De Wageningse Methode
5&6 VWO wiskunde B
Uitgebreidere antwoorden Hoofdstuk 8
Integralen toepassen

Paragraaf 1 Inhoud en integraal

1 **a.** Het 'topje' van de piramide is gelijkvormig met de hele piramide met factor $f=\frac{x}{4}$, dus

$O(x)=f^2\cdot 36=\left(\frac{x}{4}\right)^2\cdot 36=2\frac{1}{4}x^2$

b. 32

c. sum(seq($2\frac{1}{4}$∗1/8∗(1/8K)^2,K,1,32,1)) = 50,273...

d. $\sum_{k=0}^{31} O(x_k)\Delta x$

sum(seq($2\frac{1}{4}$∗1/8∗(1/8K)^2,K,0,31,1)) = 45,773...

e. Bovensom: $\sum_{k=1}^{32} 2\frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{8}k)^2\cdot\frac{1}{8}$;

ondersom: $\sum_{k=0}^{31} 2\frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{8}k)^2\cdot\frac{1}{8}$

f. Een primitieve van $O(x)=2\frac{1}{4}x^2$ is $F(x)=\frac{3}{4}x^3$. De inhoud is: $F(4)-F(0)=48$.

2 **a.** Het topje van de kegel is gelijkvormig met de hele kegel, met factor $\frac{3}{4}$, dus $(\frac{3}{4})^2\cdot 4\pi=2\frac{1}{4}\pi$

b. De gelijkvormigheidsfactor f is $\frac{x}{4}$, dus $O(x)=$ $f^2\cdot 4\pi=\frac{1}{4}\pi\cdot x^2$

c. $\sum_{k=1}^{32} O(x_k)\Delta x$

d. $\frac{1}{4}\pi\cdot x^2$

e. Een primitieve van $O(x)=F(x)=\frac{1}{12}\pi\cdot x^3$, de inhoud is

$\int_0^4 \frac{1}{4}\pi\cdot x^2\,dx=F(x)\Big|_0^4=5\frac{1}{3}\pi.$

3 **a.** $2\frac{1}{4}\pi$; de oppervlakte is namelijk $\pi x^2=\pi y$.

b. πy op het interval [0,4]

c. 8π

d. $P(x)=\pi y^2=\pi x^4$

e. Een bovensom bij een verdeling in 20 gelijke stukjes bijvoorbeeld is $\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{10}\pi\cdot(\frac{1}{10}k)^4$. Dit is precies de bovensom die je op zou schrijven om de oppervlakte onder de grafiek van de functie $f(x)=\pi x^4$ op het interval [0,2] te berekenen bij een verdeling in 20 gelijke stukjes.

f. $\int_0^2 \pi\cdot x^4\,dx=\frac{1}{5}\pi\cdot x^5\Big|_0^2=6\frac{2}{5}\pi$

4 $\int_1^4 \pi\cdot\left(e^x\right)^2\,dx=\frac{1}{2}\int_1^4 \pi\cdot e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\pi\cdot e^{2x}\Big|_1^4$

$=\frac{1}{2}\pi\cdot(e^8-e^2)$

5 **a.** $\int_0^4 \pi\cdot x^3\,dx=\frac{1}{4}\pi\cdot x^4\Big|_0^4=64\pi$

b. $y=x^{1\frac{1}{2}}$, dus $y^{\frac{2}{3}}=(x^{1\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}$, dus $x=y^{\frac{2}{3}}$

c. $\int_0^8 \pi\cdot y^{\frac{4}{3}}\,dy=\frac{3}{7}\pi\cdot y^{\frac{7}{3}}\Big|_0^8=54\frac{6}{7}\pi$

6 **a.** $x=1$ en $x=-1$

b. Voor $x=0$ is $y=1$. De inhoud is $\int_1^{\sqrt{2}}\pi x^2 dy$.

$y^2=\frac{1}{1-x^2}\Leftrightarrow 1-x^2=\frac{1}{y^2}\Leftrightarrow x^2=1-\frac{1}{y^2}$

De inhoud is dus:

$\int_1^{\sqrt{2}}\pi(1-\frac{1}{y^2})dy=\pi(y+\frac{1}{y})\Big|_1^{\sqrt{2}}=\pi(1\frac{1}{2}\sqrt{2}-2)$.

7 **a.** $y=2-\sqrt[3]{x}\Leftrightarrow\sqrt[3]{x}=2-y\Leftrightarrow\pi x^2=\pi(2-y)^6$

c. Een primitieve van $\pi(2-y)^6$ is

$G(y)=-\frac{1}{7}\pi(2-y)^7$ (-teken vanwege kettingregel)

$\int_0^2 \pi(2-y)^6\,dy=-\frac{1}{7}\pi(2-y)^7\Big|_0^2=18\frac{2}{7}\pi$

8 **a.** 3 ; 1,08 ; het 'topje' is gelijkvormig met de hele piramide met factor $f=\frac{x}{10}$, dus op x eenheden van de top is de oppervlakte $\frac{x^2}{100}\cdot 12$.

