O(1)=600$

c. $F(x)=O(x)+c$, dus $F(7)-F(2)=(O(7)+c)-(O(2)+c)=O(7)-O(2)$

8 **a.** De grafiek van y_2 (respectievelijk y_3) ontstaat uit de grafiek van y_1 door verticaal met 2 (respectievelijk 3) te vermenigvuldigen, dus de oppervlakte onder de grafiek van y_2 (respectievelijk y_3) is 2 (respectievelijk 3) keer zo groot als de oppervlakte onder de grafiek van y_1.

b. Als $F(x)=x^3$, dan $\displaystyle\int_1^2 3x^2\,dx = F(2)-F(1)=7$.

9

$Y=\frac{1}{11}x^{11}$	$y=x^{1\frac{1}{3}}$, dus	$Y=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$
$Y=\sin x$		$Y=-2\cos x$
$Y=e^x$	$y=e^{-x}$, dus	$Y=\frac{1}{2}e^{2x}$
$Y=\ln\lvert x\rvert$		$Y=-e^{-x}$
$Y=\frac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{x}$	$y=x+\dfrac{1}{x^2}$, dus	$Y=\frac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{x}$

10

$F(4)-F(1)=4\frac{2}{3}$,	met $F(x)=x^{1\frac{1}{2}}$
$F(4)-F(1)=16$,	met $F(x)=16x^{\frac{1}{2}}$
$F(3)-F(2)=2$,	met $F(x)=-12x^{-1}$
$F(\pi)-F(0)=2$,	met $F(x)=-\cos x$
$F(\ln 2)-F(0)=1$,	met $F(x)=e^x$
$F(3)-F(2)=20$,	met $F(x)=10x$

11 **a.** $F'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

b. $F'(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=$

$\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

c. $F'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\cos 2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot(2\cos^2 x-1)=\cos^2 x$

d. $F'(x)=\dfrac{1+x}{1-x}\cdot\dfrac{-2}{(1+x)^2}=\dfrac{-2}{(1+x)(1-x)}=\dfrac{-2}{1-x^2}$

e. $F'(x)=(2x-2)\cdot e^x+(x^2-2x+2)\cdot e^x=x^2e^x$

12 **a.** $F(x)=1+\sqrt{1+x^2}$

b. $F(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2$

c. $F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\cdot\sin 2x+2$

d. $F(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}+2$

e. $F(x)=\left(x^2-2x+2\right)\cdot e^x$

13 **a.** $y_1=y_2 \Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{6}\pi$ of $x=\frac{5}{6}\pi$, dus $(\frac{1}{6}\pi,\frac{1}{2})$ en $(\frac{5}{6}\pi,\frac{1}{2})$

b. De oppervlakte tussen de de grafiek van de sinus en de lijn $y=\frac{1}{2}$ is:

$\displaystyle\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi}\sin x\,dx - \tfrac{2}{3}\pi\cdot\tfrac{1}{2} = -\cos\tfrac{5}{6}\pi+\cos\tfrac{1}{6}\pi-\tfrac{1}{3}\pi=\sqrt{3}-\tfrac{1}{3}\pi.$

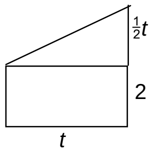
De gevraagde oppervlakte is 2 keer die oppervlakte, dus $2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$.

14 **a.** $\displaystyle\int_a^{a+1} e^x\,dx = e^{a+1}-e^a=e^a(e-1)$

$e^a \cdot \int_0^1 e^x \, dx = e^a \cdot (e-1)$, klopt dus.

b. De grafiek op $[a, a+1]$ krijg je uit de grafiek op $[0,1]$ door verticaal met e^a te vermenigvuldigen.

15 a. oppervlakte driehoek $= \frac{1}{4}t^2$,
oppervlakte rechthoek $= 2t$,
dus $B(t) = \frac{1}{4}t^2 + 2t$.
c. $B'(t) = \frac{1}{2}t + 2$, klopt want B is een primitieve van y.