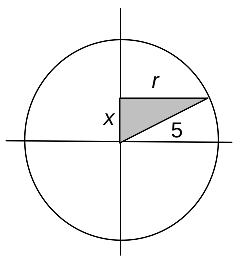
b. $\int_0^{10}\frac{x^2}{100}\cdot 12\,dx=\frac{1}{25}x^3\Big|_0^{10}=40$

c. De verkleiningsfactor is $\frac{x}{h}$.

d. De inhoud is $\int_0^h \frac{x^2}{h^2}\cdot G\,dx=\frac{1}{3}x^3\cdot\frac{G}{h^2}\Big|_0^h=\frac{1}{3}\cdot h\cdot G$.

e. Klopt.

9 **a.** Zie plaatje. De straal van de snijcirkel is r. $r^2=25-x^2$ (stelling van Pythagoras), de oppervlakte van de snijcirkel is dus $\pi(25-x^2)$.



b. $\int_3^5 \pi \cdot (25 - x^2)\,dx = \pi \cdot (25x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_3^5 = 17\frac{1}{3}\pi$

c. De inhoud van een halve bol met straal R is:

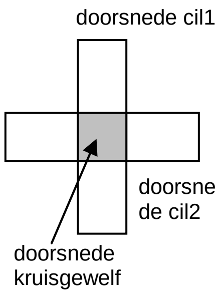
$\int_0^R \pi \cdot (R^2 - x^2)\,dx = \pi \cdot (R^2 x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_0^R = \pi \cdot (R^3 - \frac{1}{3}R^3) = \frac{2}{3}\pi R^3$.

De hele bol heeft inhoud $1\frac{1}{3}\pi R^3$.

d. $\int_{R-h}^R \pi \cdot (R^2 - x^2)\,dx = \pi \cdot (R^2 x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_{R-h}^R =$

$\pi \cdot (R^3 - \frac{1}{3}R^3 - R^2(R-h) + \frac{1}{3}(R-h)^3) = \pi h^2(R - \frac{1}{3}h)$.

10 a. Een liggende cilinder heeft op elke hoogte een rechthoekige doorsnede. Het kruisgewelf heeft dus op elke hoogte een vierkante doorsnede, zie plaatje



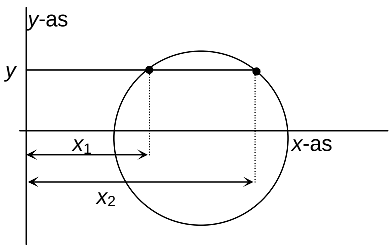
Een cirkel met straal 3 heeft op hoogte x boven het middelpunt, breedte $2\sqrt{9 - x^2}$.

Het kruisgewelf met hoogte 3 heeft op hoogte x een vierkant met zijde $2\sqrt{9 - x^2}$ als doorsnede. $(2\sqrt{9 - x^2})^2 = 36 - 4x^2$.

b. $\int_0^3 (36 - 4x^2)\,dx = 36x - \frac{4}{3}x^3\Big|_0^3 = 72$

11 a. $(x-4)^2 + y^2 = 4$

b. $O(y)$ is de oppervlakte van het gebied tussen twee concentrische cirkels, de een met straal x_1 en de ander met straal x_2, zie plaatje.



$O(y) = \pi x_2^2 - \pi x_1^2$.

Er geldt: $x_2 = 4 + \sqrt{4 - y^2}$ en $x_1 = 4 - \sqrt{4 - y^2}$.

Dus: $x_2^2 - x_1^2 = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) =$

$= (4 + \sqrt{4 - y^2} + 4 - \sqrt{4 - y^2})$

$\cdot ((4 + \sqrt{4 - y^2}) - (4 - \sqrt{4 - y^2})) =$

$= 2\sqrt{4 - y^2} \cdot 8$, dus: $\pi(x_2^2 - x_1^2) = 16\pi\sqrt{4 - y^2}$

c. We verdelen het interval [-2,2] bijvoorbeeld in 400 gelijke stukjes. Elk stukje heeft dan lengte $\frac{1}{100}$.
Het k-de verdeelpunt is $y_k = -2 + \frac{1}{100}k$.
De integraal wordt goed benaderd door:
sum(
seq(0.01∗16π∗ (4 – (- 2+ K/100)^2)^.5, K, 0 , 400 , 1))
= 315,785... .

d. De cirkel met middelpunt O en straal 2 heeft vergelijking $x^2 + y^2 = 4$. Voor de punten (x,y) op het deel boven de x-as geldt: $y = \sqrt{4 - x^2}$.
De oppervlakte tussen de grafiek van $y = \sqrt{4 - x^2}$ en de x-as is: $\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$. De uitkomst is de oppervlakte van een halve cirkel met straal 2, dus 2π.

e. $\int_{-2}^2 16\pi\sqrt{4 - y^2}\,dy = 16\pi \cdot 2\pi = 32\pi^2$.

f. De hartomtrek van de torus is: $2 \cdot 4\pi = 8\pi$. De cilinder met hoogte $h = 8\pi$ en straal $r = 2$ heeft als inhoud: $\pi r^2 h = 32\pi^2$.

12 a. Noem de gevraagde zijde x, dan volgt uit gelijkvormigheid: $x : 10 = (8 - h) : 8$,
dus $x = 10 - 1\frac{1}{4}h$.

b. $O(h) = \frac{3}{4}h(10 - 1\frac{1}{4}h)$ heeft als grafiek een bergparabool. $O(0) = O(8) = 0$, dus O is maximaal als $h = 4$, de doorsnede is dan 5 bij 3, niet vierkant.

c. $I = \int_0^8 \frac{3}{4}h\left(10 - 1\frac{1}{4}h\right)dh = \frac{15}{4}h^2 - \frac{15}{48}h^3\Big|_0^8 = 80$

Paragraaf 2 Meer over integralen toepassen

1 De oppervlakte onder de grafiek op dat tijdsinterval berekenen en dat delen door de lengte van het interval.

2 a. $\int_1^3 v(t)\,dt = \frac{2}{3}(t+1)^{1\frac{1}{2}} - t\Big|_1^3 = 3\frac{1}{3} - 1\frac{1}{3}\sqrt{2}$

b. Delen door $3 - 1 = 2$.

c. $\int_0^\pi \sin x\,dx = 2$, de gemiddelde functiewaarde is $\frac{2}{\pi}$.

d. $\int_0^3 (x^2 + 4x - 5)\,dx = 12$, gemiddelde functiewaarde: 4.

3 a. $1\frac{1}{2}\pi$ watt

b. Niet

c. Dan: $I = 2\sin t$, dus $P = 12\sin^2 t$, dus gemiddeld: 6π watt, dus 4 keer zo groot.

d. $1\frac{1}{2} = \frac{V^2}{3}$, dus $V = \sqrt{4\frac{1}{2}}$

e. De amplitude noemen we V_{max} , dan $V_{eff}^2 = \frac{1}{2}V_{max}^2$, dus $V_{eff} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot V_{max}$.

4 **a.** $\dfrac{y(4)-y(0)}{4-0}=1$

b. $\frac{1}{2}$; ja: $\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{1}{2}$

c. Een primitieve van f' is f, dus $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$. De gemiddelde helling is dus $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

5 **a.** $(1\frac{1}{2}+3+\frac{1}{2})\cdot x = 9\frac{1}{2}$, dus $x=1{,}9$.

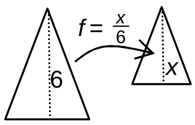
b. De plaats wordt: $\dfrac{3\cdot 1\frac{1}{2}+4\cdot 3+5\cdot 0+6\cdot \frac{1}{2}}{5}=3{,}9$.

Dus het zwaartepunt gaat 2 eenheden naar rechts ten opzichte van M, blijft dus op de plaats.

c. Je krijgt gewichten $1\frac{1}{2}$ op 0,9 links van het zwaartepunt en 3 op 0,1 en $\frac{1}{2}$ op 2,1 rechts van het zwaartepunt. Het moment van de gewichten links is: $1\frac{1}{2}\cdot 0{,}9=1{,}35$ en het moment rechts is: $3\cdot 0{,}1+\frac{1}{2}\cdot 2{,}1=1{,}35$, dus er is evenwicht.

d. -3,1

6 **a.** $\dfrac{x}{6}\cdot 4=\frac{2}{3}x$, $\frac{2}{3}x\cdot\Delta x$



b. 48

c. $\sum_{k=1}^{n} x_k\cdot m_k$ wordt in de limiet $\int_0^6 \frac{2}{3}x^2\,dx$ en $\sum_{k=1}^{n} m_k$ wordt de massa (= oppervlakte) van de driehoek.

d. $4:2=2:1$

7 **a.** $\frac{2}{3}\pi r^3$, met $r=1$, dus $\frac{2}{3}\pi$

b. De straal van de schijf is $\sqrt{1-h^2}$, dus $\pi(1-h^2)\cdot\Delta h$.

c. De schijf op afstand h ten opzichte van M heeft moment: $h\cdot\pi(1-h^2)\cdot\Delta h$.

d. $\int_0^1 \pi h(1-h^2)\,dh=\pi(\frac{1}{2}h^2-\frac{1}{4}h^4)\Big|_0^1=\frac{1}{4}\pi$, dus het zwaartepunt ligt $\dfrac{\frac{1}{4}\pi}{\frac{2}{3}\pi}=\frac{3}{8}$ van M.

8 **a.** We vervangen de kegel door een stapel schijven van dikte Δx die precies op hun gemiddelde hoogte dezelfde doorsnede hebben als de kegel. Een schijf waarvan de gemiddelde hoogte op x eenheden van de top ligt, heeft straal $\dfrac{x}{h}\cdot r$, dus massa: $\pi\cdot\dfrac{x^2}{h^2}\cdot r^2\cdot\Delta x$. Het moment van deze schijf ten opzichte van de top is: $\pi x\cdot\dfrac{x^2}{h^2}\cdot r^2\cdot\Delta x$.