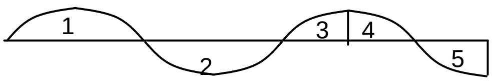
Paragraaf 3 De hoofdstelling

1 a. Ja, de oppervlakte tussen de lijn en de grafiek *boven* die lijn is groter dan de oppervlakte tussen de lijn en de grafiek *onder* die lijn.
b. Het verschil tussen de oppervlaktes bij antwoord **a** delen door de tijd die de rit duurt.

2 a. $5 \cdot 1\frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$ km
b. $10 - 2 + 3 = 11$ km

3 $25 - 26 + 20 = 19$

4 a.



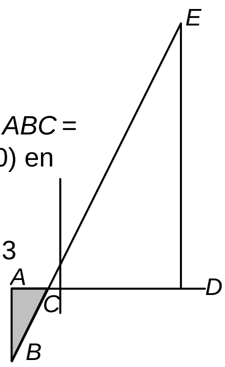
De bijdragen van 1 en 2 heffen elkaar op, evenals die van 4 en 5. De oppervlakte van 3 is:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x \, dx = 2$$

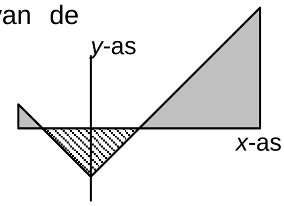
$$\int_{-2}^{5} (2x+1) dx =$$

opp driehoek $BED -$ opp driehoek $ABC =$
met $A(-2,0)$, $B(-2,-3)$, $C(-\frac{1}{2},0)$, $D(5,0)$ en $E(5,11)$

Dus $\int_{-2}^{5} (2x+1) dx = \frac{1}{2} \cdot 5\frac{1}{2} \cdot 11 - \frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 3$
$= 28$

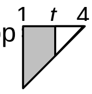
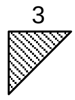


c. De integraal is de oppervlakte van de twee grijze driehoeken samen – de oppervlakte van de gestreepte driehoek $= 9$



d. De oppervlakte van het gebieden op [0,1] en [-1,0] heffen elkaar op. Dus $\int_{-1}^{2} x^3 dx = \int_{1}^{2} x^3 dx = 3\frac{3}{4}$.

5 a. Als $1 < t < 4$:

opp  = opp  − opp  =

$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot (4-t)^2 = 4\frac{1}{2} - 8 + 4t - \frac{1}{2}t^2 =$
$-3\frac{1}{2} - 4t + \frac{1}{2}t^2$ en $O(t)$ is hiervan het tegengestelde, omdat het grijze gebied onder de x-as ligt.
Als $t > 4$:
De oppervlakte van de driehoek onder de x-as is $4\frac{1}{2}$. De oppervlakte van de driehoek boven de x-as is: $\frac{1}{2} \cdot (t-4)^2$, dus $O(t) = \frac{1}{2} \cdot (t-4)^2 - 4\frac{1}{2} = \frac{1}{2}t^2 - 4t + 3\frac{1}{2}$.
b. Hetzelfde

6 a. Er komt een (eventueel negatieve) constante bij.
c. Delen door $t^* - t$.
d. Want $O(a) = 0$.

7 a. $-\frac{1}{4}$
b. $G'(t) = 2\sin t \cos t = \sin 2t$. $\sin^2 -\pi + c = 0$, dus $c = 0$
c. $-\frac{1}{2}\cos 2 \cdot -\pi + c = 0$, dus $c = \frac{1}{2}$.
d. $t = \frac{1}{3}\pi$ invullen in de vorige vraag, dit geeft $\frac{3}{4}$

8 b. $\int_2^t \frac{1}{x} dx = \ln t + c$, voor een of ander getal c.
$\ln 2 + c = 0$, dus $c = -\ln 2$
c. Dan is $F(t) = \ln t + c$, voor een of ander getal c.
Dan is $F(t) - F(a) = (\ln t + c) - (\ln a + c) = \ln t - \ln a$.

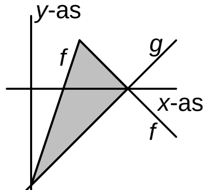
10 $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2}x^{-2}\Big|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{2}(-1)^{-2} - -\frac{1}{2}(-2)^{-2} = -1\frac{1}{2}$

$\int_0^6 (x^2 - 4) \, dx = \frac{1}{3}x^3 - 4x\Big|_0^6 = 48$

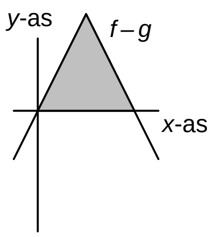
$\int_0^{\pi} \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi} = 0$

$\int_1^8 \sqrt[3]{x} \, dx = \frac{3}{4}x^{1\frac{1}{3}}\Big|_1^8 = 11\frac{1}{4}$

11 a. De grafiek van f gaat door (4,0) en (0,-4) en heeft een knik bij (2,2). De grafiek van g gaat door (4,0) en (0,-4).



b. De driehoek heeft een rechte hoek, want de zijden zijn $2\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$ en $2\sqrt{10}$.
De oppervlakte is $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 8$
c. De grafiek gaat door (0,0) en (4,0) en heeft een knik bij (2,4).
d. De oppervlakte is $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$.



12 a. $A'(x) = f(x) - g(x)$, volgt uit de hoofdstelling.
$B'(x) = f(x) - g(x)$, volgt uit de hoofdstelling, de somregel en de veelvoudregel.
b. $A(a) = 0$ en $B(a) = 0$, dus in a is het verschil 0, dus overal, omdat A en B een constant verschil hebben, immers de verschilfunctie heeft afgeleide 0.
c. $\int_a^b f(t)\,dt$ is de oppervlakte onder de grafiek van f en $\int_a^b g(t)\,dt$ is de oppervlakte onder de grafiek van g. De oppervlakte tussen de grafieken is:
$\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b (f(t) - g(t))\,dt$ volgens **b**.
d. $p(x) - q(x) = f(x) - g(x)$

13 $\int_0^{\pi} (2\sin x + \sin 2x)\,dx = -2\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi} = 4$

14 a. $x^2 \geq 0$
c. $f'(x) = 2x - 4x \cdot e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x(1 - 2e^{-x^2}) = 0 \Leftrightarrow e^{-x^2} = \frac{1}{2}$ of $x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $-x^2 = \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0$ of $x^2 = \ln 2 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = \sqrt{\ln 2}$ of $x = -\sqrt{\ln 2}$, maxima $f(\pm\sqrt{\ln 2}) = \ln 2 + 1$, minimum $f(0) = 2$.
g heeft maximum $g(0) = 2$.
e. 2,25
f. oppervlakte $= \int_{-1\frac{1}{2}}^{1\frac{1}{2}} x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1\frac{1}{2}}^{1\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{4}$.

15 a. $\frac{3}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^3 - x \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^3 - x - \frac{3}{4}x^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x(x^2 - 3x - 4) = 0 \Leftrightarrow x(x-4)(x+1) = 0$ Het linker gebied heeft grenzen -1 en 0 en het rechter gebied heeft grenzen 0 en 4.
b. $\int_{-1}^{0} (g(x) - f(x))dx + \int_0^4 (f(x) - g(x))dx = 8\frac{3}{16}$

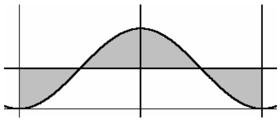
Paragraaf 4 De kunst van het primitiveren