Bij het nemen van de limiet gaat $\sum \pi x\cdot\dfrac{x^2}{h^2}\cdot r^2\cdot\Delta x$ over in de integraal. $\int_0^h x\cdot\pi\cdot\dfrac{r^2\cdot x^2}{h^2}\,dx$.

b. $\int_0^h x^3\cdot\pi\cdot\dfrac{r^2}{h^2}\,dx=\frac{1}{4}x^4\cdot\pi\cdot\dfrac{r^2}{h^2}\Big|_0^h=\frac{1}{4}\pi\cdot r^2h^2$.

De inhoud van de kegel is: $\frac{1}{3}\pi r^2h$.

Het zwaartepunt ligt dus $\dfrac{\frac{1}{4}\pi r^2h^2}{\frac{1}{3}\pi r^2h}=\frac{3}{4}h$ van de top, dus op hoogte $\frac{1}{4}h$.

9 **a.**

$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\approx\sqrt{\Delta x^2+(f'(x)\Delta x)^2}\sqrt{\Delta x^2}\cdot\sqrt{1+f'(x)^2}=$

$\Delta x\cdot\sqrt{1+f'(x)^2}$

c. De grafiek is precies een twaalfde deel van de cirkel met straal 2; de lengte van de grafiek dus $\frac{1}{3}\pi$.

d.

sum(seq(.02∗√(1 + (.02K)²/(4 − (.02K)²)),K,0,49))

≈ 1,045663375

10 $\int_0^4 \sqrt{1+(1\frac{1}{2}\sqrt{x})^2}\,dx=\int_0^4\sqrt{1+2\frac{1}{4}x}\,dx=$

$\frac{8}{27}(1+2\frac{1}{4}x)^{1\frac{1}{2}}\Big|_0^4=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$

11 **a.** $y(0)=1\Leftrightarrow\frac{1}{a}=1\Leftrightarrow a=1$

b. De hoogte $=y(1)=\frac{1}{2}(e+e^{-1})$

c. $\sqrt{1+(f'(x))^2}=$

$\sqrt{1+(\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}))^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{2x}-2+e^{-2x})}$

$=\sqrt{\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})}=\sqrt{(\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}))^2}=f(x)$

d. $\int_{-1}^1 \frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\,dx=e-e^{-1}$

12 **a.** $\Delta x=0{,}06$, dus de verdeelpunten zijn $x_k=1+0{,}06k$, met $k=0{,}1{,}2...$ De straal van de k-de cilindermantel is:

$f(x_k)=4\sqrt{1+0{,}06k}$, te beginnen met $k=0$.

De hoogte van de cilinder is $0{,}06\cdot\sqrt{1+f'(x_k)^2}=$

$0{,}06\sqrt{1+(\frac{4}{2\sqrt{x_k}})^2}=0{,}06\sqrt{1+\frac{4}{1+0{,}06k}}$.

De oppervlakte van de mantel is: $2\pi\cdot$ straal $\cdot$ hoogte $=$

$2\pi\cdot 4\sqrt{1+0{,}06k}\cdot 0{,}06\sqrt{1+\frac{4}{1+0{,}06k}}$.

c. $\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{4}{x}}=\sqrt{x\cdot 1+x\cdot\frac{4}{x}}=\sqrt{x+4}$, dus

$8\pi\sqrt{x+4}$

d. sum(seq(0.06$*$8π$*$ $\sqrt{1+0.06K+4}$,K,0,49,1))

$\approx 191{,}3506...$

e. $\int_1^4 8\pi\sqrt{x+4}\,\mathrm{d}x=\frac{16}{3}\pi(x+4)^{1\frac{1}{2}}\Big|_1^4=$

$\frac{16}{3}\pi(16\sqrt{2}-5\sqrt{5})\approx 191{,}798$

13 a. $y=\frac{1}{3}x$ op het interval $[0,3]$.

b. $\int_0^3 2\pi\cdot\frac{1}{3}x\sqrt{1+\frac{1}{9}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{10}{9}}\cdot x^2\Big|_0^3=\pi\sqrt{10}$

c. Opengeknipt en platgedrukt krijg je een cirkelsector met straal $\sqrt{10}$ en sectorhoek $\frac{2\pi}{2\pi\sqrt{10}}\cdot 360°$. De oppervlakte is $\frac{2\pi}{2\pi\sqrt{10}}\cdot 10\pi$

$=\pi\sqrt{10}$.

14 a. $R\cdot\sin\alpha=h$; straal breedtecirkel $r=R\cdot\cos\alpha$

b. $2\pi r\cdot R\Delta\alpha=2\pi R^2\cdot\cos\alpha\cdot\Delta\alpha$

c. Als $\Delta\alpha\to 0$, dan wordt de som $\Sigma 2\pi R^2\cdot\cos\alpha\cdot\Delta\alpha$ de integraal $\int_\beta^\gamma 2\pi\cdot R^2\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha$.

d. $\int_\beta^\gamma 2\pi\cdot R^2\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha=2\pi R^2\sin\alpha\Big|_\beta^\gamma=$

$2\pi R^2\cdot(\sin\gamma-\sin\beta)=2\pi R(h_2-h_1)$, want $R\cdot\sin\alpha=h$.

e. Dan $h_2=R$ en $h_1=-R$, dus oppervlakte bol $=4\pi R^2$.

15 $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$, dan $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, dus

$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$ wordt hier:

$\int_{-R}^{R} 2\pi\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=$

$\int_{-R}^{R} 2\pi\sqrt{R^2-x^2+(R^2-x^2)\cdot\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=$

$\int_{-R}^{R} 2\pi\sqrt{R^2-x^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-R}^{R} 2\pi R\,\mathrm{d}x=$

$2\pi Rx\Big|_{-R}^{R}=4\pi R^2$.

16 a. $\Delta I=1\frac{1}{3}\pi((R+\Delta R)^3-R^3)=$
$1\frac{1}{3}\pi(R^3+3R^2\cdot\Delta R+3R\cdot(\Delta R)^2+(\Delta R)^3-R^3)=$
$4\pi\cdot\Delta R(R^2+R\cdot\Delta R+\frac{1}{3}(\Delta R)^2)$

b. $O\approx\frac{\Delta I}{\Delta R}=4\pi(R^2+R\cdot\Delta R+\frac{1}{3}(\Delta R)^2)$

c. Als $\Delta R\to 0$, dan $O\to 4\pi R^2$.

Je vindt dus weer $O=4\pi R^2$.

17 a. $v(t)$ is een primitieve van a, dus
$v(t)=-9{,}8t-2000\ln(12700-124t)+c$
$v(0)=0$, dus $c=2000\ln 12700\approx 18900$

b. De brandstoftank is leeg als

$t=\frac{12700-4040}{124}\approx 69{,}8$.

$v(69)\approx$
$-9{,}8\cdot 69{,}8-2000\ln 4045+2000\ln 12700\approx 1604$
m/s, dus ongeveer 5800 km/h.

c. Met de GR, bijvoorbeeld:
fnInt(-9.8X $-$ 2000 ln(12700–124X) $+$ 18900,X,0,69)
=
41082 m ≈ 41 km.

18 a. $v(t)=$
$\sqrt{(1+\cos t)^2+(-\sin t)^2}=\sqrt{1+2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}$
$=\sqrt{2+2\cos t}=\sqrt{4\cos^2\frac{1}{2}t}=|2\cos\frac{1}{2}t|$.

b. $\int_0^\pi\left|2\cos\frac{1}{2}t\right|\mathrm{d}t=\int_0^\pi 2\cos\frac{1}{2}t\,\mathrm{d}t=4\sin\frac{1}{2}t\Big|_0^\pi=4$

$\int_\pi^{2\pi}\left|2\cos\frac{1}{2}t\right|\mathrm{d}t=\int_\pi^{2\pi} 2\cos\frac{1}{2}t\,\mathrm{d}t=4\sin\frac{1}{2}t\Big|_\pi^{2\pi}=4$

De afgelegde weg is dus 8.

19 De kromme $\begin{cases}x=t\\ y=f(t)\end{cases}$ heeft als baan de grafiek van de functie f. De afgelegde weg is dus de lengte van de grafiek van f.

20 a. $h(x)=3-x$; $\int_0^3 x(3-x)\mathrm{d}x=1\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^3=4\frac{1}{2}$;

opp driehoek $OAB=4\frac{1}{2}$, dus $x_Z=1$ en wegens symmetrie $y_Z=1$.

b. Opp $=3+\int_1^3\frac{3}{x}\mathrm{d}x=3+\left(3\ln x\Big|_1^3\right)=3+3\ln 3$

$\int_0^3 h(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x\cdot 3\,\mathrm{d}x+\int_1^3 x\cdot\frac{3}{x}\,\mathrm{d}x=7\frac{1}{2}$,

dus de x-coördinaat is $\frac{7\frac{1}{2}}{3+3\ln 3}$.

Rekentechniek

1 • $y=\frac{1-x}{1+x}\Leftrightarrow y(1+x)=1-x\Leftrightarrow y+yx=1-x\Leftrightarrow$

$x+xy=1-y\Leftrightarrow x(1+y)=1-y\Leftrightarrow x=\frac{1-y}{1+y}$

of met herschrijven en machientjes:

$y=\frac{1-x}{1+x}=-1+\frac{2}{1+x}$, dit is

PLUS 1 → OMG → MAAL 2 → MIN 1

De omgekeerde ketting is:
PLUS 1 → DD2 → OMG → MIN 1,

$y \to y-1 \to \frac{y-1}{2} \to \frac{2}{y-1} - 1 = \frac{2}{y-1} - \frac{y-1}{y-1} =$

$\frac{1-y}{1+y}$, dus $x = \frac{1-y}{1+y}$

• $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow x+1 = \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow$

$x = \frac{1}{y^2} - 1$

• $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \Rightarrow y^2 = \frac{1-x}{1+x}$, en dan volgt uit de eerste van opgave 1: $x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$

• $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$, dus $y^2 = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow$