1 • $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$, als $Z = x^{\frac{2}{3}}$, dan $Z' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$, dus $Y = 1\frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}} = 1\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2}$ is primitieve van $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
• $y = \sqrt[3]{\frac{1}{3}x} = \left(\frac{1}{3}x\right)^{\frac{1}{3}}$, als $Z = \left(\frac{1}{3}x\right)^{1\frac{1}{3}}$, dan $Z' = 1\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}x\right)^{\frac{1}{3}}$, dus $Y = \frac{9}{4}\left(\frac{1}{3}x\right)^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{\frac{1}{3}x}$ is primitieve van $y = \sqrt[3]{\frac{1}{3}x}$
• $y = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$, als $Z = x^{\frac{5}{2}}$, dan $Z' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$, dus $Y = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$ is primitieve van $y = x\sqrt{x}$
• $Y = -\frac{1}{\sqrt{x}}$
• $y = \sin\frac{1}{2}x$, als $Z = \cos\frac{1}{2}x$, dan $Z' = -\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x$, dus $Y = -2\cos\frac{1}{2}x$ is primitieve van $y = \sin\frac{1}{2}x$.
• $y = \cos(x + \pi)$, als $Z = \sin(x + \pi)$, dan $Z' = \cos(x + \pi)$, dus $Y = \sin(x + \pi)$ is primitieve van $y = \cos(x + \pi)$.
• $y = x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + x^{-2}$, dan $Y = \frac{1}{3}x^3 - x^{-1} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x}$ is primitieve van $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$
• $y = \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} = x^{-2} + x^{-1\frac{1}{2}}$, dan $Y = -x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}$ is een primitieve van $y = \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}$
• $Y = e^x$ is primitieve van $y = e^x$
• $Y = -e^{-x}$ is primitieve van $y = e^{-x}$
• $y = 2^x$, als $Z = 2^x$, dan $Z' = 2^x \cdot \ln 2$, dus $Y = \frac{2^x}{\ln 2}$ is primitieve van $y = 2^x$.
• $y = \frac{2}{2^x} = 2^{1-x}$, als $Z = 2^{1-x}$, dan $Z' = 2^{1-x} \cdot -\ln 2$ dus $Y = -\frac{2^{1-x}}{\ln 2}$ is primitieve van $y = \frac{2}{2^x}$.

2 b. Die zijn tegengesteld.
c. Omdat y symmetrisch is ten opzichte van de y-as, geldt: $\int_{-x}^{0} e^{-x^2}\,dx = \int_0^x e^{-x^2}\,dx$, dus:
$-\int_0^{-x} e^{-x^2}\,dx = \int_0^x e^{-x^2}\,dx$, dus $-Y_1(-x) = Y_1(x)$, dus is de grafiek van Y_1 puntsymmetrisch ten opzichte van $O(0,0)$.
d. $Y_1'(x) = e^{-x^2} > 0$ voor alle x.
e. $Y_1''(x) = \frac{d}{dx}e^{-x^2} = -2x \cdot e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
$Y_1'' = -2x \cdot e^{-x^2}$ heeft hetzelfde teken als $-2x$, dus wisselt van teken in 0, dus heb je een buigpunt (0,0).

3 a. $\frac{dy}{dx} = \sin^2 x \cdot \cos x$ (kettingregel)
b. $\frac{1}{2}$, π
c. Als je in de formule $1 - 2\sin^2 a = \cos 2a$ voor $a = \frac{1}{2}x$ invult, heb je het gevraagde.
d. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$
e. $\frac{1}{2}\pi$

f. Je kunt het gebied zó verknippen, dat je een rechthoek krijgt die π breed en $\frac{1}{2}$ hoog is, zie plaatje.



4 **a.** $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$, dus $F(x)=-\frac{1}{4}\cos 2x$ is een primitieve.
Opmerking. Misschien zie je ook wel dat $f(x)$ het resultaat is door met de kettingregel $\sin^2 x$ of $\cos^2 x$ te differentiëren, bijvoorbeeld: $\frac{d}{dx}\sin^2 x =$
$2\sin x\cos x$, dus een primitieve is $Y=\frac{1}{2}\sin^2 x$
b. $\frac{1}{4}$

5 **a.** $f'(x)=(x+1)\,e^x$
b. Als je f differentiëert, krijg je e^x 'teveel', dus moet je een primitieve van $y=e^x$ van f aftrekken om het 'teveel' bij differentiëren weer kwijt te raken. $F(x)=x\,e^x-e^x=(x-1)\,e^x$

6 **b.** Omdat $\ln x$ alleen voor $x>0$ is gedefinieerd.
c. Als $x<0$, dan $F(x)=\ln(-x)$ en $F'(x)=$
$\frac{1}{-x}\cdot -1$ (kettingregel) $=\frac{1}{x}$.
d. $=\ln|x|\Big|_{-e^2}^{-e}=\ln|-e|-\ln|-e^2|=1-2=-1$

7 **a.** $g'(x)=1+\ln x$, dus $F(x)=x\ln x-x$ is primitieve van $f(x)$.
b. $=x\ln x-x\Big|_{\sqrt{e}}^{e}=e-e-(\sqrt{e}\cdot\frac{1}{2}-\sqrt{e})=\frac{1}{2}\sqrt{e}$
x

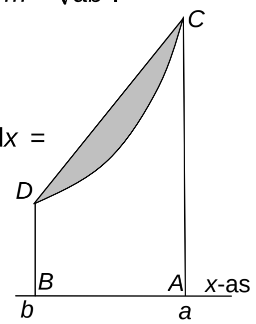
8 $F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$, bruikbaar voor $n\neq -1$.

9 **b.** $f(x)=x+\dfrac{4}{x^2}$, dus $f'(x)=1-\dfrac{8}{x^3}$
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3=8 \Leftrightarrow x=2$, dus minimum is $f(2)=3$.
d. $f(x)=x+4x^{-2}$; als $|x|\to\infty$, dan $4x^{-2}\to 0$, dus $y\approx x$.
e. $F(x)=\frac{1}{2}x^2-4x^{-1}$, dus de oppervlakte $=F(2)-F(1)=3\frac{1}{2}$.

10 **a.** Je kunt de functie beschouwen als een periodieke functie met variabele amplitude e^x, die dus naar 'rechts' steeds hoger en lager komt en naar 'links' samengeknepen wordt naar de x-as. Dus: bestaat niet ; 0
b. Dan $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot\pi$;
$\dfrac{100-\frac{1}{2}\pi}{\pi}\approx 31{,}33$, dus voor $k=0, 1, \ldots, 31$, dus 32 keer.
c. $F'(x)=(a-b)\sin x\cdot e^x+(a+b)\cos x\cdot e^x$, dus $a-b=0$ en $a+b=1$, dus $a=\frac{1}{2}$ en $b=\frac{1}{2}$.
d. $F(x)=\frac{1}{2}\sin x\cdot e^x+\frac{1}{2}\cos x\cdot e^x$ is een primitieve van f, dus de oppervlakte $=F(\frac{1}{2}\pi)-F(-\frac{1}{2}\pi)$
$=\frac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}\pi}+e^{-\frac{1}{2}\pi})$.

11 $\displaystyle\int_a^m \frac{1}{x}\,dx=\ln m-\ln a=\ln\frac{m}{a}$; $\displaystyle\int_m^b \frac{1}{x}\,dx=\ln\frac{b}{m}$
$\dfrac{m}{a}=\dfrac{b}{m}$, dus $m^2=ab$, dus $m=\sqrt{ab}$.

12 Oppervlakte segment =
opp trapezium $BACD-\displaystyle\int_b^a x^2\,dx$ =
$\frac{1}{2}(a-b)(a^2+b^2)-\frac{1}{3}(a^3-b^3)=$
$\frac{1}{6}a^3-\frac{1}{2}a^2b+\frac{1}{2}ab^2-\frac{1}{6}b^3$
Uitwerken van $\frac{1}{6}(a-b)^3$ levert hetzelfde op.



13 Oppervlakte $V=\displaystyle\int_a^{a+1} e^{-x}\,dx=-e^{-x}\Big|_a^{a+1}=-e^{-a-1}+e^{-a}$.
Oppervlakte $W=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(e^{-a-1}+e^{-a})=\frac{1}{2}(e^{-a-1}+e^{-a})$

$$\frac{e^{-a-1}+e^{-a}}{-e^{-a-1}+e^{-a}}=\frac{e^{-a-1}+e^{-a}}{-e^{-a-1}+e^{-a}}\cdot\frac{e^{a+1}}{e^{a+1}}=\frac{1+e}{-1+e}$$

De verhouding is dus: $\dfrac{2+2e}{e-1}$, hangt niet van a af.