$xy^2 + y^2 = x \Leftrightarrow x - xy^2 = y^2 \Leftrightarrow x(1-y^2) = y^2$,

dus $x = \frac{y^2}{1-y^2}$

• $y = 2\,\mathrm{e}^{x+3} + 1 \Leftrightarrow 2\,\mathrm{e}^{x+3} = y-1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x+3} = \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}$, dus

$y = \ln(\tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}) - 3$

• $y = \ln(2x+1)+1 \Leftrightarrow \ln(2x+1) = y-1$, dus $2x+1 = \mathrm{e}^{y-1}$, dus $x = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{y-1} - \tfrac{1}{2}$

• $y = \ln\frac{x+1}{x} = \ln(1+\frac{1}{x})$, dus $1+\frac{1}{x} = \mathrm{e}^y$

dus $\frac{1}{x} = \mathrm{e}^y - 1$, dus $x = \frac{1}{\mathrm{e}^y - 1}$

• $y = \ln(1-x) - \ln(1+x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$, dus

$\mathrm{e}^y = \frac{1-x}{1+x}$, dus (uit de eerste van deze opgave)

$x = \frac{1-\mathrm{e}^y}{1+\mathrm{e}^y}$.

• $y = \frac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x} = 1 + \mathrm{e}^{-x}$, dus $-x = \ln(y-1)$ en

$x = -\ln(y-1)$.

• Uit de voorgaande volgt: $x = -\ln(\frac{1}{y} - 1)$, dus

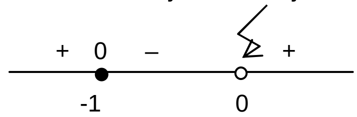
$x = \ln\frac{y}{1-y}$

• $y = \sqrt{1-\frac{1}{x}}$ geeft $y^2 = 1 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow 1 - y^2 = \frac{1}{x}$, dus

$x = \frac{1}{1-y^2}$

• $y = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 - y$, dus $x = \frac{1}{(1-y)^2}$

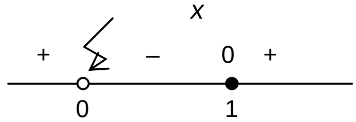
2 • $x \neq -1$
• $x > -1$
• zie voorbeeld $-1 < x \leq 1$
• $x \geq 0$ en $x+1 > 0$, dus $x \geq 0$
• alle x
• $2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\tfrac{1}{2}$
• Er moet gelden: $\frac{x+1}{x} > 0$. Het teken van $\frac{x+1}{x}$ kan wisselen bij $x=0$ of bij $x=-1$



Dus $x < -1$ of $x > 0$

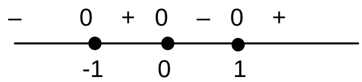
• Er moet gelden: $1-x > 0$ en $1+x > 0$, dus $-1 < x < 1$
• alle x
• alle x
• Er moet gelden: $1 - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0$

Het teken van $\frac{x-1}{x}$ kan wisselen bij $x=0$ of $x=1$.

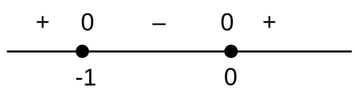


Dus $x < 0$ of $x \geq 1$
• $x > 0$

3 • $-1 \leq x \leq 1$
• geen x
• $(x-1)^2$ is alleen voor $x=1$ gelijk aan 0 en anders positief. Dus het teken van $x(x-1)^2$ is (behalve als $x=1$) het teken van x, dus $x \leq 0$ of $x=1$
• $x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$
Teken van $x(x-1)(x+1)$:



dus $x \leq -1$ of $0 \leq x \leq 1$
• $x^2+1 > 0$ voor alle x, dus $x \leq 0$
• $x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$
• $x(x^3+1)$ wisselt van teken als $x=0$ of $x=-1$



Dus $-1 \leq x \leq 0$
• $x^4 + x = x(x^3+1)$, dus $-1 \leq x \leq 0$

4 • $\dfrac{x^2-4}{x^2-1} \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-4-\left(x^2-1\right)}{x^2-1} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{-3}{x^2-1} \le 0$

$\Leftrightarrow x^2-1>0 \Leftrightarrow x>1$ of $x<-1$

• $\dfrac{x^2-x}{x} \le 3 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x-3x}{x} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-4x}{x} \le 0 \Leftrightarrow$

$x-4 \le 0$ en $x \ne 0 \Leftrightarrow x \le 4$ en $x \ne 0$

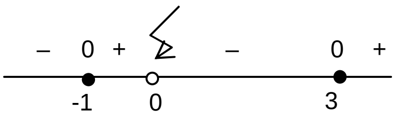
• $\dfrac{x-2}{x+1} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{x+1} - \dfrac{x+1}{x+1} = \dfrac{-3}{x+1} < 0 \Leftrightarrow x+1>0$

dus $x>-1$

•

$\dfrac{x^2-x-3}{x} - 1 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x-3}{x} = \dfrac{(x-3)(x+1)}{x} \le 0$