14 **a.** $\frac{1}{100}(x^2-4x-5)^3(x-2)=0 \Leftrightarrow$
$x-2=0$ of $x^2-4x-5=0 \Leftrightarrow x=2$ of $x=5$ of $x=-1$, dus (2,0), (5,0) en (-1,0).
b. $f(x)=\frac{1}{100}(x^2-4x-5)^3(x-2)=$
$\frac{1}{100}((x-2)^2-1)^3(x-2)$.
$f(2+a)=\frac{1}{100}(a^2-1)^3 a$ en $f(2-a)=\frac{1}{100}((-a)^2-1)^3\cdot -a$, dus $f(2+a)=-f(2-a)$ voor alle a.
c. De grafiek van f is puntsymmetrisch ten opzichte van (2,0).
d. $F(x)=c\cdot(x^2-4x-5)^4$, dan
$F'(x)=c\cdot 3\cdot(x^2-4x-5)^3\cdot(2x-4)=$
$6c\cdot(x^2-4x-5)^3\cdot(x-2)$, dus: $c=\frac{1}{600}$.
e. $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx=\frac{1}{600}\left(x^2-4x-5\right)^4\Big|_2^5=-\frac{4096}{300}$ (Je krijgt een negatief getal omdat het gebied op [2,5] onder de x-as ligt.) De oppervlakte is $\frac{4096}{300}$.

Rekentechniek

1 **a.** $\dfrac{x^3+x-2}{x^2}=\dfrac{x^3}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}=x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}$
b. $\dfrac{x^3+2x^2-7}{x-2}=\dfrac{x^2(x-2)+2x^2+2x^2-7}{x-2}=$
$x^2+\dfrac{4x(x-2)+8x-7}{x-2}=x^2+4x+\dfrac{8(x-2)+9}{x-2}=$
$x^2+4x+8+\dfrac{9}{x-2}$

c. $\dfrac{x^4-2x^2-63}{x-3}=\dfrac{x^3(x-3)+3x^3-2x^2-63}{x-3}=$

$x^3+\dfrac{3x^2(x-3)+9x^2-2x^2-63}{x-3}=$

$x^3+3x^2+\dfrac{7x(x-3)+21x-63}{x-3}=$

$x^3+3x^2+7x+\dfrac{21x-63}{x-3}=$

$x^3+3x^2+7x+21$

d. $\dfrac{x^4-2x^2-63}{x+3}=\dfrac{x^3(x+3)-3x^3-2x^2-63}{x+3}=$

$x^3+\dfrac{\text{-}3x^2(x+3)+9x^2-2x^2-63}{x+3}=$

$x^3-3x^2+\dfrac{7x(x+3)-21x-63}{x+3}=$

$x^3-3x^2+7x-21$

e. $\dfrac{x^4-2x^3-63}{x^2+3}=\dfrac{x^2\left(x^2+3\right)-3x^2-2x^3-63}{x+3}$

$x^2+\dfrac{\text{-}2x\left(x^2+3\right)+6x-3x^2-63}{x^2+3}=$

$x^2-2x+\dfrac{6x-3x^2-63}{x^2+3}=$

$x^2-2x+\dfrac{\text{-}3\left(x^2+3\right)+9-63}{x^2+3}=$

$x^2-2x-3+\dfrac{6x-54}{x^2+3}$

2 $\dfrac{3x+4-(x+2)^2}{x}=\dfrac{\text{-}x^2-4x-4+3x+4}{x}=$

$\dfrac{\text{-}x^2-x}{x}=\text{-}x-1$

$\dfrac{(x+1)^2-x^2}{x}=\dfrac{2x+1}{x}=2+\dfrac{1}{x}$

$\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}+1$

6

of: $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}+1$

$\dfrac{5x-2y+x+8y}{x+y}=\dfrac{6x+6y}{x+y}=6$