Tekenschema $\dfrac{(x-3)(x+1)}{x}$



Dus $x \le -1$ of $0 < x \le 3$

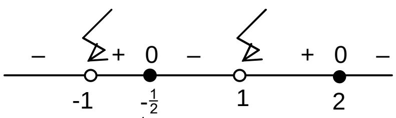
• $\dfrac{2x}{x^2+1} \ge -1 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x^2+1} + \dfrac{x^2+1}{x^2+1} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1} \ge 0$

Dit is voor alle x

• $\dfrac{3x}{x^2-1} \ge 2 \Leftrightarrow \dfrac{3x}{x^2-1} - \dfrac{2x^2-2}{x^2-1} =$

$\dfrac{-(2x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)} \ge 0$

Tekenschema $\dfrac{-(2x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)}$:



Dus: $-1 < x \le -\tfrac{1}{2}$ of $1 < x \le 2$

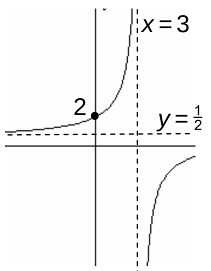
5 **a.** Verticaal vermenigvuldigen met 2, 1 eenheid naar rechts schuiven, 3 eenheden naar boven schuiven (sommige bewerkingen kunnen verwisseld worden).

b. Door de eerste bewerking veranderen de asymptoten niet, door de tweede bewerking wordt de verticale asymptoot $x=0$ overgevoerd in de verticale asymptoot $x=1$ en door de derde bewerking wordt de horizontale asymptoot $y=0$ overgevoerd in de horizontale asymptoot $y=3$.

c. Alle waarden $\ne 3$.

d. $y = \dfrac{x-12}{2x-6} = \tfrac{1}{2} - \dfrac{9}{2x-6}$

Verticaal vermenigvuldigen met -9, 6 eenheden naar rechts schuiven, horizontaal vermenigvuldigen met $\tfrac{1}{2}$, $\tfrac{1}{2}$ eenheden naar boven schuiven. Horizontale asymptoot $y=\tfrac{1}{2}$, verticale asymptoot $x=3$.



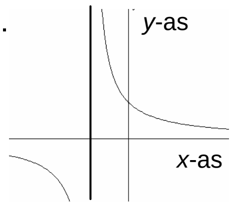
Alle waarden $\ne \tfrac{1}{2}$.

e. Alle waarden die $y = \dfrac{x-12}{2x-6}$ aan kan nemen als je voor x alleen positieve getallen invult.

Dus: $y>2$ of $y<\tfrac{1}{2}$, zie de schets van de grafiek van $y = \dfrac{x-12}{2x-6}$.

6 • $y = \dfrac{1-x}{1+x}$, de grafiek is een hyperbool met horizontale asymptoot $y=-1$, dus bij alle $y \ne -1$.

• $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{\dfrac{1}{x+1}}$ voor $x>-1$.



De grafiek van $y = \dfrac{1}{x+1}$ is een hyperbool met horizontale asymptoot $y=0$ en verticale asymptoot $x=-1$.

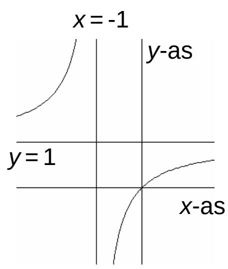
$y = \dfrac{1}{x+1}$ neemt voor $x>-1$ alle positieve waarden aan dus $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{\dfrac{1}{x+1}}$ ook.

Dus bij elke positieve y is er een x.

• $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ neemt alle waarden ≥ 0 aan, want $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ neemt alle waarden $\ne -1$ aan, (zie boven).

• $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ bestaat voor $x>-1$ en is dan gelijk aan $\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$.

$y = \dfrac{x}{x+1}$ heeft als grafiek een hyperbool met horizontale asymptoot $y=1$ en verticale asymptoot $x=-1$.



Als $x>-1$, dan $0 \le \dfrac{x}{x+1} < 1$, zie plaatje.

Dus als $y = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$, dan is er voor alle y met $0 \le y < 1$ een waarde van x te vinden.

• $y = 2\,e^{x+3} + 1$

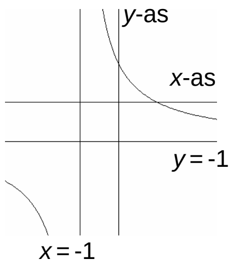
$2\,e^{x+3}$ neemt alle positieve waarden aan, dus voor elke $y>1$ is er een x met $y = 2\,e^{x+3} + 1$.

• Bij elke $y = \ln(2x+1)+1$ is er een x te vinden, want $y = \ln x$ neemt alle waarden aan, dus ook $y = \ln(2x+1)+1$.

• $\frac{x+1}{x}$ neemt alle positieve waarden $\neq 1$ aan, dus
$\ln\frac{x+1}{x}$ alle waarden $\neq 0$.

Dus als $y \neq 0$, is er een x met $y = \ln\frac{x+1}{x}$.

• $y = \ln(1-x) - \ln(1+x)$ bestaat voor $-1 < x < 1$. In dat geval geldt: $y = \ln\frac{1-x}{1+x}$.



De grafiek van $y = \frac{1-x}{1+x}$ is een hyperbool met asymptoten $y = -1$ en $x = -1$.
Als $-1 < x < 1$, dan neemt $y = \frac{1-x}{1+x}$ alle positieve waarden aan, zie schets.
Dus als, dan is er bij elke y een waarde van x.

• $y = \frac{e^x+1}{e^x} = 1 + e^{-x}$ neemt alle waarden > 1 aan, want $y = e^{-x}$ neemt alle positieve waarden aan.

Dus als $y = \frac{e^x+1}{e^x}$, is er bij elke $y > 1$ een waarde van x te vinden.

• $y = \frac{e^x}{e^x+1} = 1 - \frac{1}{e^x+1}$

$\frac{1}{e^x+1}$ neemt alle waarden tussen 0 en 1 aan, dus $y = \frac{e^x}{e^x+1} = 1 - \frac{1}{e^x+1}$ ook alle waarden tussen 0 en 1.
Dus bij elke waarde van y is er een x met $y = \frac{e^x}{e^x+1}$

• $y = \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$

$1 - \frac{1}{x}$ neemt alle waarden ≥ 0 en $\neq 1$ aan, dus $y = \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$ ook. Dus als $y \geq 0$ en $y \neq 1$, dan is er een waarde van x met $y = \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$.

• $y = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\frac{1}{\sqrt{x}}$ neemt alle positieve waarden aan,

dus $y = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ alle waarden kleiner dan 1.

Dus bij elke $y < 1$ is er een x met $y = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

7 **a.** $y > 4$: $x = -2 + \sqrt{y-4}$ of $x = -2 - \sqrt{y-4}$
$y = 4$: $x = -2$
b. Zie **a**, $\sqrt{x} = -2 + \sqrt{y-4}$ (want $\sqrt{x} = -2 - \sqrt{y-4}$ kan niet omdat $-2 - \sqrt{y-4}$ voor elke waarde van y negatief is.)
Bij $\sqrt{x} = -2 + \sqrt{y-4}$ is een x te vinden als $-2 + \sqrt{y-4} \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 8$
Dus: $y \geq 8$: $x = \left(-2 + \sqrt{y-4}\right)^2$
c. $x^2 + 4xy = y^2 \Leftrightarrow (x+2y)^2 = -3y^2$. Dus moet $-3y^2 \geq 0$, dus $y = 0$, maar dan ook $x = 0$.
Dus $x = y = 0$.

d. $x^2 + 4xy = 5y^2 \Leftrightarrow (x+2y)^2 = y^2$ Dus $x + 2y = y$ of $x + 2y = -y$, dus $x = -y$ of $x = -3y$
e. Voor alle x geldt: $0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$.
Als $0 < y < 1$ dann $x = \sqrt{1 - \frac{1}{y}}$ of $x = -\sqrt{1 - \frac{1}{y}}$
Als $y = 1$, dan $x = 0$.

8 • $(x+y)^2 + (x-y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = 2x^2 + 2y^2$
• $(x+y)^2 - (x-y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 = 4xy$
• $\frac{2x^2+4x}{x} = \frac{2x^2}{x} + \frac{4x}{x} = 2x + 4$
• $\frac{2x^2+4x}{x+2} = \frac{2x(x+2)}{x+2} = 2x$
• $\frac{2x^2+4x+2}{x+1} = \frac{2(x+1)^2}{x+1} = 2(x+1)$
• $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$
• $\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = x^2+x+1$
• $\frac{x^{10}-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^9+x^8+\ldots x+1)}{x-1} = x^9+x^8+\ldots x+1$
• Je kunt in de eerste formule van opgave 8 $\sqrt{x}$ invullen in plaats van x. Dit geeft: $2x + 2y^2$.
• $(1+\sqrt{x+1})(1-\sqrt{x+1}) = 1 - (x+1) = -x$
• $\sqrt{(e^x - e^{-x})^2 + 4} = \sqrt{e^{2x} - 2 + e^{-2x} + 4} = \sqrt{(e^x + e^{-x})^2} = e^x + e^{-x}$
• $\frac{4^x-1}{2^x-1} = \frac{(2^x+1)(2^x-1)}{2^x-1} = 2^x - 1$

9 $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{3}{6}}\cdot x^{\frac{2}{6}}=x^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{x^5}$

$\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[6]{x}=x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{6}}=x$

$\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt[6]{(x+1)^2}=\sqrt[6]{x^5+2x^4+x^3}$

$x\sqrt{\frac{x+1}{x^2}}=\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x^2}}=\sqrt{x^2\cdot\frac{x+1}{x^2}}=\sqrt{x+1}$

$2^x\sqrt{2^x+2^{-x}}=\sqrt{2^{2x}}\cdot\sqrt{2^x+2^{-x}}=\sqrt{2^{3x}+2^x}$

$\sqrt{\sqrt{2}^x}=\sqrt{\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x}=\left(\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x\right)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{x}{4}}=\sqrt[4]{2^x}$